前　言

在关于数学题材的介绍性的讲演中，开头的习惯用语往往是："希腊文明创立了……原理"．几乎所有的经典题材也都采用这种表达方式，甚至由经典的核心内容通过不断提高抽象程度而形成的多数"现代"题材，也难免于此．尽管，首篇奠基性的图论的论文是欧拉(Euler)早于1736年写就的，但是，图论以现代面貌出现，为数学界所正视，那还是近百年来有了基尔霍夫(Kirchhoff)关于电网络的成果以后的事．近二十年，由于图论的迅速发展，一跃成为数学的一个独立分支．当然，图论还不能说已是现代化了的，它仍旧接近于原始的思想，仍然充满着未开发的领域，其"魅力"不亚于当年的希腊文明．图论是组合数学的一支，可应用于各种普通的问题．它不要求高深的数学工具，而有时需要深入的思考．因此对于年轻的数学爱好者来说，图论是极好的研究园地．本书列举的一些问题与图论中的某些结果已成为现代学校课程的一部分．广泛的讲演使我注意到各类水平人士的兴趣．鉴于当时还未有匈牙利文的图论书籍，我于1969年写成了本书的匈牙利文本．(诚然，图论方面第一本科学专著恰恰是匈牙利人、丹尼斯·哥尼希(DénesKönig)教授于1936年就写成的，但是他用的偏偏是德文．)近十五年，关于图论的大量的著作已经出版(参看文献目录部分)．

我试图对书中几乎全部的命题，不管是简易的还是繁难的，都给出严谨的证明．各项结果以原始形态给出：仿效发现的过程，解辅助命题，定义一批已证实为有用的新概念，并确定其在实际问题中是否可推广．练习题、问题及其解答贯穿始终的是：用新问题给出提示，简化复杂的命题，并且首要的是给读者以激励．

练习题并不难，读者只需画画图、略加计算便可获解决. 每章末，星号(*)后的练习与问题为的是提高读者的能力，以解决与该章内容有关的问题. 它们的解答见于第七章，但恳切地期望读者独立地去解题. 建议读者随时随地以画图阐明书中的命题. 尽管书中图例丰富，但这决代替不了读者亲自动手画图，只有自己动手才能更好地弄清图形的演化. 借此使读者熟悉书中的内容，导致读者自己去发现结果.

为避免混淆，一律不在正文内注明命题的出处，而仅于书末列出引文索引. 每章内，未作正式的分节. 各组练习与问题正是划分节段的标志. 各节的内容概括在目录中. 特别，为了强调图论中一些重要的方法，除了在内容索引中列出外，也在正文中以粗体字标出. 每章内，练习、问题与命题包括列于章末的练习、问题与命题均作统一的编号. 在每一章中，编号是从头开始的.

第一章阐述基本概念；其后的五章，分述图论的五个方面，其中收进了一些新的结果. 还有一些有趣的问题未能在此讨论. 比如，图与曲面、矩阵以及概率论的关系；地图的着色问题，电网络详细的拓扑描述，以及某些运输问题的解等. 上述的大多数问题拟收入正在筹备中的本书的下一卷. 书末的文献目录包含了作为进一步阅读的建议.

从适应数学的任何一级水平来说，可以发现本书将是十分有用的；事实上，对于那些有问题需要解决的人们，情形更是如此. 因为，借助于图论的思想以提高解决问题的能力，这对于任何一个领域来说，都是有益的.

Béla Andrásfai

目 录

第一章　绪　　论

我们先来考虑一项在若干个运动队间的比赛．设想已赛完了几局，需要一个清楚的图形来表示它们．不妨采用这样的图形：使每个队对应于其中的一个点；由于赛局总是在两个队间进行的，任一赛局可由联结两对应点的一条线来表示．我们用如下的方式标出全部已完成的赛局：在每个点旁须标以对应队的专门的记号，不然，由于对应着赛局的线可能相交，同时，交点看起来好像也表示运动队，这就容易产生误解．因此，常用小圆圈而不是用点来标记运动队．图 1 指明下列局面：有 a, b, c, d, e 5 个队，且下列赛局已完成：

$$a—d,\quad a—e,\quad b—c,$$
$$b—d,\quad c—d,\quad c—e,$$

图 1 叫做此局面的**图**．(用图这个词是因为可以借助图解来论证．)其中的小圆圈与线分别叫做图的**顶点**与**边**．

点、**结点**、**接点**等词也用以代替顶点这个词．对应于赛局 $a—d$ 的边有时记为 $\{a, d\}$．显然，$\{a, d\}$ 与 $\{d, a\}$ 表示同一条边．类似地，$\{a, e\}$ 与 $\{e, a\}$ 相同，等等．顶点 a 与 d 都叫做边 $\{a, d\}$ 的**端点**；边 $\{a, d\}$ **联结**顶点 a 与 d，或说它**关联**于 a 与 d，a 是 d 的一个**邻点**，a **邻接**于 d，或说 a 与 d 是**邻接顶点**．图 1 是这样的图 G_1，它含有顶点 a, b, c, d 与 e，以及边 $\{a, d\}$，$\{a, e\}$，$\{b, c\}$，$\{b, d\}$，$\{c, d\}$ 及 $\{c, e\}$．

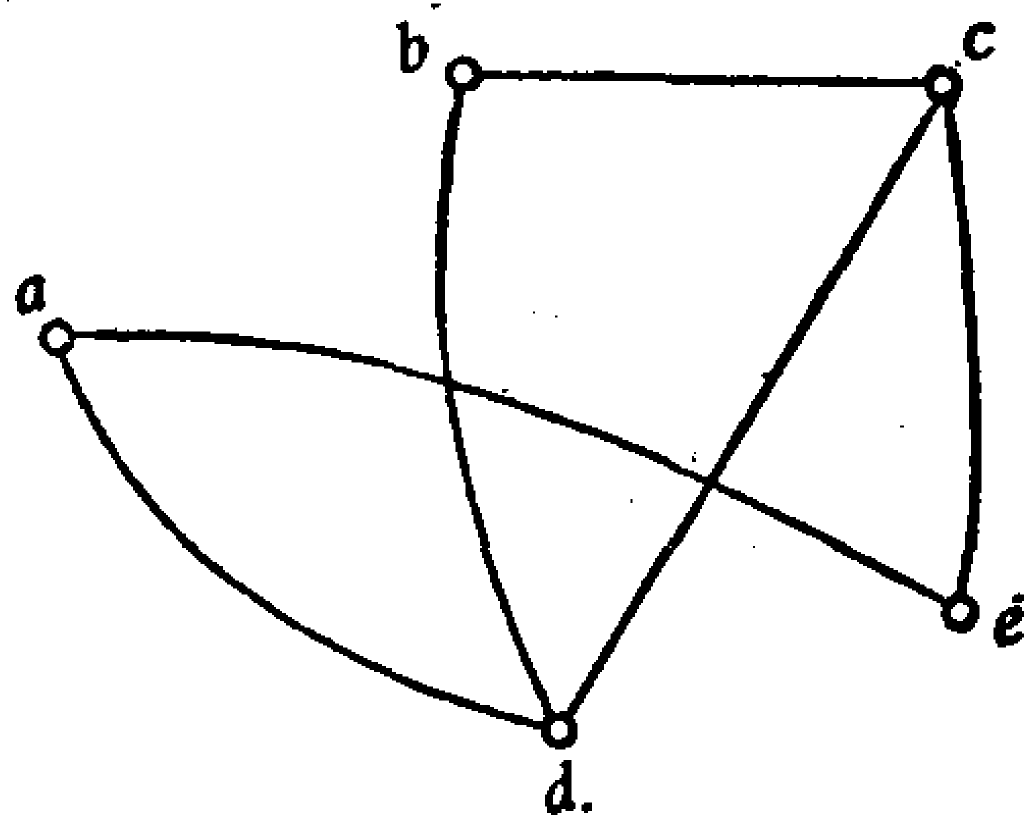


图　1

有可能一个给定的队还没参加过比赛；而在有的比赛中，相同的两个队之间进行了不止一局的比赛. 图 2 中的图 G_2 表示包括上述两种情况的局面. 不与边关联的顶点叫做**孤立顶点**. 如果两条或两条以上的边关联于同一对顶点，这时，就说图含有**多重边**. 由此知道，b 与 e 是 G_2 的孤立顶点. 联结 c 与 f 的各条边可以由下标加以区别，例如$\{c, f\}_1$、$\{c, f\}_2$、$\{c, f\}_3$. 类似地，对应于 a 与 d 间的赛局是$\{a, d\}_1$ 及$\{a, d\}_2$.

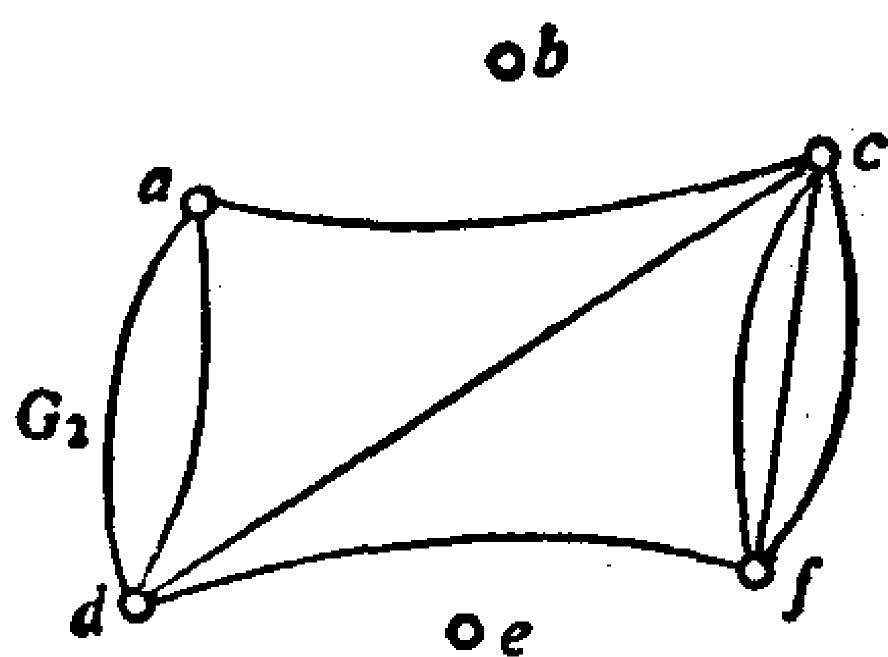


图 2

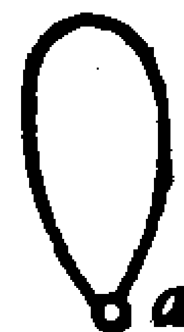


图 3

某些人之间的认识关系可以用类似的图形来表示，这里，假定认识是相互的. 每个人对应于一个顶点，如果两个人互相认识，就用一条边联结对应的两个顶点. 一个人 a 认识自己这一事实可以用一条只关联于顶点 a 的边来表示（参看图 3）. 象这样的边常叫做**环**.

如果，一个图形含有点和线（顶点和边），且每条线联结着两个顶点（不必要求是不同的），以下就称这样的图形为**图**. 关联于顶点 p 的边的端点数叫做 p 的**次数**或**价**，记为 $\varphi(p)$. 次数为 n 的顶点有时叫做 **n-价的**.

图 3 只包含一个顶点、一条边，$\varphi(a)=2$. 图 4 中的 G_3 包含 8 个顶点和 10 条边，其中有两条边是环；在该图中，$\varphi(a_8)=0$, $\varphi(a_4)=\varphi(a_5)=1$, $\varphi(a_6)=2$, $\varphi(a_7)=3$, $\varphi(a_1)=\varphi(a_2)=4$, 以及 $\varphi(a_3)=5$.

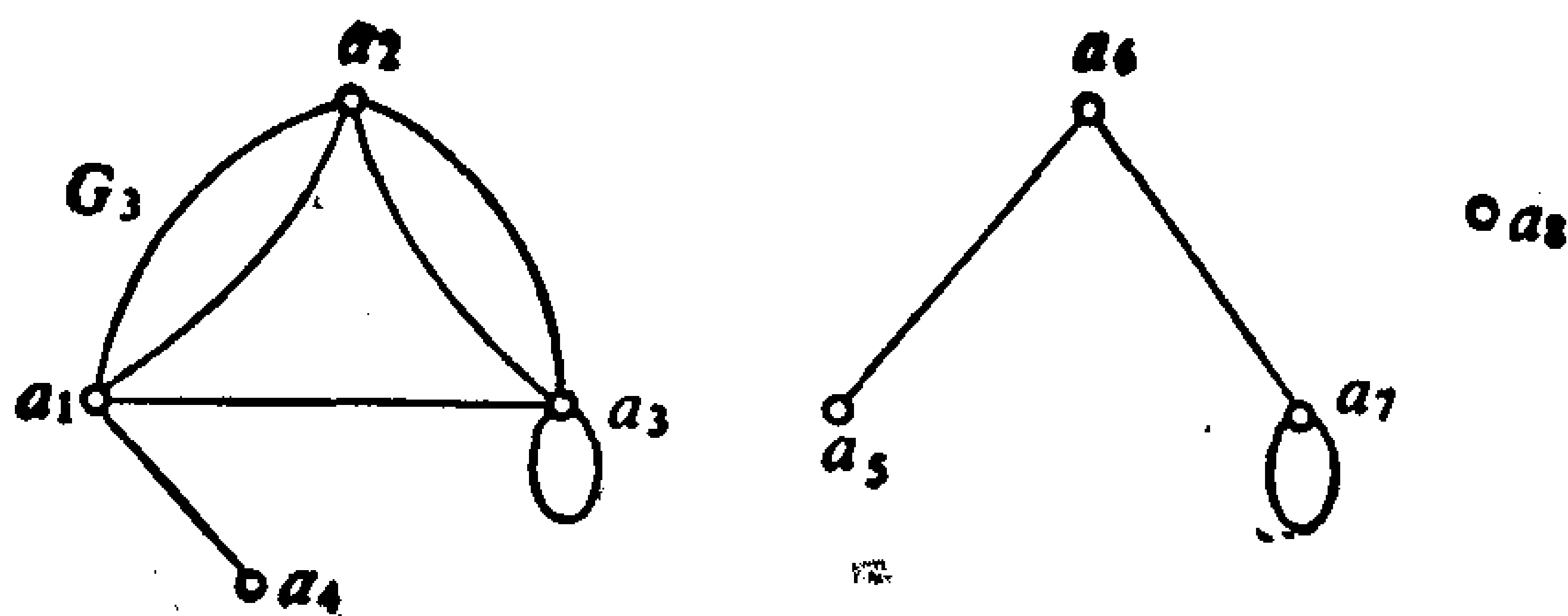


图 4

练　　习

1. 找出图 1 与图 2 中各图的顶点数与边数以及每个顶点的次数.

2. 画出几个具有 5 个顶点的图，使其中含有次数为 3 的顶点是两个，而次数为 4 的顶点是 3 个. 问在这些图中各有多少条边?

3. 画出具有 6 个顶点的图，使其中各顶点的次数是 1, 2, 2, 3, 5与 5. 在这样的图中有多少条边?

问　　题

4. 确定具有 5 个顶点, 且次数为 1, 2, 2, 3, 3 的图的数目.

5. 某次聚会的成员到会后握了手. 试证与奇数个人握过手的人数是一个偶数.

6. 在一次象棋比赛中, 任意的两名选手间至多只下一盘. 试证总能找到两名选手, 他们下过的盘数恰好相同.

7. 在问题 6 所指的比赛中, 如果每名选手与其余所有的选手都比赛过, 且选手的人数是 n, 求总盘数.

为解练习 **2** 可以用多种方式画出图来. 图 5 与图 6, 每个都

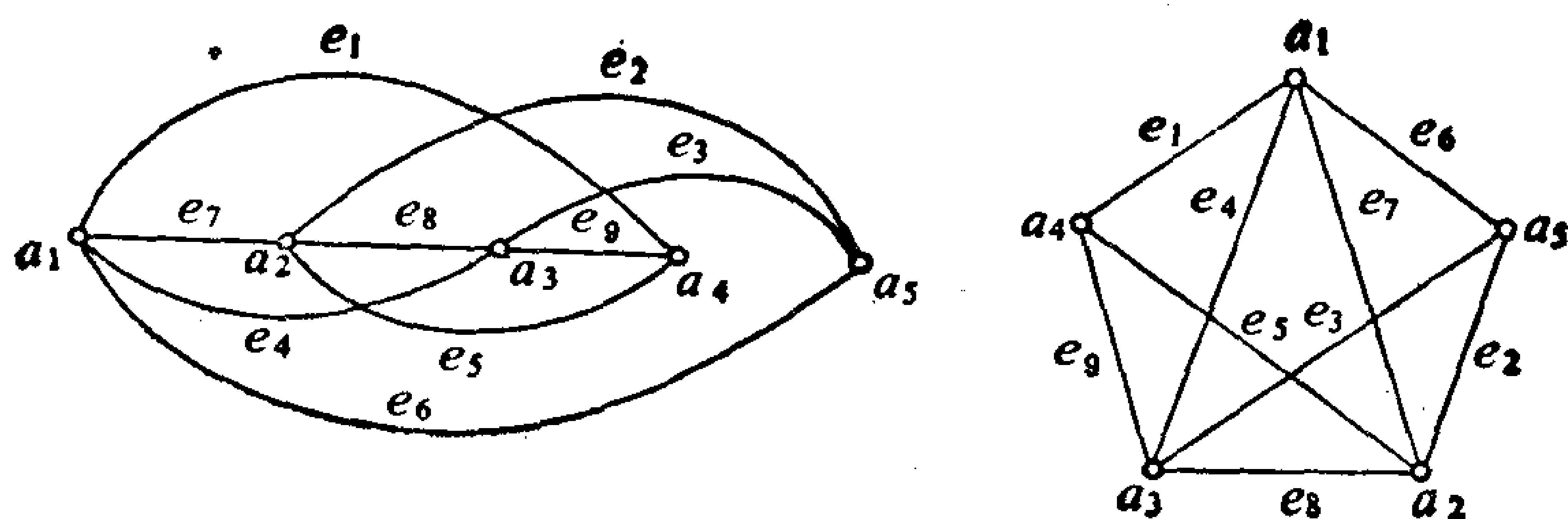


图 5

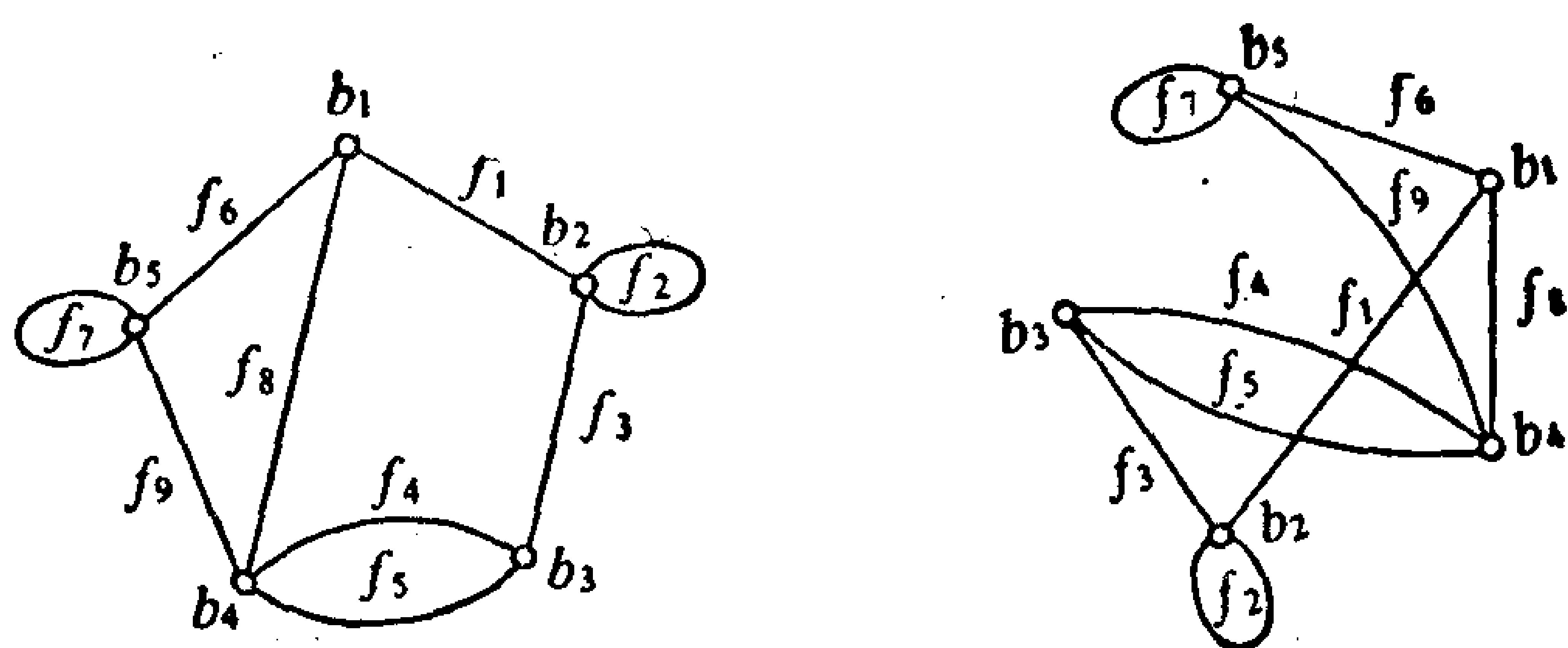


图 6

表示两个图. 图 5 中的两个图都包含顶点 $a_1, a_2, \cdots, a_5$ 以及边 $e_1, e_2, \cdots, e_9$, 两个图看起来不一样, 但是它们的顶点与边都可以标记为 $e_1=\{a_1, a_4\}, e_2=\{a_2, a_5\}, \cdots, e_9=\{a_3, a_4\}$. 由于它们表示了相同的关系, 在这些图之间不存在本质的差别.

如果图 G_1 的每个顶点与边能以唯一的方式对应于图 G_2 的顶点与边, 使图 G_2的顶点与边也以唯一的方式对应于图 G_1的顶点与边, 并且对应的边关联于对应的顶点, 则称图 G_1 与 G_2 是**同构的**. 简短地说, 若两个图的各顶点之间有保持邻接性的1—1对应关系, 则它们是同构的. 为要表示一个图, 可以把它的顶点想象成小圆环, 它的边是系于环上能拉伸的橡皮筋. 在移动、拉伸、压缩的过程中, 我们的图形都保持图的**同构性**. 通常, 如果把同构的图认为是**相同的**, 不会引起误解. 例如, 可以说图 5 中的两个图是相同

的．图 6 的两个图也是同构的，其间的对应关系由对应的字母表出．但从图 5 与图 6 中各取出一个的图是不同构的，因为图 5 不含任何环而图 6 中的图都含有环，而如果对应关系是同构的，那么环就必须与环对应．

图 5 与图 6 中四个图的每一个都具有 9 条边．要是再画出满足所要求的图来，它们的边数仍会是 9．其实，具有练习 **3** 所指定的性质的每个图都有 9 条边．这是碰巧的呢还是有着某一规律的结果？在这样的一些图中有些什么共性？把顶点的次数加起来，在练习 **2** 与 **3** 中分别有

$$3+3+4+4+4=18$$

以及 $$1+2+2+3+5+5=18.$$

在每一情况下，这结果都等于边数和的两倍．一般地，一个任意图的顶点的次数和等于边的端点数的和．每条边对这和数的贡献为 2，即每个端点贡献为 1；因此，和是边数的两倍．这证明了下述的一般规律：

8. 一个任意图各顶点的次数和等于边数和的两倍．

因此对于每个图，次数和是偶数．这样，问题 **4** 有了一个直接的解答：由于 5 个顶点的次数各是 1, 2, 2, 3 与3，它们的和是奇数，所以这样的图不存在．

适合问题 **5** 的图是容易构造出来的．使图的顶点表示到会的成员，一条边表示对应于其端点的两个人互相握过手．这样，与某个人握过手的人数就是关联于其对应顶点的边数．现在只须证明图包含偶数个奇次的顶点．一个图的顶点的次数和已经证明是偶数．让我们把这个数看成是两部分的和：其中之一是偶次数的和，另一是奇次数的和．前者显然是偶数；后者也必为偶数，因为它们的和是偶数．但要使几个奇数的和是偶数，只有当奇数的个数是偶数时才行．到此为止，似乎已证明了一般的命题：

9. 每个图含有偶数个奇次顶点.

但是，问题5′的解果真是对每个图证明了这一命题了吗？如果我们考虑的图都像是问题5所指的那样，那确是证完了. 在这里，这个问题的图，由于每一对顶点只联结着至多一条边，它不含重边. 无论如何，有可能是两个人互相多次地握手：在见面时，说再见时，表示祝贺或者有别的什么原因时. 如果要求我们的图表示出每一次握手，那么要求一条边不允许代表多于一次的握手. 因此，在证明我们的问题时，可以考虑多重边. 我们还未提到环，这或许可以想象为有人自己与自己握手，他的左手握右手和他的右手握左手. 一个环就表示这种情形. 所以求证的命题应作必要的改变：我们必须证明伸过奇数次手的人数是一个偶数. 每个环对与之关联的顶点的次数贡献为2. 这表示自己与自己握手时伸了两次手. 确实是的，他伸了一次左手，又伸了一次右手. 只有这修改了的问题的解才能确实证明每个图含有偶数个奇次顶点. 这表明要把结果加以推广，谨慎是必需的.

作为命题9的一个应用，下列有趣的命题是容易得证的：每个碳氢化合物的分子所含的氢原子是偶数个. 事实上，每个碳氢化合物的分子含有氢与碳原子，其原子价分别为1价与4价. 设每个原子对应于图的一个顶点，如果两个原子是联结着的，那么对应的顶点就邻接. 这个图的顶点中，对应于碳与氢原子的顶点分别有次数4与1. 所以，氢原子的个数是偶数.

问题6说的是：如果一个图至少含有两个顶点，且无环、无多重边，就含有两个次数相同的顶点. 无环、无多重边的图叫做**简单图**. 我们来证下列命题：

10. 一个至少含两个顶点的简单图中有两个同次数的顶点.

值得注意的是：不含同次数的两顶点的图是有的，但它们不是简单图. 图7中的图有这一性质，即便是把它看成单一的图也如

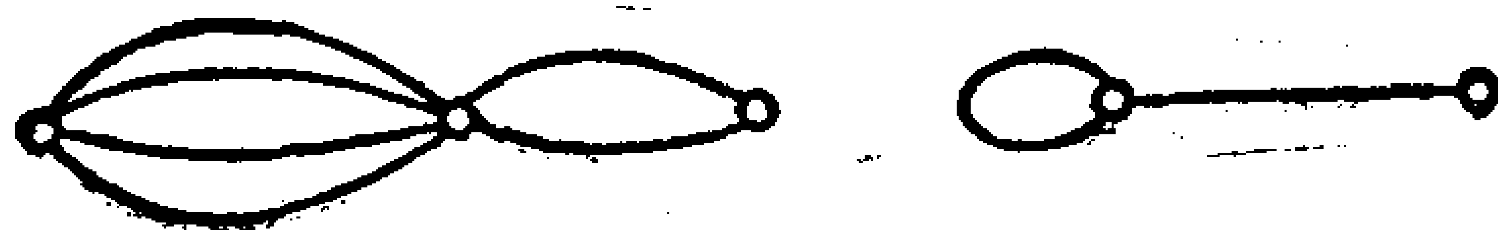


图 7

此.

为了证明命题 10，设图 G 是简单的. 把它的顶点数记为 $n(n \geq 2)$. 因为一个顶点至多只能与另外 $n-1$ 个顶点邻接，所以每个顶点的次数小于或等于 $n-1$. 于是，对于图 G，只有下列的次数是可能的：

$$0, 1, 2, \cdots, n-1.$$

又这 n 个数不能都作为图 G 的顶点的次数. 因为，一个次数为 0 的顶点是孤立顶点，而次数为 $n-1$ 的顶点邻接于其它的每一个顶点；但是，孤立顶点不能与其它任一顶点邻接. 因此，对于图 G，只有下列的次数才是可能的：

$$0, 1, 2, \cdots, n-2$$

或 $$1, 2, 3, \cdots, n-1.$$

不论在哪种情况下，至多有 $n-1$ 种不同的次数. 在第一种情况，可以设想标有数 $0, 1, 2, \cdots, n-2$ 的 $n-1$ 个箱子，把图 G 的顶点投入箱子，使每个顶点的次数与箱子的号数相同. 由于图 G 的顶点个数是 n，而箱的号数只有 $n-1$ 个. 总能找到一个箱子至少装有两个顶点. 这些顶点当然有相同的次数. 同样的推理，适合于第二种情况.

问题 6 的解中，应用了所谓**鸽笼原理**：如果把多于 n 个的对象分划成 n 类(鸽笼)，则至少有一类，其中含有不止一个的对象.

问题 7 也可以按照下列方式来叙述：在一个具有 n 个顶点的简单图中，如果每一对点都是邻接的，那么，共有多少条边？这种图叫做具有 n 个顶点的**完全图**. 具有 3 个顶点的完全图也叫**三角形**(包括它的边不是直线段的情形). 图 8 所示为 $n=1, 2, 3, 4, 5,$

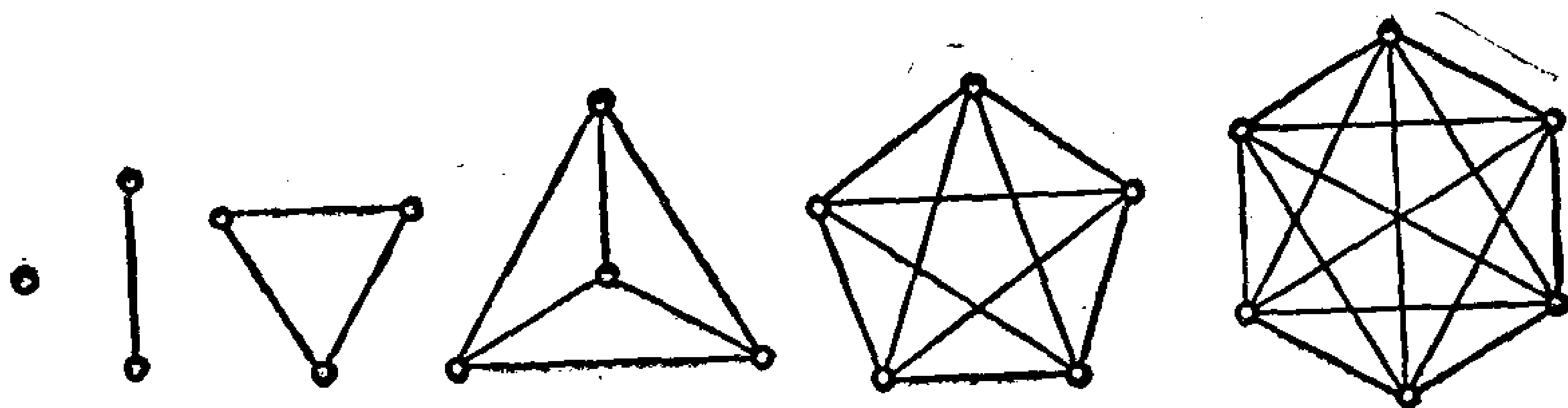


图 8

6 时，具有 n 个顶点的完全图．具有 n 个顶点的完全图的每个顶点的次数是 $n-1$，次数和是 $n(n-1)$．按照命题 8，一个任意图的边数是次数和的一半．于是，问题 7 得以解决．

11. 具有 n 个顶点的完全图共有 $n(n-1)/2$ 条边．

练　　习

12. 画出全部具有 5 个顶点，3 或 7 条边的简单图．

13. 求出具有 5 个顶点，各顶点的次数都不小于 3 的简单图的个数．

全凭试验来解练习 12 会化费很长的时间；甚至还会罗列不全．为了引出某些概念，我们先考虑只有 3 条边的图；任何一个这种图的次数和是 6．我们先肯定，没有次数大于 3 的顶点，并且只有一个图含有一个次数是 3 的顶点．这个图的次数是 3，1，1，1，0．若一个图不含次数大于 2 的顶点，则只有如下的次数列是可能的：2,2,2,0,0；或 2,2,1,1,0；或 2,1,1,1,1．容易看出，每种情况唯一地决定着一个图．于是，存在四个本质上不同的，具有 5 个顶点与 3 条边的简单图；图 9 的第一行表示的就是这四个图．这图的第二行表示具有 5 个顶点与 7 条边的简单图．

怎样才能简易地找出这些图呢？让我们考虑在同一列中的两

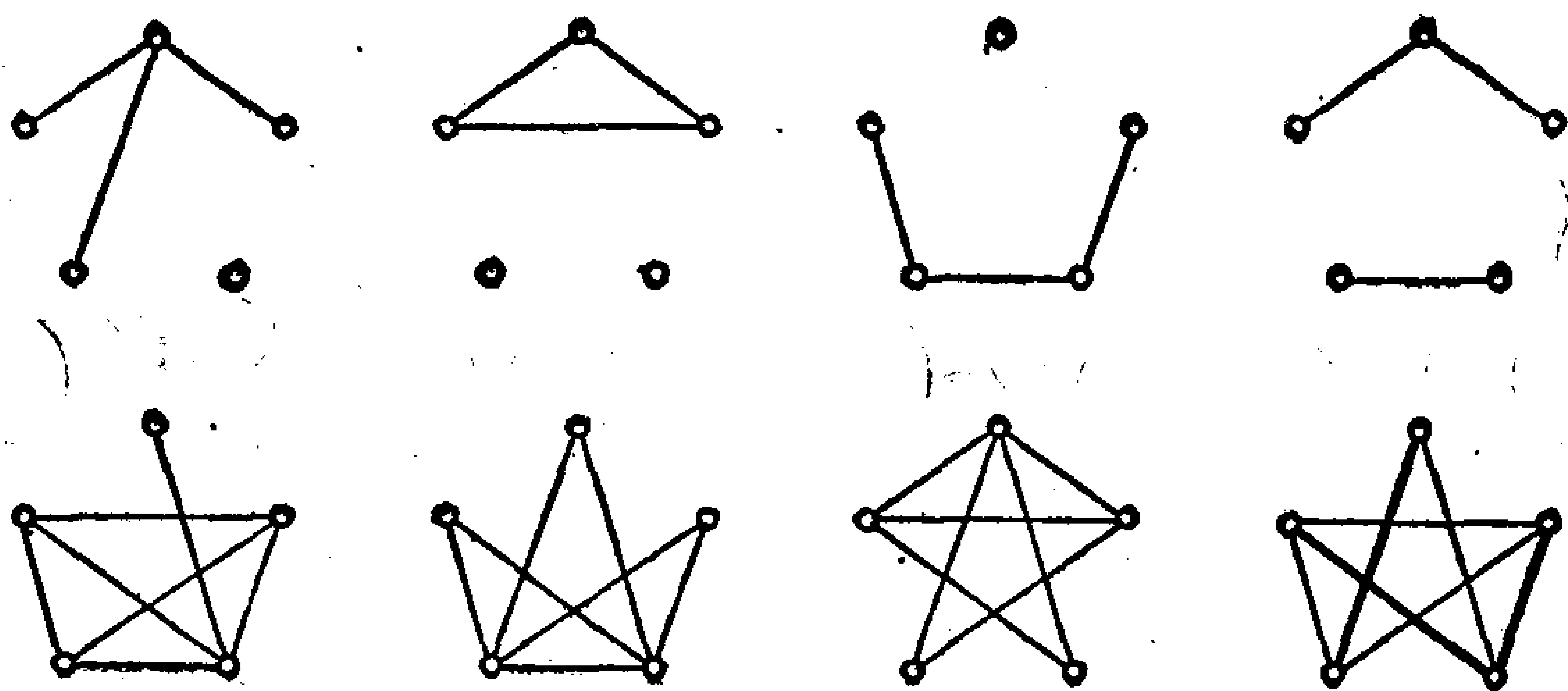


图 9

个图．如果把它们叠合在一起，每一对图就产生一个具有 5 个顶点的完全图，并且没有任何一条边覆盖了别的边．若在一个具有 n 个顶点的简单图 G 上添加了一些边，使它成为一个具有 n 个顶点的完全图，又若从这个完全图上删去 G 的边，就得了另一个(简单)图．这新的图就叫做 G 的**补图**．G 的补图的补图当然是同构于 G 的．因此，也说这些图（G 和它的补图）是**互补**的．具有 n 个顶点的简单图的边数与其补图的边数和等于具有 n 个顶点的完全图的边数．因为，具有 5 个顶点的完全图的边数是 $(5\times 4)/2=10$，所以，具有 5 个顶点与 3 条边的图的补图含有 5 个顶点及 7 条边．显然，具有 n 个顶点的两个图是同构的，当且仅当它们的补图是同构的．因此，练习 12 的第一部分的图的补图就是第二部分的解．

对应于练习 13 的图，由于其边数较多，使人为难，但它的补图则只含有少量的边．因此，同一个问题对于其补图就清楚得多．所求的图的数目等于它们的补图的数目．这样的处理方法在图论中是常用的，而练习 13 的解就是一个例子．由于具有 5 个顶点的完全图中每个顶点的次数是 4，在这里每个图的补图只含有次数至多为 1 的顶点．容易看出，具有此性质的图只有三个：只含孤立顶点的图；含有一条边的图；以及有两条边而此两边又无公共顶

点的图.

现在我们回头来看图 9 中的图. 例如, 在第二行左侧的那个图. 这个图, 还有此图中的任一三角形, 都是具有 5 个顶点的完全图的一部分. 一般地, 若考虑的是一个任意的(不一定是简单的)图G, 从中删去一些边与顶点 (删去一个顶点, 所有与这个顶点相关联的边也一起删去了), 就得到另一个图. 这样的图叫做 G 的**子图**. 若 G' 是G 的子图, 就说G **包含** G'. 有时也说G 本身是G 的一个子图. 其他的每个子图都叫做 G 的**真子图**. 图 9 第一行中的每个图同构于在第二行的对应图的一个子图——这些子图之一位于最后一列的那个已用粗线标出. 类似地, 图 9 的每个图是整个图形(把图 9 看成一个图)的一个子图.

问　　题

14. 试证: 在一个 6 人小组中, 总能找到或者 3 个人互相都认识, 或者三个人谁也不认识谁. 假定认识是相互的.

15. 一个旅游组, 其(任意) 4 人中至少有 1 人, 他以前见过另外 3 人. 试证: 在这种情况下, 在任 4 人中存在 1 人, 他早就见过旅游组内其余的每一人(假定旅游组中至少有 4 人.)

如果, 为解问题 **14** 所画的图中, 边对应于互相认识的关系, 则此图的补图的一条边就表示对应于它的关联顶点的人互相不认识. 于是须证下列命题:

16. 对于一个任意的具有 6 个顶点的简单图, 要么这图本身, 要么它的补图含有一个三角形(即具有 3 个顶点的完全图).

为了证明这一命题, 考虑具有 6 个顶点的任一简单图的任一顶点 a. 其余 5 个顶点的每一个或者在图中或者在它的补图中与

a 邻接．把这 5 个顶点分成两组，即在图中与 a 邻接的那些顶点和在其补图中与 a 邻接的那些顶点．两组中的一组至少含有 3 个顶点．具有这性质的顶点分别记为 b、c 及 d．这表明图 10是G的子图，这里的G表示图或其补图．如果 3 条边：$\{b, c\}$，$\{c, d\}$，$\{b, d\}$中的任一边属于G，则G含有一个三角形，因为这边的两个端点都在G中与 a 邻接．若这 3 边中没有一条属于G，则它们全在G的补图内．由于这 3 边构成一个三角形，命题 16 得证．

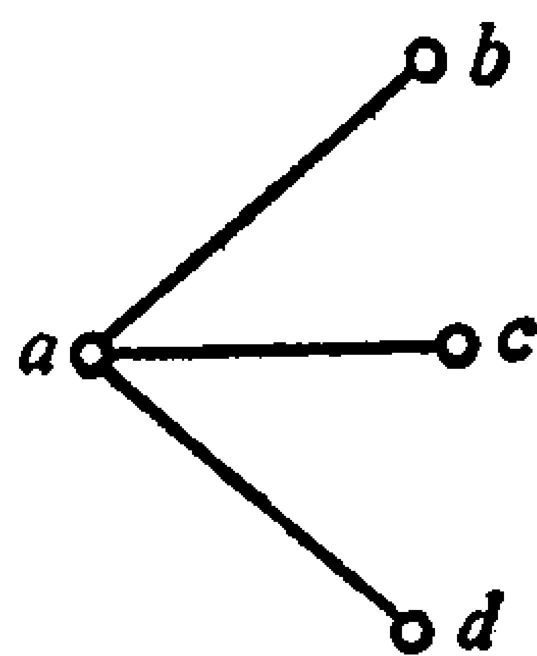


图 10

问题 14 也可以不借助于图而得到解决．不过，若利用图，则推理较清楚、更明确．下一问题也这样证明，我们先不用图来解问题 15；然后，再用“图论的语言”给出问题的实质上相同的解．

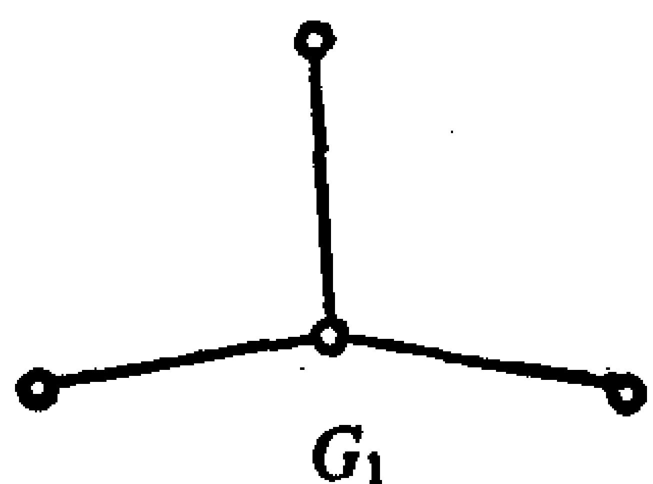
以A与B记问题 15 中旅游组的两名成员，他们以前没见过面．我们可以假定这样的两人是存在的，否则任一成员都将是此问题的一个合适的解．还可以假定存在另一对成员（A或B也可以属于这一对)，他们依然是初次见面，因为，不然除A与B外的任一成员会是合适的解．现在来考虑任意 4 名旅游者，其中至少有两名不同于A与B．如果第二对成员既不含有A又不含有B，那么，这两人：C及D，与A及B一起，由于这 4 人中无 1 人以前见过其余的 3 人，就会与问题的条件相矛盾．因此，不妨假定由A与C组成第二对，因为任何情况下都能用这一方式表示此三人．我们来证明任意不同于A、B与C的那名成员D早就见过所有其他的旅伴．如果D以前未见到过A、B与C之一，则此 4 人就不符合命题的条件．另一方面，如果D不曾见过E(与A, B, C及D不同)，那么考虑A, B, D及E 4 人便又产生矛盾．问题 15 就得证了．

现在，我们讨论与问题对应的图．图的顶点是旅游者，两个顶

点是邻接的当且仅当对应的两人从未见过面，于是，可以把问题15叙述为：

在一个简单图中，找不到这样的4个顶点，其中的任一顶点至少与其余三顶点之一邻接．求证：这图的任4顶点中存在一孤立顶点（假定图中至少有4个顶点．）

我们的证明相应地改变为：由于条件限制，我们的图不能有G_1或G_2那样的子图（参看图11）．可以假定图中至少有两条边：e_1与e_2，否则在任4顶点中会有一个孤立顶点．我们的图没有像G_2那样的子图；因此，边e_1与e_2必有一公共顶点（参看图12）．这样一来，任一不是e_1或e_2的端点的顶点就是孤立顶点，不然，就会存在同构于G_1或G_2的子图．



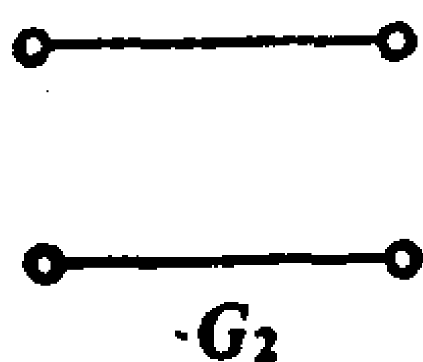


图 11



图 12

画图的要求并不规定对应于边的那些线的具体位置；只是指定了它们的端点．这里要决定的只是两条线（对应于两条边）是否相互交叉，并且，如果交叉，是否存在一个或多个交叉点．所以，图13中的全部3个图解表示的是相同的图．

任意一个无孤立顶点的图可以看作一个运输网络的设计图：图的顶点与边分别对应于城镇与城镇间的公路．如果把图13中3个两两同构的图看成是相同的，那么可能引起一些误解，因为第一个图表示从城镇b根本不能到达a，但第二与第三个图却暗示在它们之间有直接的联络．所以在这个意义下，图13中前一个与后两个是不能等同的．不过，问题容易解决．只需假定对应于边的那些公路是建造成立体交叉的，有如高速公路．

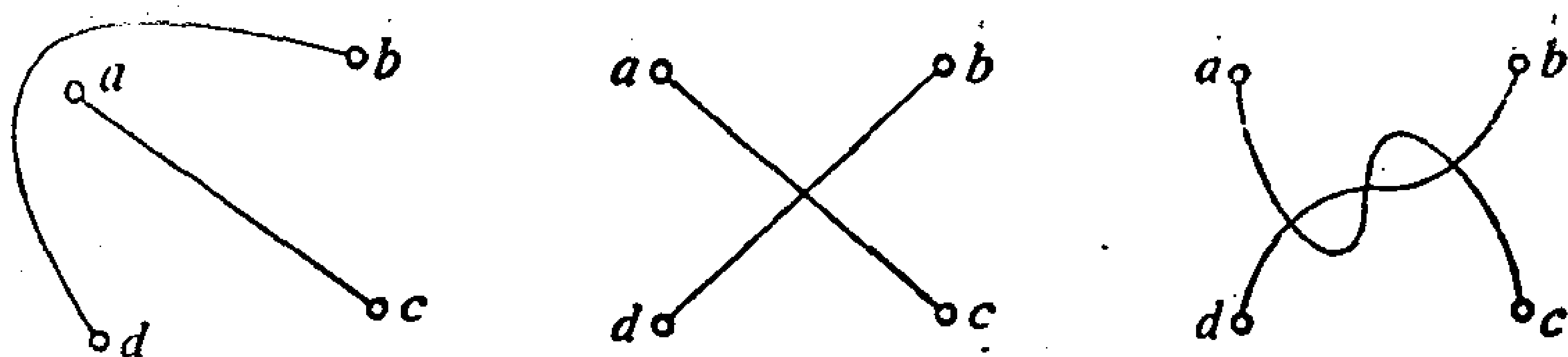
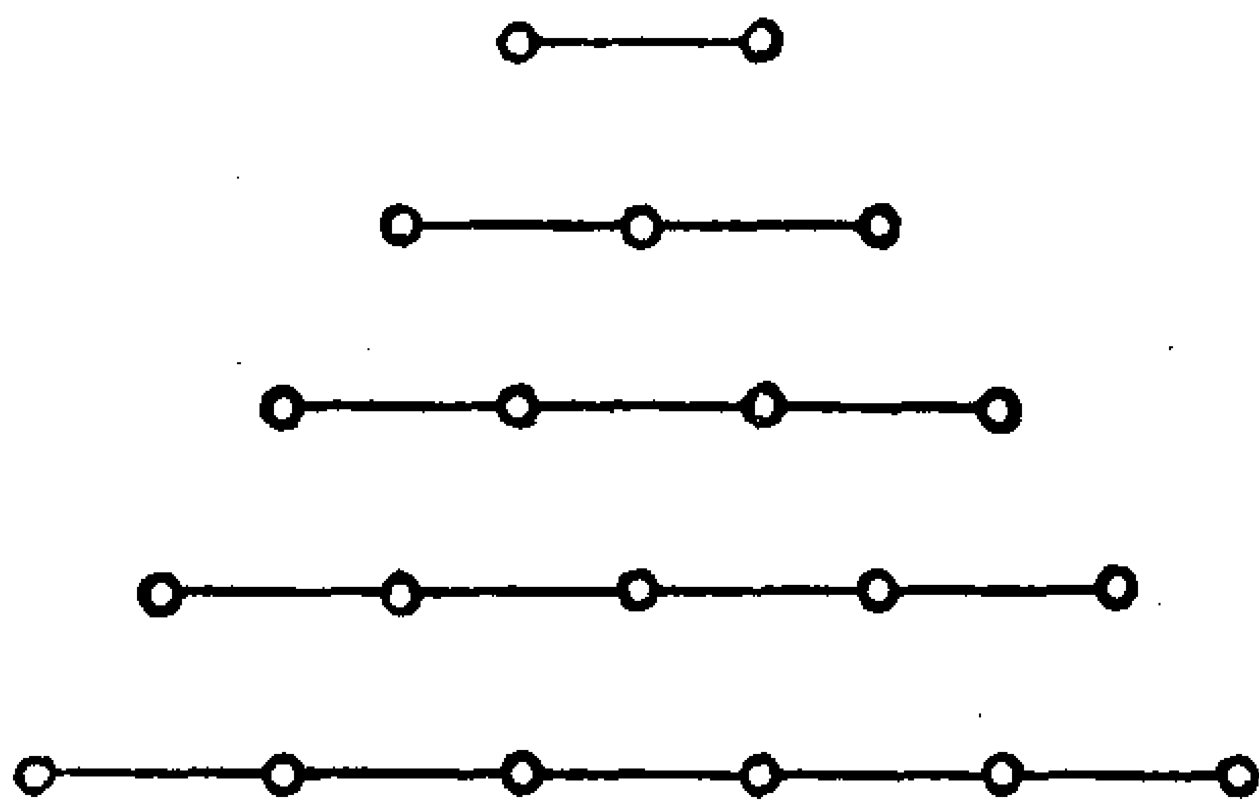


图 13

沿着图 G 的边所对应的运输网络我们离开城镇 a 走向 b. 我们可以经过一些城镇，但每个不多于一次. 让我们指出我们的路，就是，在对应于经过的城镇和对应于 a 与 b 的顶点及边上加以标记. G 的标出的部分 L 也是一个图. 图 L 叫做在 a 与 b 间的或连通 a 与 b 的一条路. 顶点 a（或 b）叫做从 b（或 a）沿着路 L 可以到达的顶点. 顶点 a 与 b 叫做路 L 的**端点**，L 的其余顶点叫做路的**内点**. 显然地，L 的端点与内点在图 L 内的次数分别是 1 与 2.

现在假定在对应于图 G 的运输网络上有一次周游. 我们经过每个城镇至多一次，最后到达出发的城镇. 这一旅行可类似地在图上标出. 标出的子图 K 叫做一个**回路**. K 的每个顶点的次数是2.

一条路或一个回路的长是它的边数. 具有 n 个顶点的一条路与一个回路的长分别是 $n-1$ 与 n. 如果把在一个（几何的）圆周上任选的 n 个点或一个正 n 边形的 n 个点看作一个图的顶点，则两种情形都画出一个长为 n 的回路. 这就是长为 n 的回路往往也叫做 n 边形的原因. 图 14 与15分别表示长为 1, 2, 3, 4 与 5 的路与回路. 从顶点数为 n 的一个回路上删去一条边就产生具有 n 个顶点的一条路. 图 16 表示一个回路与一条路，各有 5 个顶点.


图 14

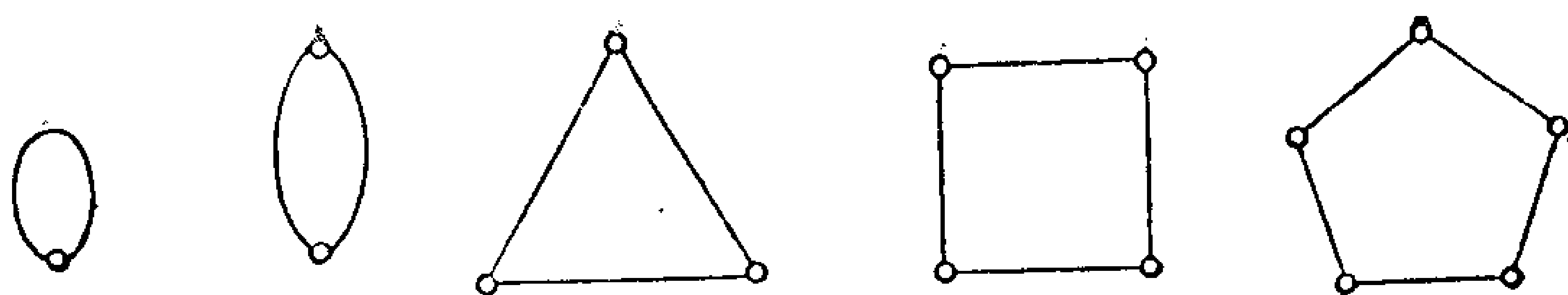


图 15

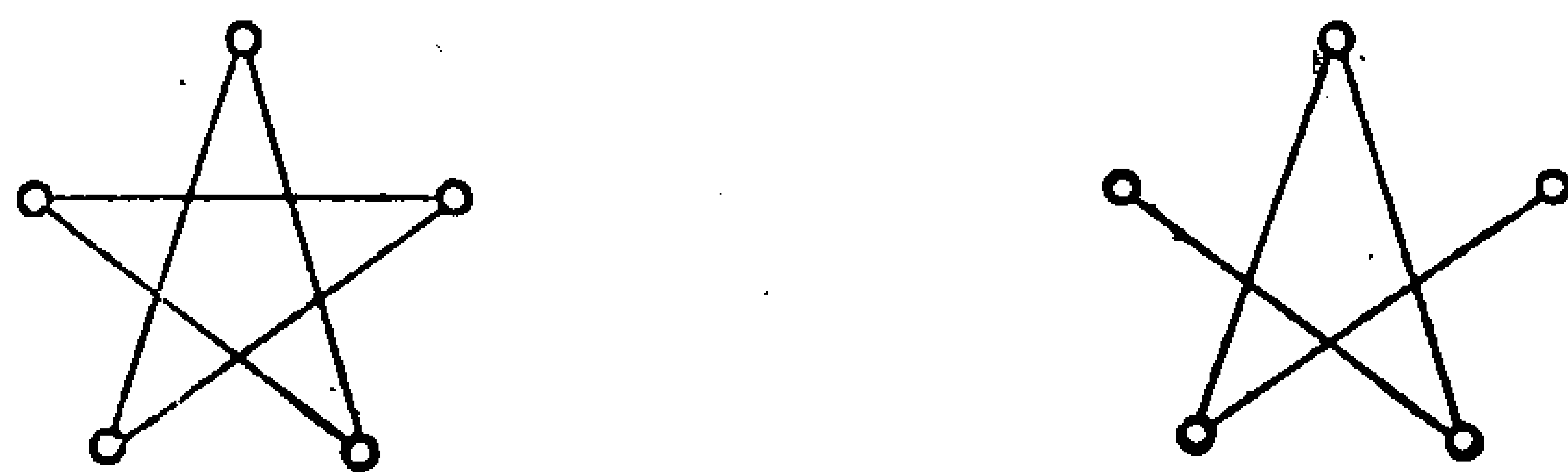


图 16

练　　习

17. 把图 16 看作单一的图，找出全部能从次数为 1 的一个顶点沿一条路到达的顶点.

解出练习 **17**，我们发现，选取次数为 1 的顶点之一，图 16右侧的其余 4 个顶点可以由上述的顶点达到，而到达不了另 5 个顶点（位于左侧的）中的任一个. 称一个图是**连通的**，如果每一对顶点可以由一条路加以连通. 否则，就说它是**不连通的**. 只有一个顶点的图，也说它是连通的. 显然，任一路或任一回路是连通的. 若一个图是连通的，那么与它同构的图也是连通的. 若一个图是不连通的，则所有与它同构的图也是不连通的. 图 13 中的每个图是不连通的. 每个图含有连通的子图，例如，有唯一的顶点或有单一的边加上它的两个端点——后者，自然假定图是有边的.

图G的一个子图，若它是连通的，但添加G的一顶点或边就引出一个不连通子图则称为一个**分支**. 更确切地说，G的一个分支是G的这样一个子图，它是连通的并且不真包含于G的任一连通子图内. 例如，若G是整个图9所示的图，则G包含着13个分支：图形的第一与第二行分别包含9个与4个分支. 一个连通图仅有一个分支(即其本身). 至少有两个分支的图不能是连通的，因为决不能有一条边把属于不同分支的两个顶点加以连通.

问　　题

18. 一个连通图，至少含有两个顶点，其边数小于顶点数. 求证此图含有次数为1的顶点.

19. 设有$2n$个电话交换台. 求证：如果每架电话交换台与至少n个台有直通线路，那么其中的任两个台之间一次通话永远是可能的(或许通过别的交换台).

20. 求证：若在n个电话交换台中的任两者间总可以通话，则至少有$n-1$条直通线路存在着.

为解出问题18，假设连通图G有$n \geqq 2$个顶点. 由于G是连通的，不含任何孤立顶点. 要是它不含次数为1的顶点，每个顶点的次数就会不小于2. 于是，它们的和至少是$2n$，由此G至少有n条边. 因为，根据命题8，顶点的次数和是边数的两倍.

问题19与20以下列方式确定图：图的顶点表示电话交换台，当且仅当对应的两电话交换台间有直通线路时，两个顶点是邻接的. 问题19可改述为下列命题：

21. 若一个简单图至多有$2n$个顶点，并且每个顶点的次数不小于n，则图是连通的.

假定命题不真，即假定图包含多于一个的分支．则存在一个分支，其中至多含有 n 个顶点．这个分支的任一顶点 p 只能与本分支的顶点邻接．因此，$\varphi(p)\leqq n-1$，因为图是简单的；但这个事实是与关于次数的假定矛盾的．所以我们的图只有一个分支，即图是连通的．

我们强调指出，一个具有 $2n$ 个顶点的简单图，其每个顶点的次数至少为 $n-1$．并不充分地保证它是连通的．譬如，若一个图具有两个分支，两者都是顶点数为 n 的完全图，虽然每个顶点的次数为 $n-1$，此图并不是连通的．

如能证明一个具有 n 个顶点的简单的连通图至少有 $n-1$ 条边，问题 **20** 便得以解决．我们利用连通图的下述性质：若把一个连通图的顶点任意地分成两个组，则总有图的边联结不同组的顶点（参看命题 **25** 的证明）．

设 p_1 是具有 n 个顶点的简单连通图 G 的任一顶点．若它不是 G 的仅有的顶点，可设 p_1 属于前述的两组之一．所以 G 含有关联于 p_1 的一条边 e_1．以 p_2 表示关联于 e_1 的另一顶点．若 G 还含有顶点（不同于 p_1 和 p_2），则让 p_1 与 p_2 构成两组之一．因此，必存在 G 的一条边 e_2，它有下列性质：其端点之一是 p_1 或者 p_2，而另一端点既非 p_1 又非 p_2；把后一端点记为 p_3．显然，$e_1\neq e_2$．图 17表明证明的下一步骤．把顶点分成两组的新的安排用虚线指出．继续使用这一方法便得到 G 中的 $n-1$ 条边．从而，命题得证．

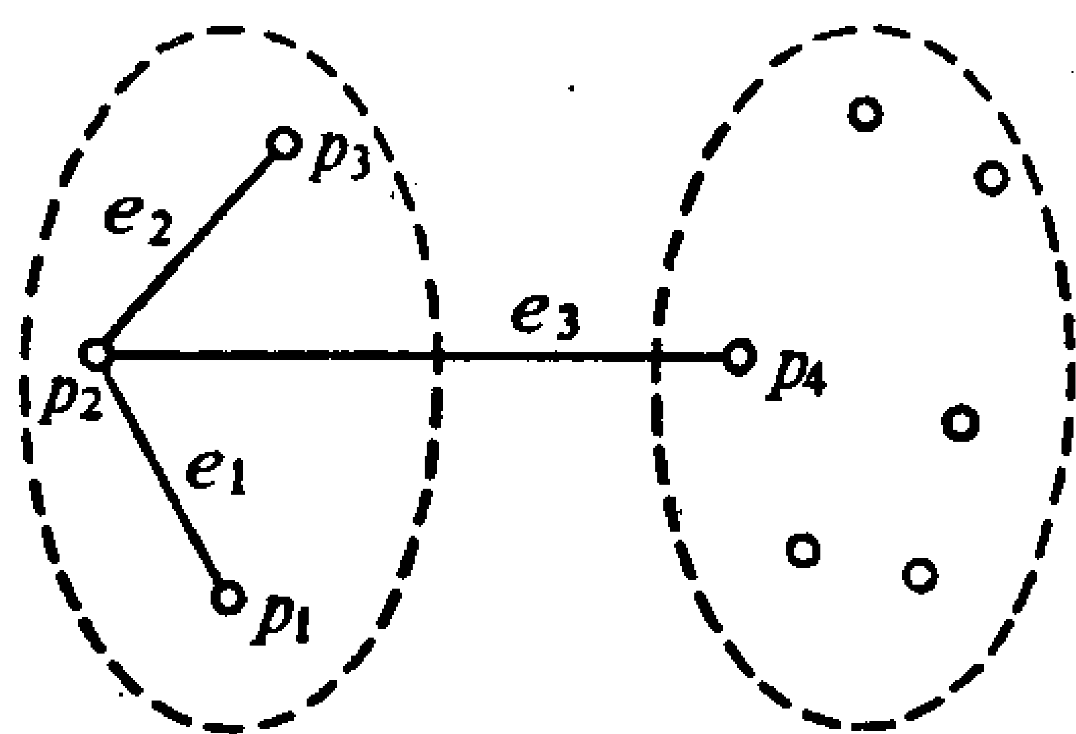


图 17

我们来证明用于解决问题 **20** 的那个命题，在图不是简单图时仍然成立．若 G 是 n 个顶点的连通的图，但不是简单图，则可先删去它的所有的环．所得的具有 n 个顶点的图 G_1 是 G 的一个连通子

图. 若 G_1 的两个顶点不止用一条边联结，则删去一些边使之恰留一条. 所得的图 G_2 是 G 的一个简单的连通子图. 上面已证明的命题表明: G_2 至少含有 $n-1$ 条边. 由于 G_2 的边也是 G 的边，我们已证明了:

22. 具有 n 个顶点的连通图至少含有 $n-1$ 条边.

命题 22 也可以对 n 用归纳法来证. 在 $n=1$ 时命题显然成立. 在 $n\geqq 1$ 时，假定每个顶点数为 n 的连通图至少有 $n-1$ 条边，我们证明每个顶点数为 $n+1$ 的连通图有 n 条边. 设 G 是一个有 $n+1$ 个顶点的连通图，假如 G 不含 $n+1$ 条边，则据命题 18, G 中有一次数为 1 的顶点. 删去这样的一个顶点，以及关联于它的单一的边，就得到一个顶点数为 n，显然也是连通的图. 由归纳假设，这图含有 $n-1$ 条边，连同被删去的那条边，就使图 G 有了 n 条边.

命题 22 已由两种方式得证. 应当指出，若把第一种证明加工得细致一点，同样是一种归纳证明. 在第一种证明中的归纳推理是数学归纳法的一种粗糙的形式.

问　　题

23. 求证: 一个图，每个顶点的次数至少是 2，就含有一个回路.

24. 设一个图包含连通顶点 a 与 b 的一条路，又包含连通顶点 b 与 c 的一条路. 证明 a 与 c 也能沿着一条路互相到达.

为解问题 23，我们从图的任一顶点出发，沿着边走. 每个顶点的次数至少是 2. 所以，若我们到达一个以前未到过的顶点，我们的行程就能继续下去. 一旦我们不能继续我们的行程，就表示

我们来到了一个我们已到过的顶点．与此同时，我们正好有了一个回路．

下面将给出问题 23 的另一解．所用的方法也常用于许多别的问题．

最长路方法 设 L 是图 G 的最长路之一．它的长是 m，它的端点之一是 a．我们考察 G 中关联于 a 的那些边，其中任一边的另一端点必属于 L，不然，把这例外的边添加到 L 上去，就会得到一条更长的路．上述讨论表明，若 G 是简单图，则 $\varphi(a)\leq m$．

让我们回到问题 23．若 G 的每个顶点的次数至少为 2，则 a 还关联于不属于 L 的某边 e，若 e 是环，则它本身就是一个回路．否则，边 e 的另一端点 b（不同于 a）属于 L．L 的子路，连通 a 与 b 的，其本身也是路，与边 e 一起构成一个回路，这就证明了问题 23 的命题．

以 G 表示问题 24 的图．如果我们沿着图 G 的边行走，显然，可以从顶点 a 到达 c：我们先沿着路 L_1 来到 b，再走完连通顶点 b 与 c 的路 L_2．所走过的边的序列，无论如何不一定是一条路．譬如图 18 所示的图中，L_1 与 L_2 分别由实线与虚线指明．不过，此时也存在连通 a 与 c 的一条路：沿着边 $\{a,d\}$，$\{d,f\}$，及 $\{f,c\}$．像这样的一条路在一般情况下，总能按下述方式（利用路 L_1 及 L_2）得到：我们从 a 出发，沿着 L_1 的边走，到达 L_2 的一个顶点（这顶点可能与 a 相重）．（这样的顶点总能找到，因为 b 是同时属于 L_1 与 L_2 的．）从这个顶点我们沿着 L_2 的边一直走到 c．这样一来，就产生了合要求的一条路．

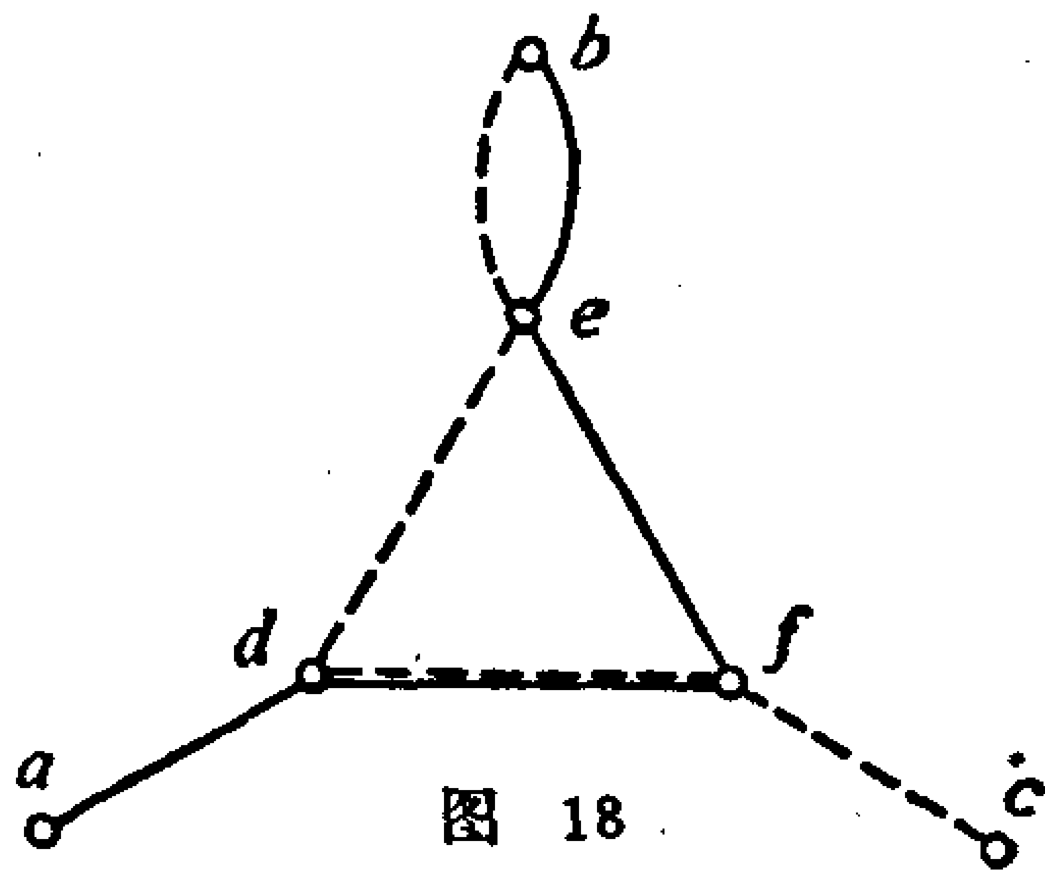


图 18

在问题 24 的图 G 中，具有所求性质的一条路也可按下述方式

选取：从 b 出发沿着 L_2 的边走．在这过程中，我们包括了一些也属于 L_1 的顶点；b 一定属于这些顶点（在我们的图形中，e, d 与 f 也如此）．设 p 是具有这一性质的最后的顶点（在此，$p=f$）．若我们沿着 L_1 的边从 a 来到 p，再从 p 在 L_2 的边上走到 c，就得到一条符合要求的路．

在问题 24 的解中，路 L_1 是连通图 G 的一个子图．考察边 $\{c, f\}$，它的端点恰有一个属于子图 L_1．对于子图 L_2 与边 $\{a, d\}$，有同样的话可说．下列一般的命题成立，稍后还将经常应用它．

25. 若连通图 G 的子图 G'，不含 G 的全部顶点，则 G 中有不属于 G' 的一条边，它的一个端点在 G' 内而另一端点不在 G' 内．

为证这一命题，设 p 与 q 是 G 的两个顶点，其中的 p 属于 G' 而 q 不属于 G'．由于 G 是连通的，总有一条路 L 连通 p 与 q．从 q 出发，沿着路 L 走到 G' 的顶点止，则此路的最后一条边有指定的性质．

下述命题，也很有用，可类似地证明：

26. 若连通图 G 的子图 G'，不含 G 的所有的边，则可以找到一条边，它不属于 G' 但有一端点在 G' 内．

值得注意的是：**路线的最先与最后达到（接触）的顶点**在后几个命题的证明中起着重要的作用．这一方法也被应用于一些其它的问题．

*

练　　习

27. 画出全部具有 4 个顶点的简单图．

28. 找出具有 4 个顶点的那样一些简单图，它们都同构于自己的补图．（这样的图叫做**自补图**）

29. 试证：3、4 或 5 人的小组不一定包括满足问题 14所要求的 3 个人；而多于 6 人的小组就一定包括这样的 3 个人.

30. 一个图，其中每个顶点的次数小于 3，说出它的分支.

31. 具有 8 个或 9 个顶点，每个顶点的次数不小于 3 的不连通简单图有多少个？

32. 画出具有 7 个顶点与 15 条边的简单的不连通图.

问　　题

33. 在 n 个运动队间安排了一项竞赛. 已赛完 $n+1$ 局. 求证存在一个队，它已至少参加过 3 局比赛.

34. 以 A 表示图的顶点的任一子集，设 k 是恰有一个端点在 A 内的那些边的数目. 试证下列命题：若在 A 内的奇次顶点的个数是偶数，则 k 是偶数；否则 k 是奇数.

35. 以一些圆(圆面)覆盖平面上取定的 $2n$ 个点. 试证：若每个圆至少覆盖 $n+1$ 个点，则任意两个点能由平面上的一条线所联结，而这条线整个地被一些圆所覆盖.

36. 求证：一个连通图，若其中每个顶点的次数是 2，则是一个回路.

37. 试确定是否存在一个不连通的简单图，其顶点数不大于 6，且每个顶点的次数是 2.

38. 有多少顶点数为 6 的简单图，其每个顶点的次数是 2 (或 3)？

39. 有多少简单图，其顶点数是 5，而其边数分别是 4 或 6？

40. 有多少顶点数为 5 的自补简单图？

41. 有多少顶点数为 5 的简单图？

42. 求证：对于一个任意的简单图，此图或其补图是连通的.

43. 一个连通图，含有长为m的路，不含任何其长大于m的路. 求证:任两条长为m的路有公共顶点.

44. 求证: 一个无环的图,若每个顶点的次数不小于3,就含有长为偶数的一个回路.

45. 一个图的每个顶点的次数不小于3. 求证不存在大于2的整数,它能整除每个回路的长.

第二章　树与林

第一章的命题 20 也可叙述为：为要联络 n 个电话交换台，至少需要 $n-1$ 条直通线路．现在的问题是描述使直通线路数为极小的通讯网络．用图论的术语来说就是要刻画具有 n 个顶点和最小边数的连通图的特征．在证明第一章的命题 20 的过程中，已经证过：具有 n 个顶点的连通图至少含有 $n-1$ 条边．

练　　习

1．当 $n=1,2,3,4,5,6$ 与 7 时，画出全部具有 n 个顶点与 $n-1$ 条边的连通图．

2．当 $n=1,2,3,4,5,6$ 与 7 时，画出全部具有 n 个顶点而不含回路的连通图．

当 $n\geqq4$ 时，练习 1 有多个解．例如，若 $n=6$，就有如图 19 所列的解．提示：这时就最长路的长为 5、4、3 与 2 等情况来求解．

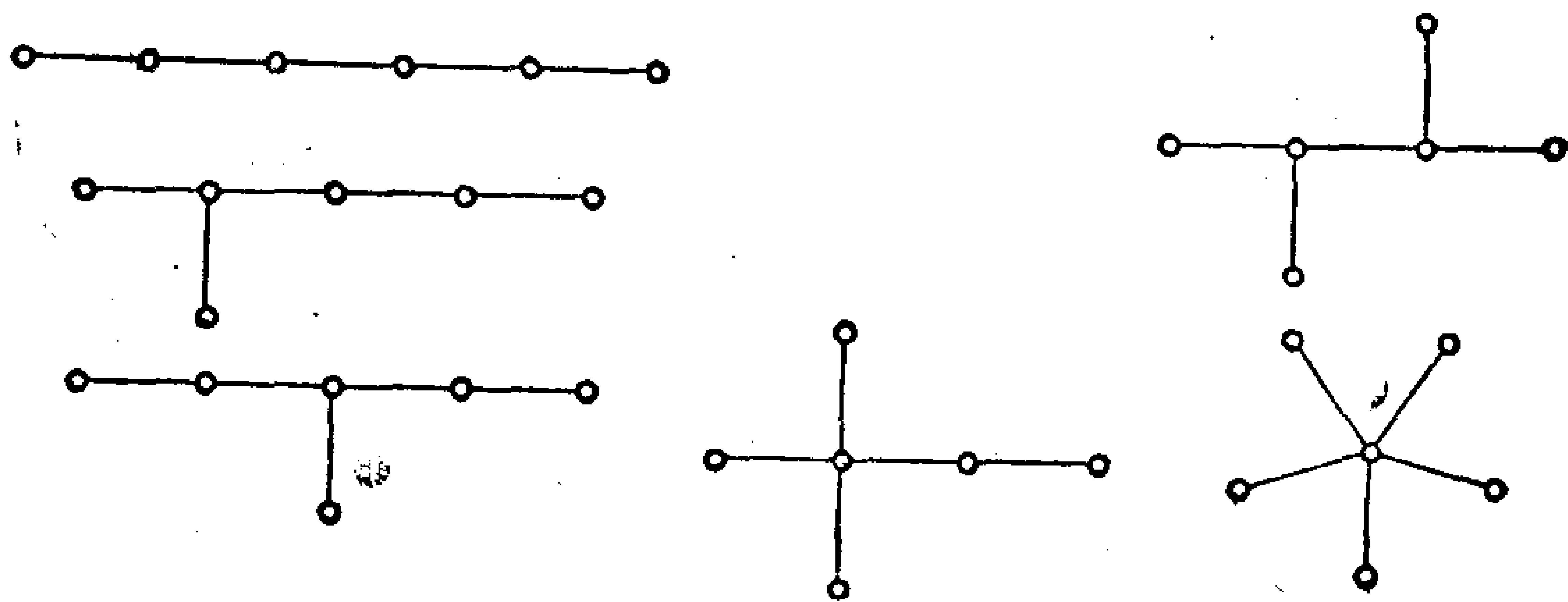


图　19

注意：练习 2 与练习 1 有相同的解．一个无回路的连通图像树枝．如果一个图连通且无回路，就称它为树．

问　题

3．求证：从一个连通图的任一回路删去一条边后所得的图仍是连通图．

4．求证：具有 n 个顶点及至少 n 条边的图含有一回路．

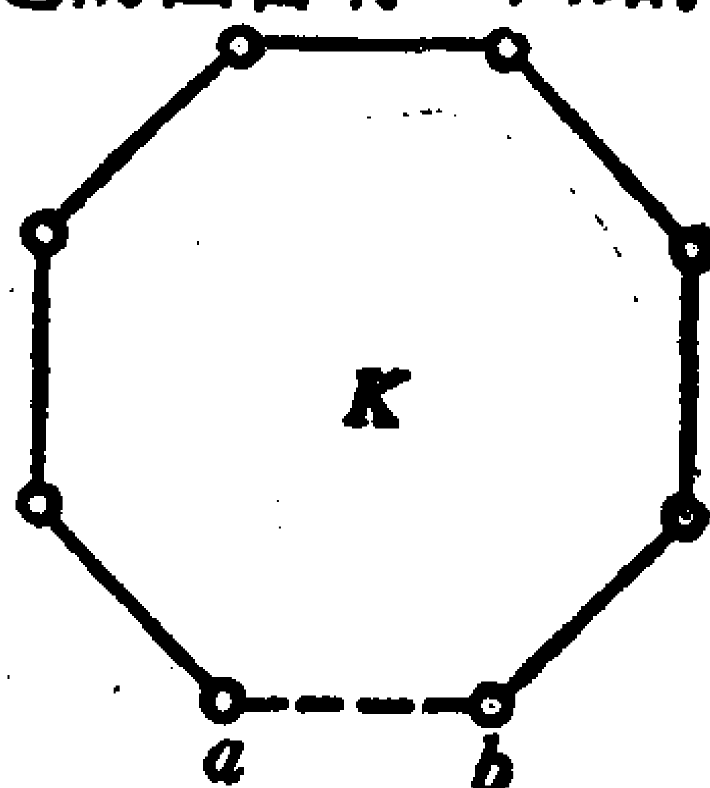


图 20

在解问题 3 时，不妨假定删去的边不是环．因为删去一个环并不改变图的连通性．现在，设连通图 G 中被删去的是回路 K 的边 $\{a, b\}$（参看图 20）．沿着（G 内的）这条边我们可以从 a 到 b（或从 b 到 a）．但沿着 K 中其余的边我们在删过以后的图中也能由 a 到 b（或反之）．如果这路线包含回路，则应把回路省略掉．由于任意一对点之间的边列总含有一条路，所以新图也是连通的．

由问题 3 可知，具有 n 个顶点及 $n-1$ 条边的连通图不包含任何回路；如果含有回路，从回路上任删一边就得到具有 n 个顶点及 $n-2$ 条边的连通图，但这事实与已知的下述事实是矛盾的：n 个顶点的连通图至少有 $n-1$ 条边．因此，练习 1 的解，对任意 n，简化了练习 2．于是，下述命题成立．它也是具有极小边数的连通图的典型性质：

5．具有 n 个顶点及 $n-1$ 条边的连通图是树．

问题 4 的命题，对 n 用归纳法证明．当 $n=1$ 时，命题显然成立．我们假设对于某 $n\geq 1$，具有 n 个顶点与至少有 n 条边的每个图含有一个回路，须证具有 $n+1$ 个顶点与至少 $n+1$ 条边的

图G也含有一个回路．我们用最长路方法来证(参看第一章)．若G中最长路之一的一个端点，其次数大于1，则图中显然存在一个回路．否则可从G删去一个次数为1的顶点及与之关联的单个的边．则新图含有n个顶点与至少n条边，并且由归纳假设含有一回路．由于这回路也含于G，于是命题得证．

因为每个具有n个顶点的连通图至少有$n-1$条边，问题**4**表明每个具有n个顶点而无回路的连通图，恰有$n-1$条边．这样，练习**2**解中的图是树，对于每个n，满足练习**1**的条件．所以我们有：

6. 具有n个顶点的树有$n-1$条边．

注意：命题**4**也可用来解第一章的练习**23**，因为，如果图中每个顶点的次数不小于2，具有n个顶点的图至少含有n条边．

一个链烷烃分子由n个碳原子与$2n+2$个氢原子组成：



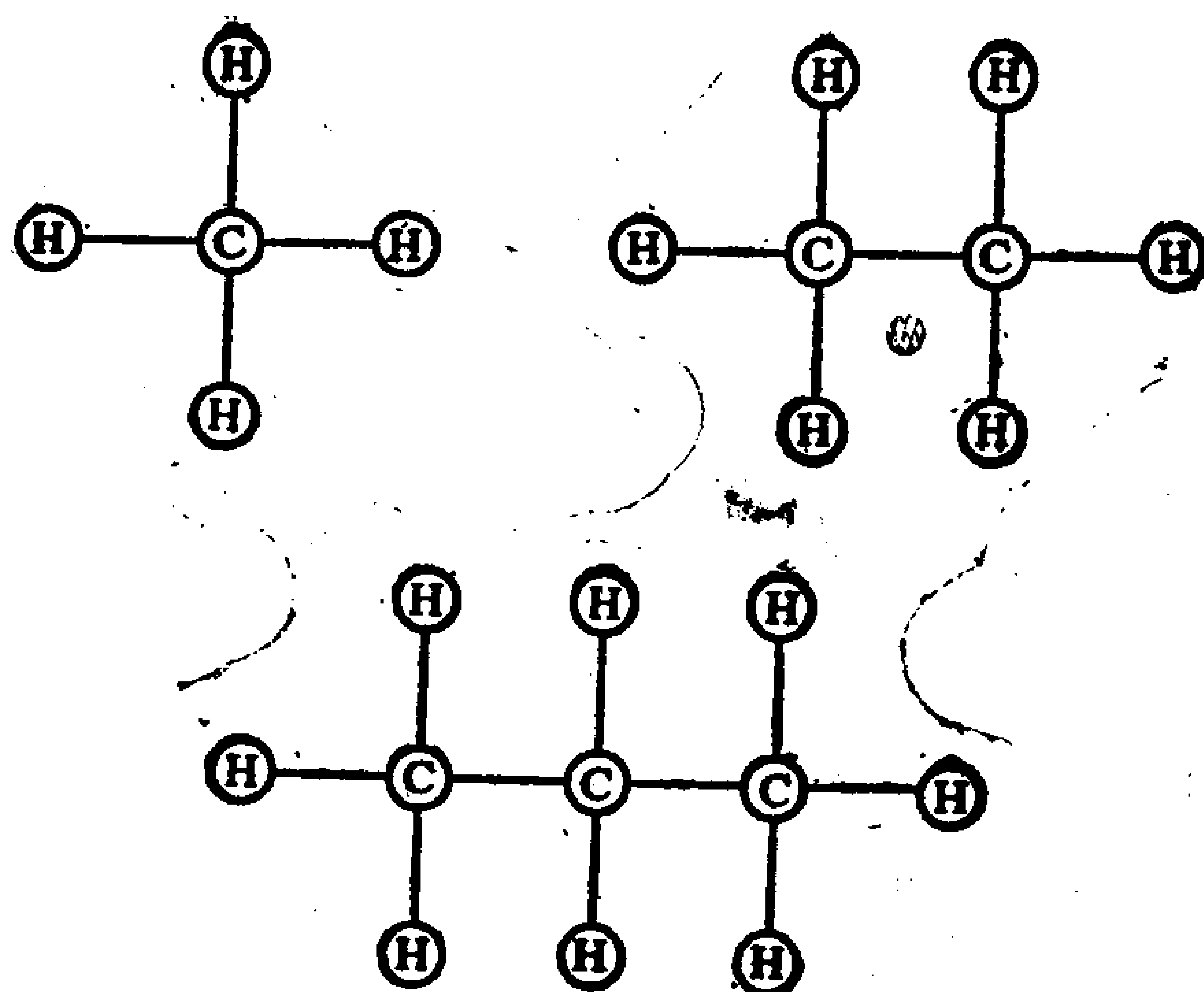
$$C_nH_{2n+2}\qquad(n=1,2,\cdots).$$

它们的分子模型可以用连通图来表示．按照化合价，碳、氢原子所对应的顶点分别有次数为4与1．

练　习

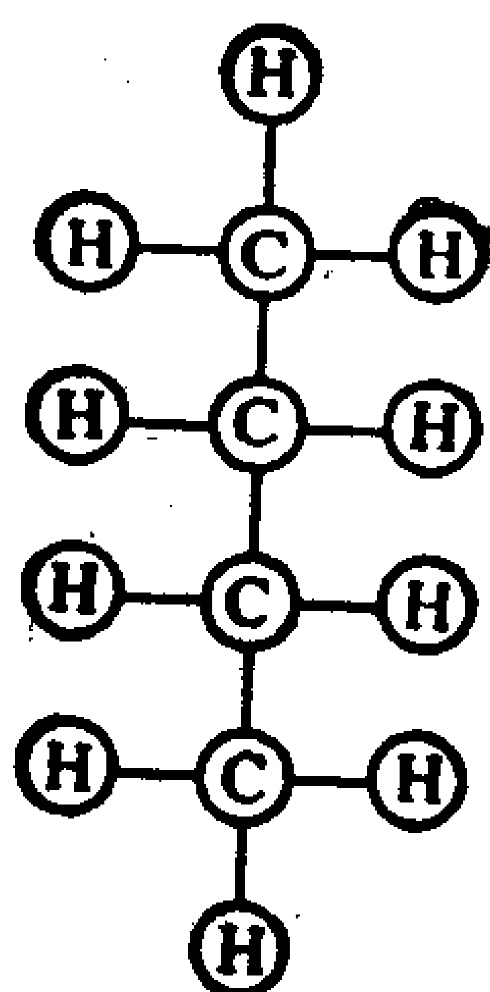
7. 当$n=1,2,3$及4时，画出图，使它对应于链烷烃分子模型．

当$n=1,2,3$时，每种情况找到唯一的图：分别是甲烷、乙烷、丙烷的模型，如图21所示．元素的化学符号写在对应于顶点的小圈里．当$n=4$时，存在两个图．对应的化合物叫同分异构体．图22表示丁烷的两个同分异构体(当$n>4$时，就有更多的同分异构体)．

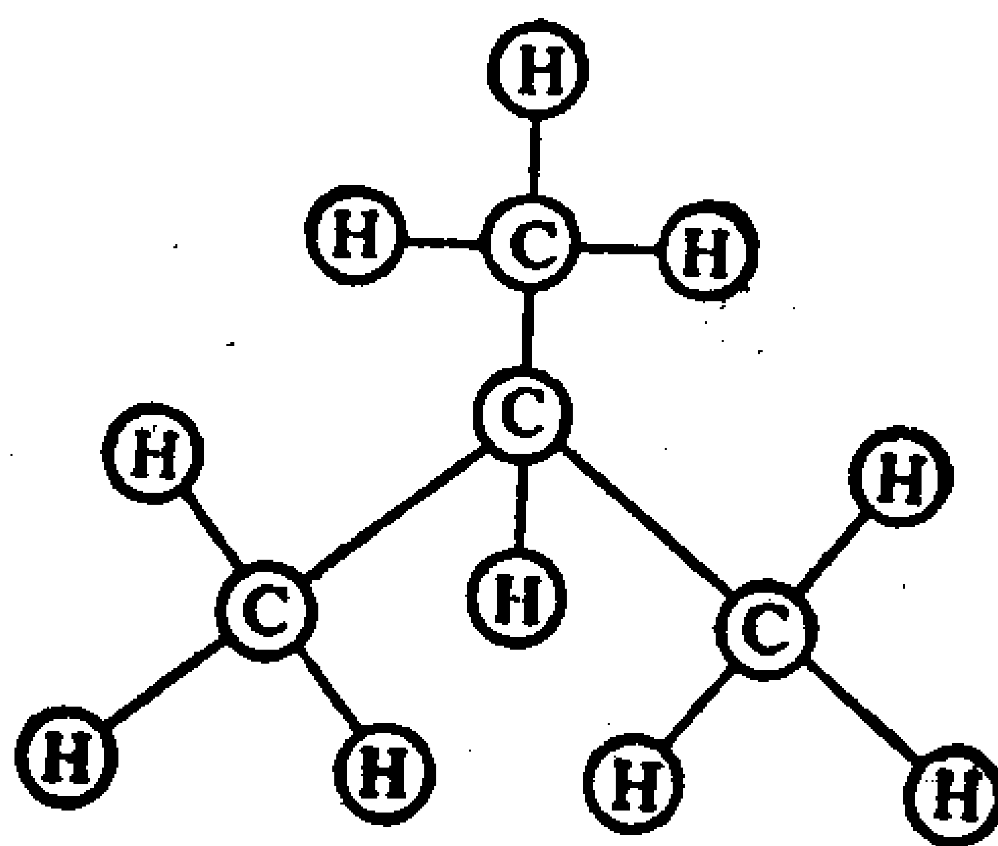


丙烷

图 21



正丁烷



异丁烷

图 22

问 题

8. 求证：链烷烃的通式表示的是脂肪族化合物，即其分子模型是树。

9. 求证下述命题：若无环的图仅有一个顶点或者每两个顶点

间有唯一的一条路使它们连通，则该图是树；反之，一棵树，不含任何环，并且要么含单一的顶点，要么每两个顶点间有唯一的一条路连通.

10. 考虑平面上(或空间内)的若干个点，其各对点间的距离互不相等. 从每个点到离本身最近的点画上直线段. 求证此时不会出现封闭的多边形.

问题 8 中链烷烃分子 C_nH_{2n+2} 的图的模型有 $3n+2$ 个顶点，次数为 4 与 1 的顶点数分别有 n 及 $2n+2$ 个. 由于一个图的次数和为其边数的两倍(第一章命题 8). 所以，上述图的边数为:

$$\frac{1}{2}(4n+2n+2)=3n+1,$$

恰好比顶点数少 1. 又对应于分子模型的图是连通的，据命题 5，这样的图是树.

我们来解问题 9. 假设图 G 无环，不止一个顶点，任两顶点间只以一条路连通，则 G 是连通图，且不含单个边的回路. 但若 G 内有一更长的回路，则回路的任两顶点 a 及 b 把回路分成两条路，它们都连通 a 与 b，矛盾于题设.

反之，设 G 是树. 由于树不含回路，G 显然无环，因为环本身就是一个回路. G 是连通的，所以 G 或者只含单个顶点，或者其中任两顶点间有 G 中的一条路连通. 假设在 a 与 b 间至少存在两条路 L_1 及 L_2. 这些路间至少有一条边不同. 从 a 出发，沿着路 L_1 及 L_2. 一定能找到一个顶点 c，两条路在此分叉(即两条路的下一条边是不同的). 顶点 c 与 a 可以相重. 我们从 c 起把 L_1 与 L_2 的边标出，一直到它们的下一个公共顶点. 这样的公共顶点一定能找到，它可以是 b. 标出的边组成 G 的一个回路，这与假设矛盾，问题 9 得解.

把问题 10 中的点与直线段分别看作是图G的顶点与边. 这图的每个回路, 同时是一个多边形. 因此, 若命题成立, 图必不含回路. 不过, 只证了G不含回路是不充分的, 因为即使是G内不存在回路, 仍可能产生封闭的多边形. 比如图 23中 局限于阴影部分是一个封闭的多边形(显然, 这里问题的条件并不满足). 要是一个封闭的多边形不等同于G的任一回路, 则多边形必然有一边不是G

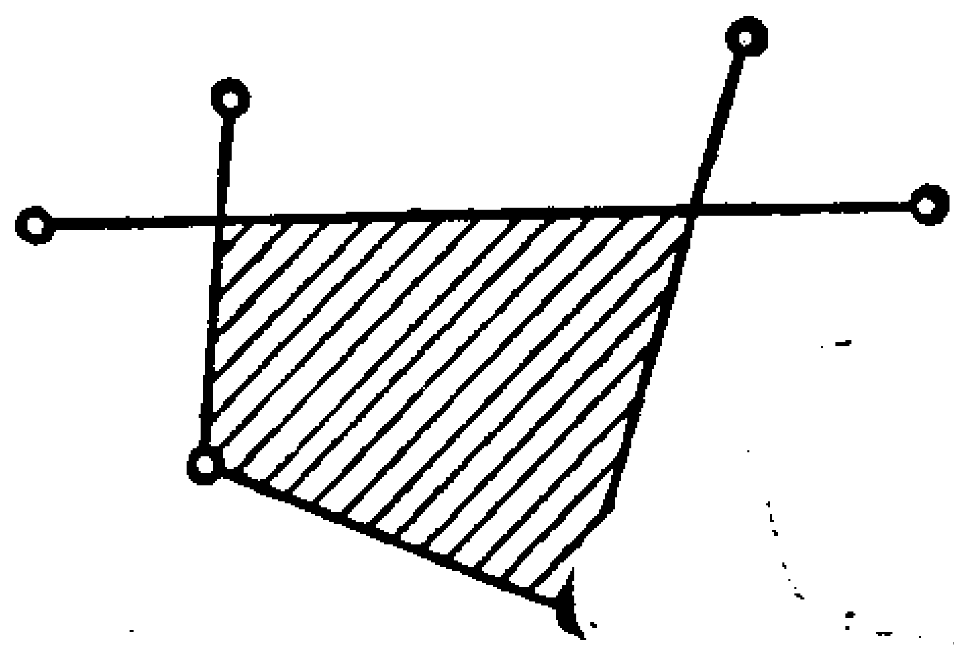


图 23

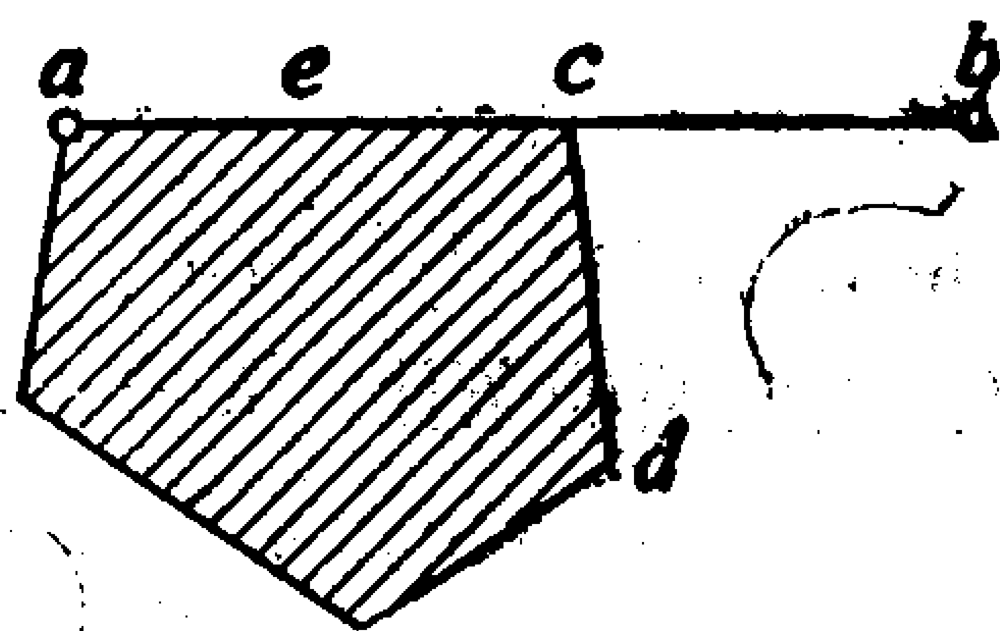


图 24

的边, 即有一边延长后才能成为G的 边. 设图 24 中的边 $e=\{a, b\}$是这样的一条边. 多边形的顶点 c 一定不是图的顶点, 因为, 如果它是图的顶点, 则线段 ab 就与条件不符(即在 c 与 a 间的距离及 c 与 b 间的距离都小于 b 与 a 间的距离). 这事实表明线段 ab 与 cd 相交. 所以: 若一个封闭的多边形不等同于G的任一回路, 就存在相交的两线段.

现在, 我们来证根本不存在相交的线段. 我们作出相反的假设: 假设联结 a_1与 b_1 的线段与联结 a_2 与b_2 的线段有公共点 p (参看图 25). 以 h_1 与 h_2 分别表示从 b_1 与 b_2 到 p 的距离. 我们要证 $h_1<h_2$. 如若不然, 即 $h_1\geqq h_2$. 这关系表明线段 a_1b_1 至少有a_1p 与 pb_2 一起那么长. 但这后两线段的长度和大于 b_1 与 a_1 间的距离. 因为两点间的联线以直线段为最短, 而 a_1 与b_2间的距离小于 a_1 与 b_1 间的距离; 这是一个矛盾, 因为直线段是画在 a_1 与 b_1 间的. 所以, 我们有 $h_1<h_2$. 在这一讨论中, h_1 与 h_2 所起的作用是无差别的. 同样的推理也可证明 $h_2<h_1$. 于是, 所产生的矛盾证明了线

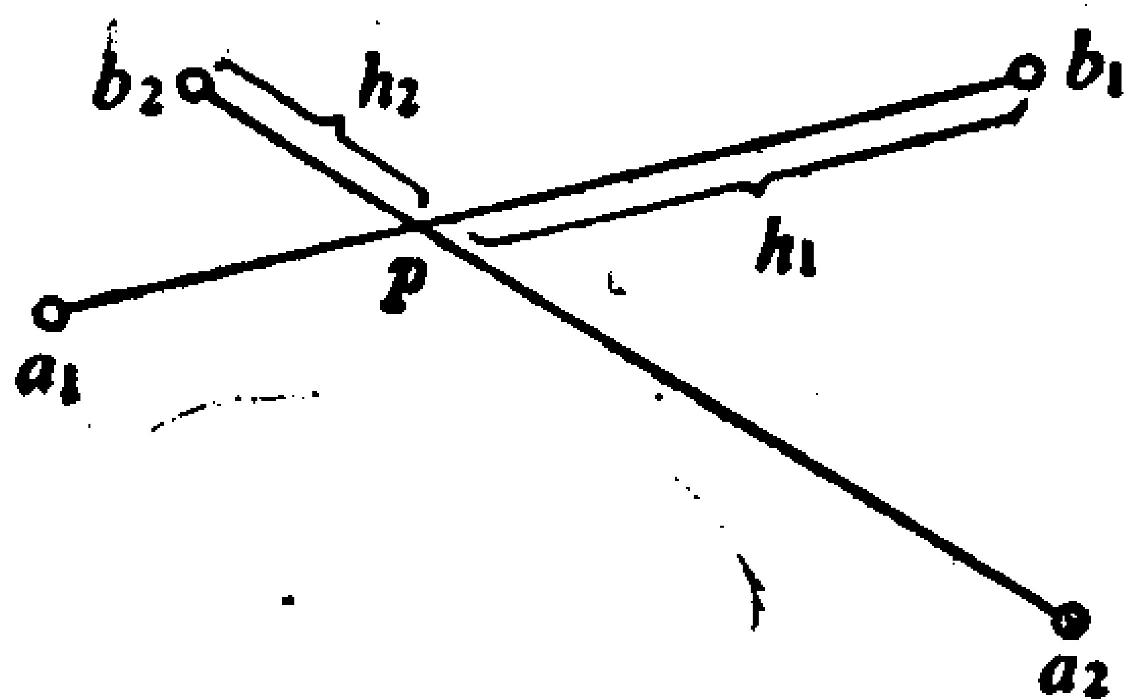


图 25

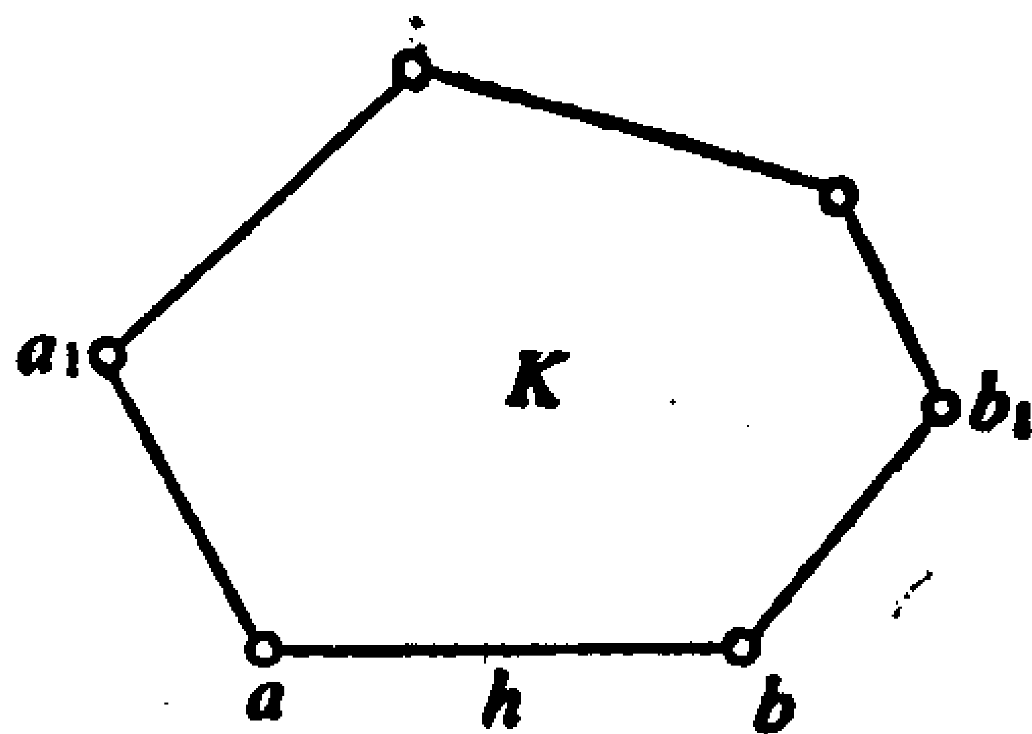


图 26

段必互不相交，即任一封闭的多边形必为G的回路.

最后，证明G不含回路. 我们作相反的假定，设K是G的一个回路. 据问题的条件，K有不同长度的边. 设其最长边为$\{a, b\}$，其长度为h，在画出这条边时，一定必须从a或b开始(看图 26)，但a与a_1间的距离及b与b_1间的距离都小于h. 因此边$\{a, b\}$根本不能被画出来. 因此，不可能有回路存在. 这就证明了问题 10 所述的命题.

根据这问题的条件画出的图，不含回路，但它们不一定是树(也可能存在不连通的图). 例如，考虑 5 个点: 它们分别表示伦敦、剑桥、牛津、曼彻斯特及利物浦. 图 27 表示对应的图. (在图上只标出各城市的为首的字母.)

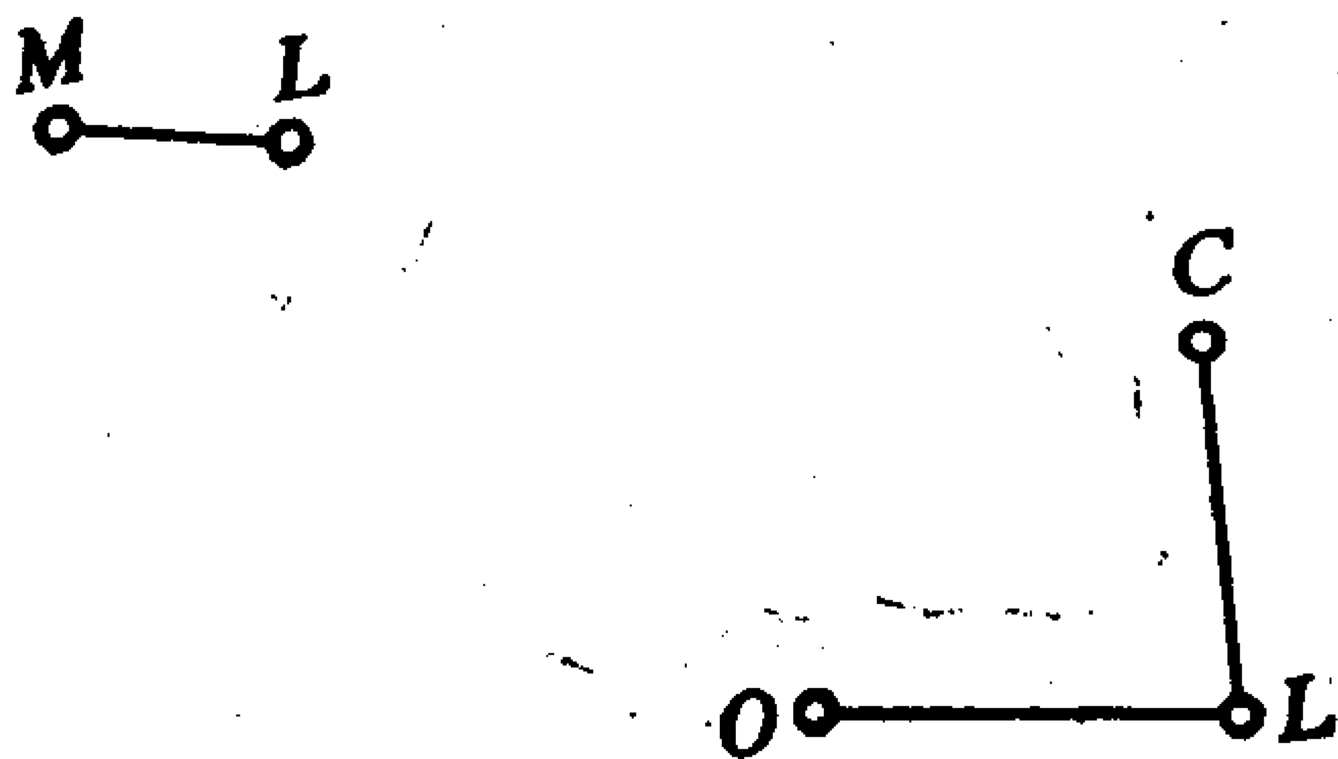


图 27

若一个图不含回路，就称此图为林. 一个林的分支显然是树(一个连通的林本身是树). 与问题 10 有关的各图都是林.

练　习

11. 在图 28 所示的图中，找出一个连通子图，它含有图的每个顶点，但不含回路.

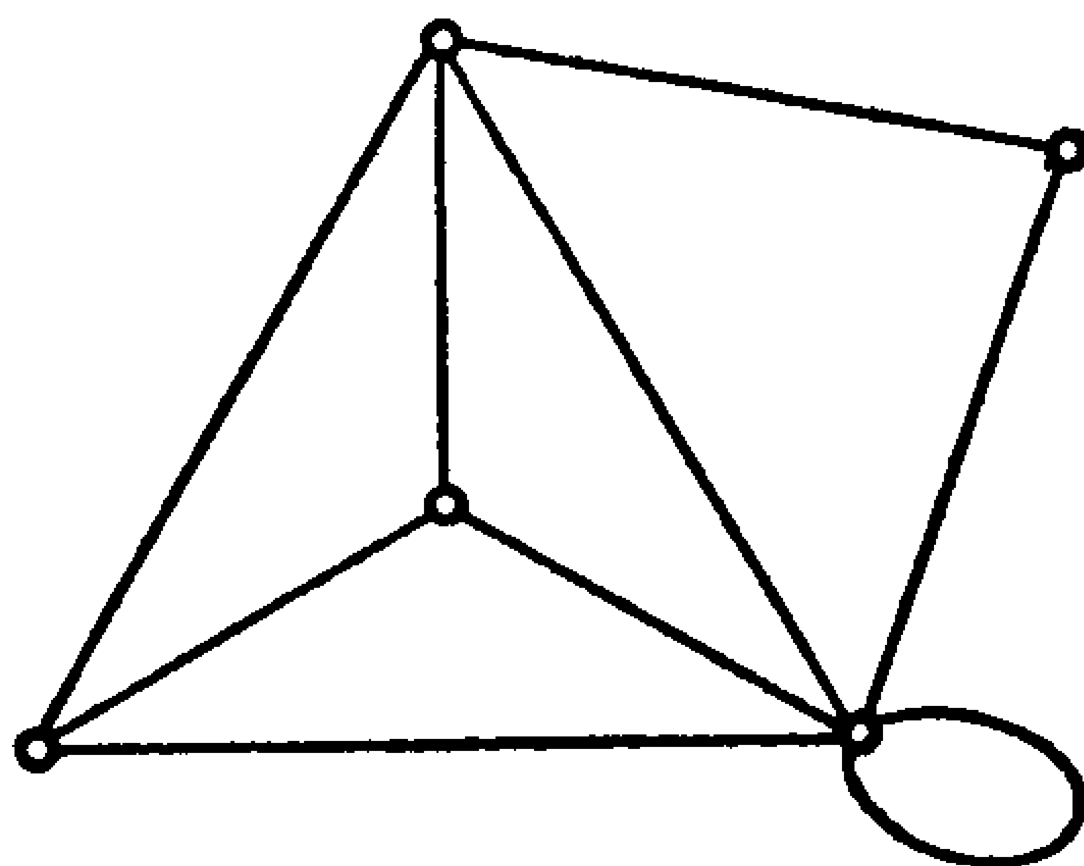


图　28

12. 在图 28 所示的图中，有多少个回路?

问　题

13. 求证：具有 k 个分支与 n 个顶点的一个图，至少有 $n-k$ 条边.

14. 求证：具有 k 个分支、n 个顶点与 e 条边的图至少有 $e-n+k$ 个回路.

15. 沿用前两个问题的记法，求证：若 $e-n+k=0$，则图是林；反之，若图是林，则有 $e-n+k=0$.

练习 11 可利用问题 3 很容易地解决. 从每个回路删去任一边. 若所得的图仍含有回路，则删去回路的另一边，如此下去. 最后可能出现的情形之一如图 29 所示；其中的虚线表示被删去的边.

连通图 G 的子图 F 叫做一棵生成树，如果 F 是树，并且包含 G 的每个顶点．不含于 F 的 G 的边叫做 F 的弦或连接线．

解练习 11，结果是生成树（图 29）．图 29 中的虚线是这生成树的弦．由上述获得生成树的方法，引出下述的一般命题：

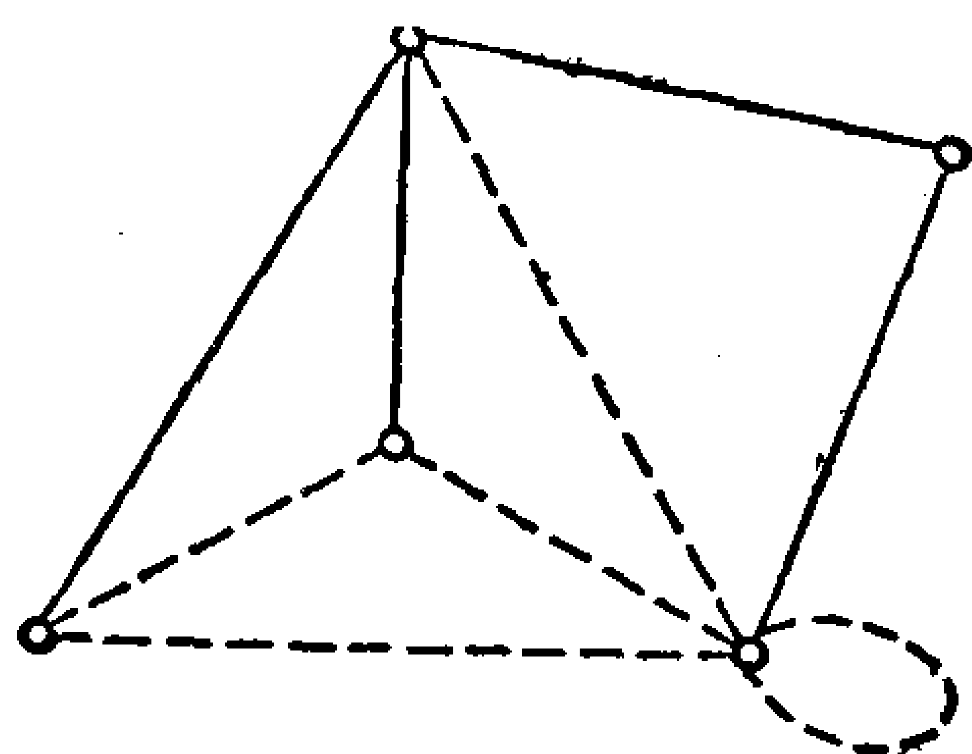


图 29

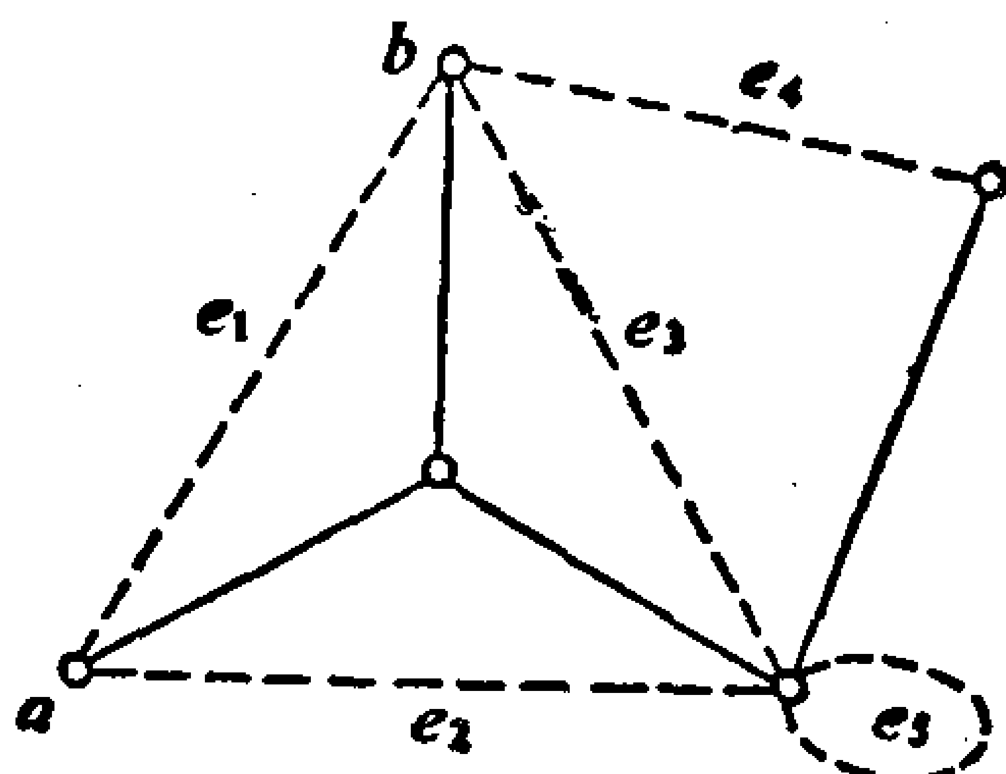


图 30

16. 每个连通图有一生成树．

树显然恰有一棵生成树，即其本身．另一方面，若连通图由一个或几个回路组成，则它有更多的生成树．例如，图 30 表示图 28 中的图 G 的生成树 F，它不同于图 29 所示的生成树（两个生成树，由 G 的不同边组成，就认为它们是不同的，虽然它们是同构的．此外，在 G 中也容易找到不同构的生成树．）下列边是 F 的弦：e_1、e_2、e_3、e_4 与 e_5．e_1 的两个端点 a 与 b（与 G 的任何顶点一样）都属于 F．参看问题 9，顶点 a 与 b 恰由 F 内的一条路所连通．这条路与弦 e_1 合成一个回路．一个环就是一条弦，其本身组成一回路．这些事实在一般情况下也是正确的，可表述如下：

17. 设 F 是连通图 G 的一棵生成树，而 e 是 F 的一条弦．则刚好存在 G 的一个回路，它含有边 e，而不含有 F 的任何别的弦．

一个回路叫作关于 F 的**基本回路**，若它恰含有 F 的一条弦．这些回路的全体叫做关于 F 的**基本回路组**．图31以分解形式表出图 30 中的图关于 F 的全部基本回路，尽管图还包括别的回路．利用

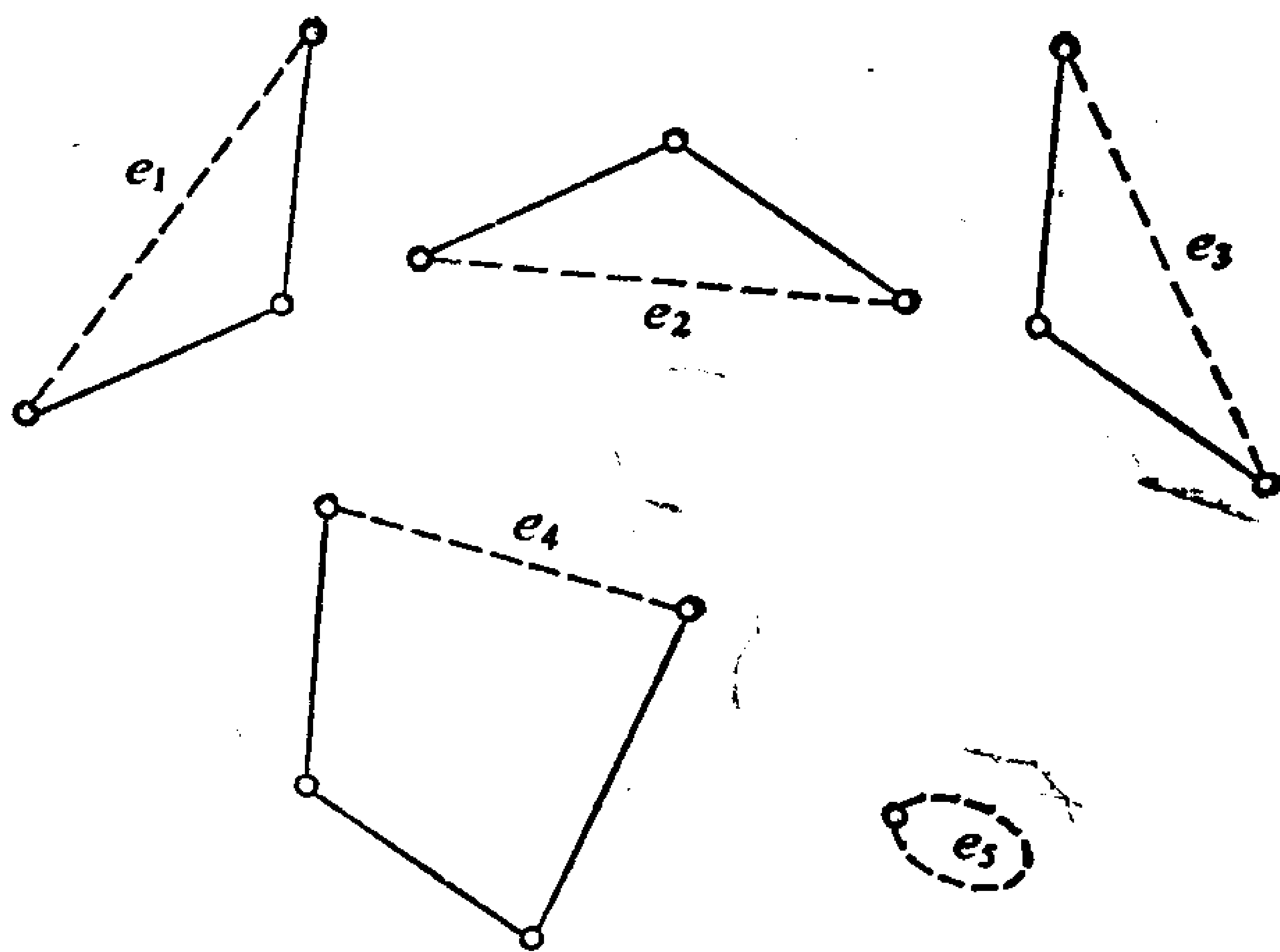


图 31

问题 9 的命题，这些回路可由考虑下述问题而轻易地找出：一个图中有多少个回路是分别含有2, 3, …条弦的．下列的数对表示那么一些弦对的下标，这些弦对是与F的一些边合成回路的：(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)．类似地，含有三弦的回路可用三下标集来表出：(1, 2, 3)及(1, 2, 4)．加上 5 个基本回路．练习 12 便得解答：图 28 由 13 个回路组成．

据命题 6，具有 n 个顶点及 e 条边的连通图G的生成树一律由 $n-1$ 条边组成；因此，任一生成树的弦数为 $e-(n-1)=e-n+1$．据命题 17，G的每个基本回路组有 $e-n+1$ 个回路．同时，问题 13 及 14 当图是连通时，即$k=1$ 这一特殊情况下，得到解答．G的基本回路数并不总是大于 $e-n+1$ 的．例如，图 32 的图，由

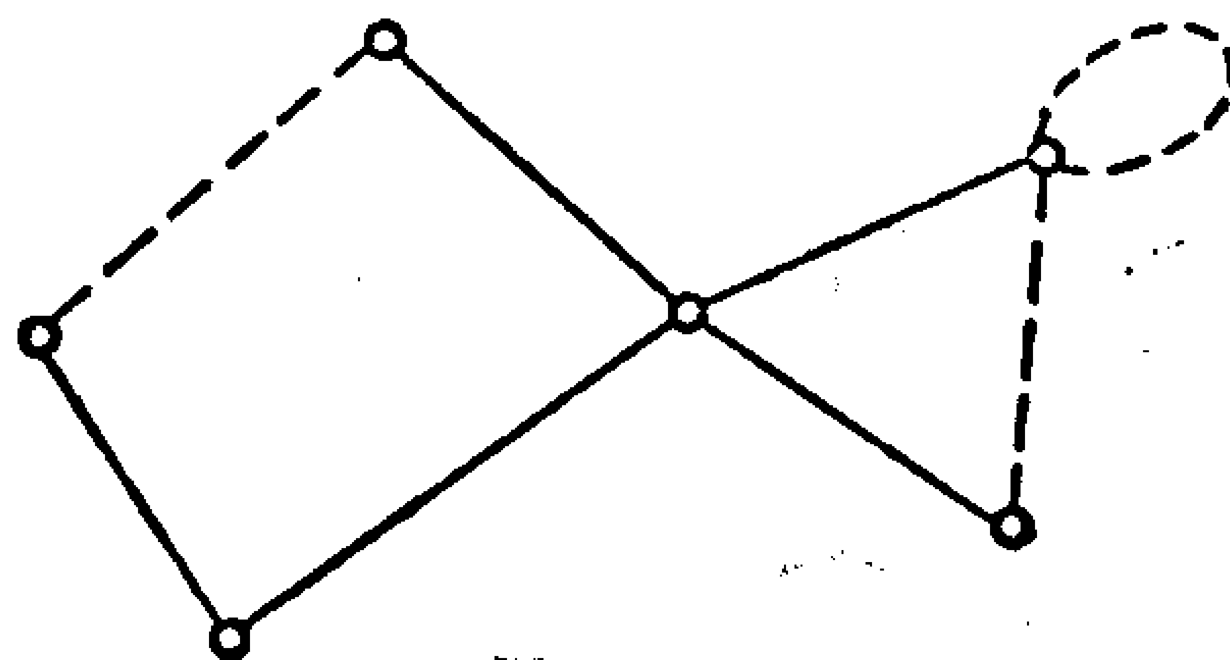


图 32

3个回路组成，这些回路都是关于由实线指出的生成树的基本回路．由于 $e-n+1=3$，图的全部回路是基本的．

如果我们从一个非连通图 G 的每个分支取一棵生成树，那么，我们就得到一个林，我们把它叫作 G 的**生成林**．以 n 与 k 分别记 G 的顶点数与分支数．以 F_i 记分支的生成树($i=1, 2, \cdots, k$)，它们合成具有 e 条边的一个生成林．最后，设 n_i 与 e_i 分别是 F_i 的顶点数与边数，则

$$n_1+n_2+\cdots+n_k=n,$$
$$e_1+e_2+\cdots+e_k=e,$$

又，根据命题 6，

$$e_1=n_1-1,$$
$$e_2=n_2-1,$$
$$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$
$$e_k=n_k-1.$$

k 个方程相加，再应用前面的两个等式，有

$$e=n-k.$$

数 $n-k$ 叫做图 G 的**秩**，并记为 $\rho(G)$．秩表示 G 的任一生成林的边数．于是，问题 13 也得到解答．图的弦与基本回路是各个分支的弦与基本回路的综合．图有 $e-n+k$ 条弦以及同数目的基本回路．于此，也解答了问题 14．

为解问题 15，先设图满足方程 $e-n+k=0$．于是图不含弦，必为林．反之，设具有 k 个分支的图是林，则其本身是一个生成林，不含弦，即 $e-n+k=0$．

问题 14 与问题 15 引出下列定义：数 $e-n+k$ 叫做图的**圈数**，或**零度**，记为 $\mu(G)$．

总之，有：

18. 图 G 的秩 $\rho(G)=n-k$ 恰为 G 中任一生成林的边数．零

度 $\mu(G)=e-n+k$ 是 G 的任一生成林的弦数，同时，也是图 G 的任一基本回路组的回路数.

现在，给出图论的两个典型的应用. 首先，考虑计划一个特定活动的最经济方法；然后讨论计算电网络的一个简化方法. 在两个问题中都强调了生成树及基本回路组概念的重要性.

建立无回路网络的经济的方法

为了给一些乡村联合供水，必需在各村间建造管线系统. 设计规划自然得考虑经济的和其他的因素. 往往需画一个略图，用纸上的点表示乡村；用一组线对应于乡村间的管线. 图一定是连通的，因为每个村子都需通过管线获得水的供应. 考虑到经济上的原因，不必要的管线应避免. 这表明图中无回路. 因为自连通图的回路删去一条边并不改变图的连通性(问题 **3**). 图需保留全部的顶点，而对应于删去的边的管线就是多余的. 这样一来，对应于管线设计规划的图必须是一棵生成树，最经济的生成树有如下述的明确意义.

我们来讨论一个图，它的顶点对应于乡村，而边对应建造于乡村间的管线. 假定管线数有限. 计算好每一个管线的建造费用并加注在对应边旁. 边 e 旁的数字叫做边的费用，记为 $\kappa(e)$. 显然，两个顶点至多由一条边所联结. 甚至，即使联结两个乡村有多种方式：边的费用对应于最经济的解. 无论如何，必须排除重边.

G 的子图 G' 的建造费用 $\kappa(G')$ 是 G' 中边的建造费用的和. 我们的任务是找出最小费用的生成树，即在生成树 $F, F_1、F_2, \cdots$ 中找出一个经济的生成树 F，使得对于一切 i，

$$\kappa(F)\leqslant\kappa(F_i).$$

建设与此生成树 F 的边对应的管线，就产生最经济的解.

图 33 所示为一略图. 其中的黑点 $\bar{f}$ 表示水源，用水的乡村记

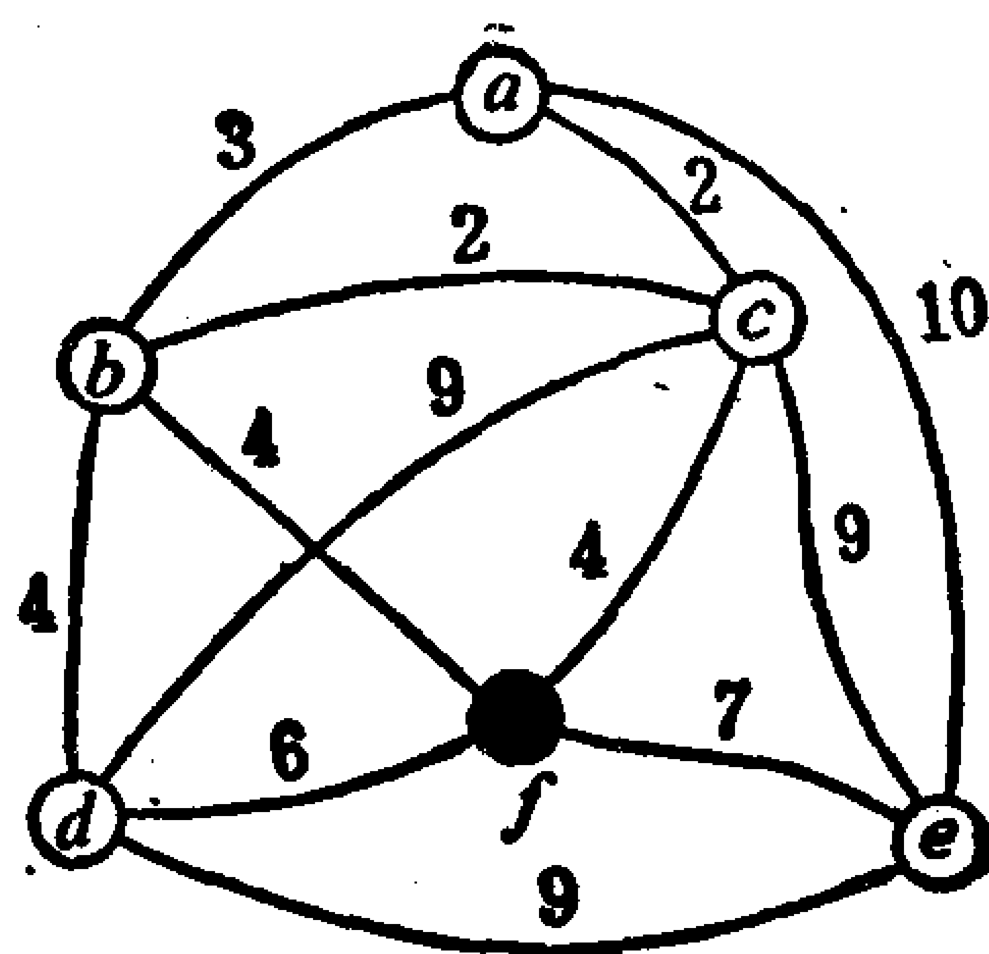


图 33

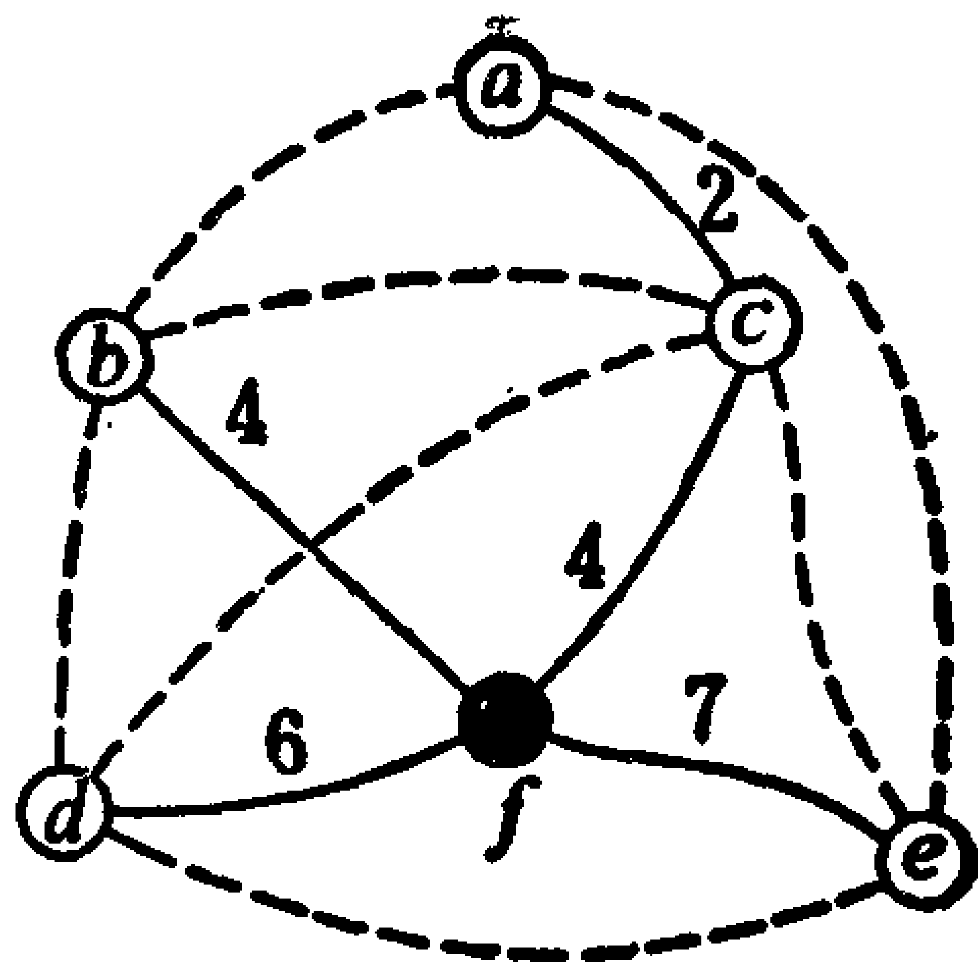


图 34

为 a, b, c, d 及 e. 水管只许沿着图的边敷设. 边侧的数表示对应水管的建设费用(比如, 可设单位敷设费是 10000 个货币单位). 我们试着来找最经济的建设方案. 比如, 若 b, c, d, e 直接联结于 f, 则只需再选一条水管, 使它关联于 a. 这时联结 a 到 c 的管线最省. 图 34 指明这一规划; 虚线所表示的管线是用不着的. 实线组成一棵生成树, 其建造费用为 23. 由于避免了最贵的管线 (10 及 9), 可能会被认为这是最经济的生成树了. 图 35 所示的规划

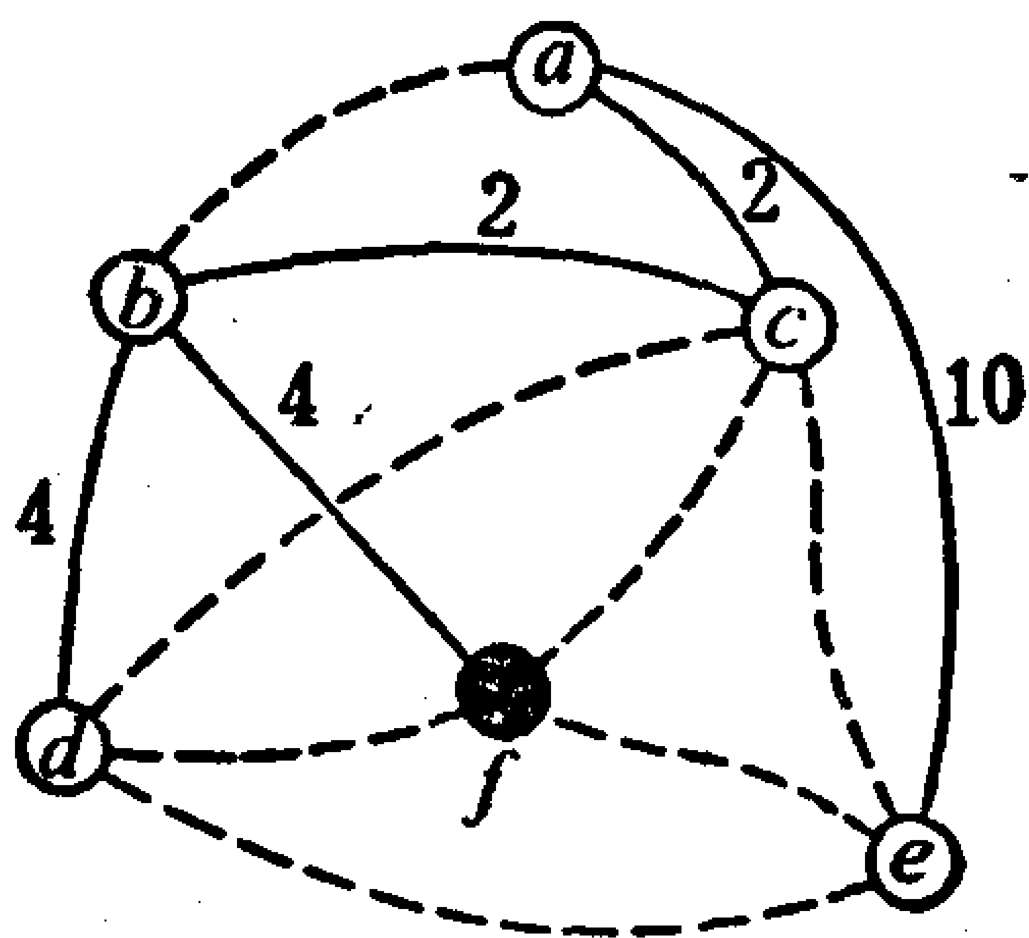


图 35

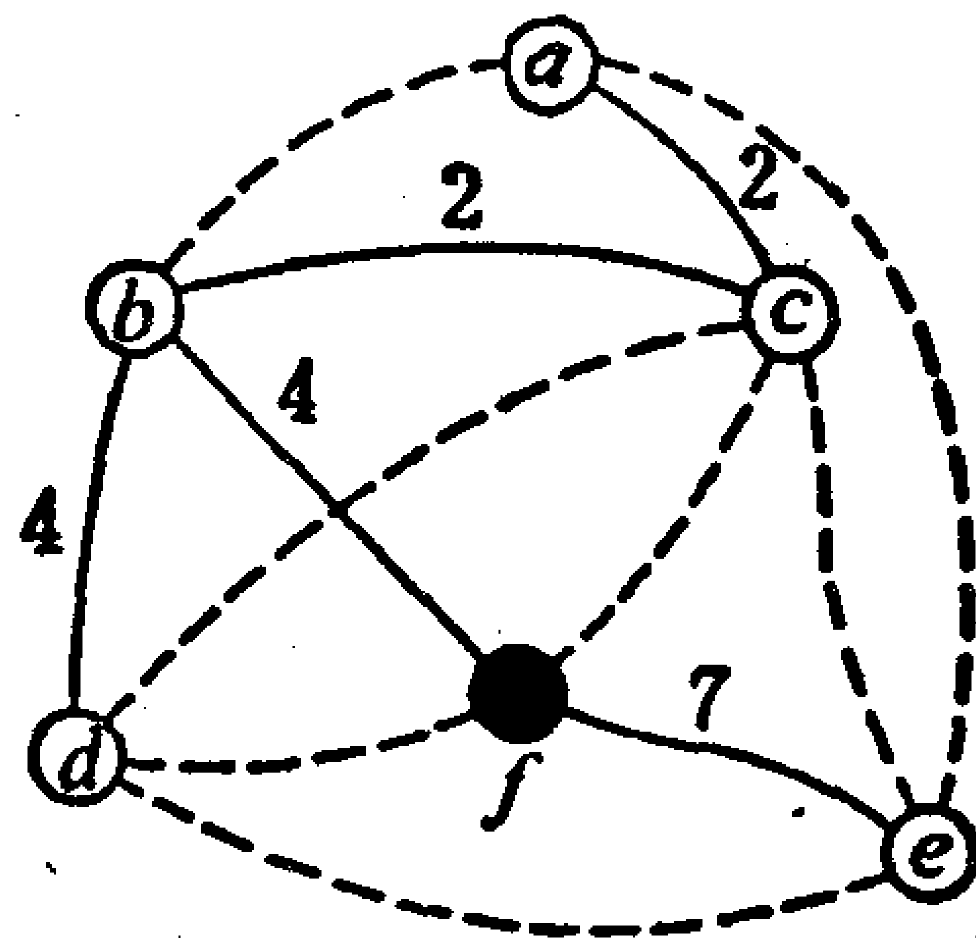


图 36

却更省, 只不过是 22, 虽然用上了最贵的管段. 继续试验, 甚至还可发现更低建造费用的生成树. 例如, 图 36 所示的生成树, 其费用仅需 19. 每一可能的生成树的建造费用的计算表明这个解是

最经济的．但其计算过程是很长的．

我们需要较简便的寻求经济的生成树的方法．现在就来描述几种这样的方法．

方 法 1

为寻求连通图 G 的经济的生成树，我们删去 G 中含于回路的最贵的一边．所得的图 G_1 是 G 的子图，据问题 3，G_1 仍然是连通的，且含有 G 的每个顶点．下一步，又从 G_1 的某回路中删去最贵的一边，如此下去．最后，不能再按上述方式删边时，得到了图 F. F 是 G 的子图，不含回路．一步一步地应用问题 3 即知 F 是连通的，并且含有 G 的每个顶点．因此，F 是 G 的生成树，可以证明它是经济的生成树．

考虑 G 的全部经济生成树．设 F_0 为其中之一，它与 F 有极大的公共边数．要证明 F_0 与 F 是恒等的，即 F 本身是经济的生成树．假设命题不真，即假设 F_0 与 F 不恒等．由于 F 及 F_0 同是一个图 G 的不同的生成树，所以有相同的边数．每个图至少有一边不含于另一图．设 e_0 是 F_0 的不含于 F 的边中最省的边之一，类似地；设 e 是在 F 中而不在 F_0 中的最省的一边：它们当中谁更经济呢？我们证明

$$\kappa(e_0)\geqq\kappa(e).$$

由于 e_0 是 F 的一条弦，据命题 17，存在一回路 K，含有 e_0，其边(除 e_0 外)都属于 F. 在构造 F 时，e_0 是 K 的唯一被删去的边．因此，e_0 是 K 中最贵的边．否则该删去的就是别的边．由于 F_0 是一棵树，至少有 K 中的一边 e'，不属于 F_0（参看图 37）．从前面的推理，有 $\kappa(e_0)\geqq\kappa(e')$．另一方面，又有 $\kappa(e')\geqq\kappa(e)$，这是由于边 e 的极小性．命题证毕．

另一方面，e 是 F_0 的一条弦．由命题 17 存在一回路 K_0，含

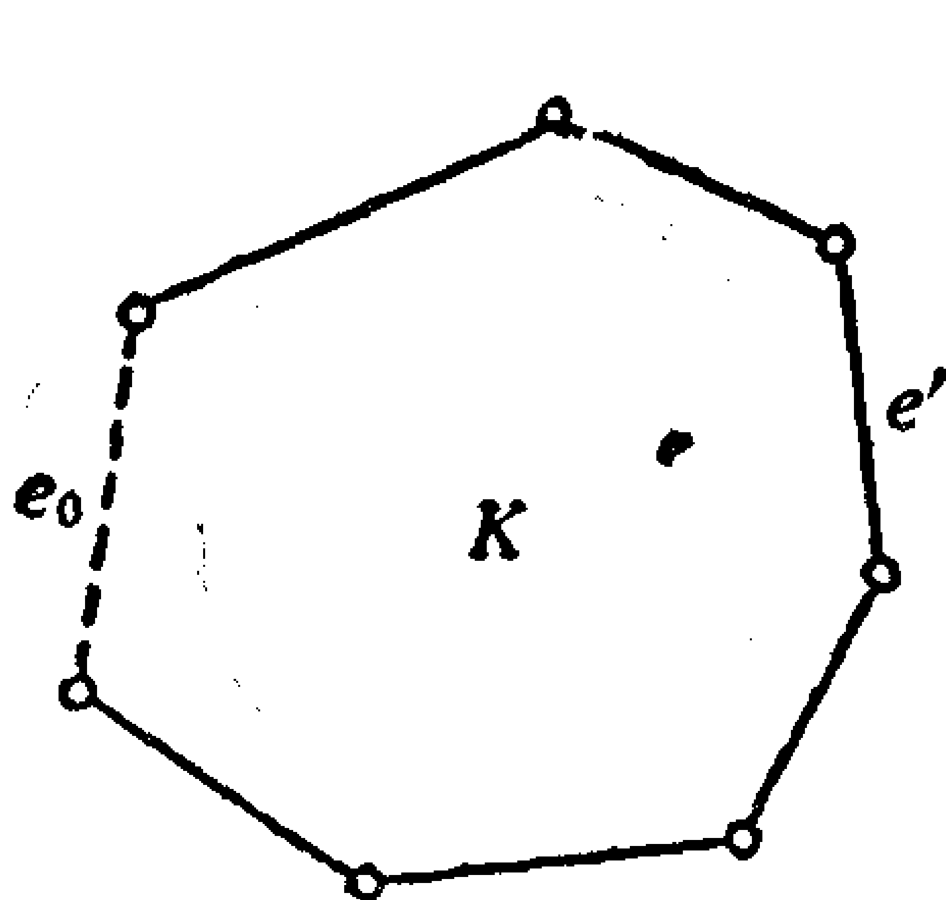


图 37

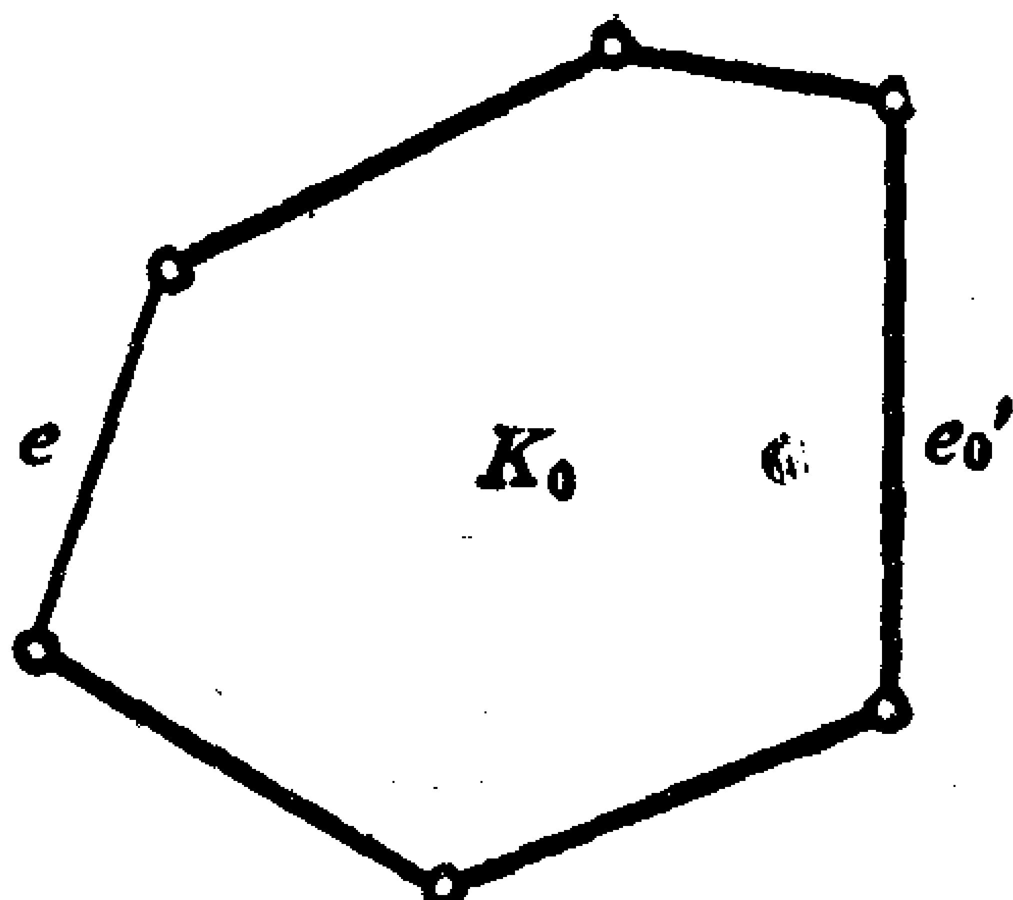


图 38

有 e，其边(除 e 外)属于 F_0. 由于 F 是一棵树，至少有一边 e_0'，它在 K_0 内但不在 F 内(参看图 38). 让我们从 F_0 删去 e_0' 而添加边 e. 所得的图 F_1 是连通的(问题 3)，含有 G 的全部顶点. F_1 必不含任何回路. 因为 F_0 不含回路，添加边 e，K_0 便是唯一的可能的回路；但这已被破掉，因为 e_0' 已被删去. 所以 F_1 是 G 的生成树，它比 F_0 多一条与 F 公共的边. 因为新边 e 属于 F，但被删去的边 e_0' 不属于 F. F_1 不能是经济的，因为被选中的是 F_0. 所以，$\kappa(e_0') < \kappa(e)$. 应用 e_0 的极小性，$\kappa(e_0') \geqq \kappa(e_0)$ 也成立. 最后，有

$$\kappa(e) > \kappa(e_0).$$

这与上述已证得的不等式矛盾.

就是说 F 恒等于 F_0，即等同于 G 的一棵经济的生成树.

把这方法应用于图 33 的图，表明经济的生成树的建造费用确是 19.

方 法 2

让我们选取连通图 G 的最省的一边. 以后的每一步，总选最省的一边，须注意，别选取 G 的任一回路的全部边.

若按所述方式再没有边可选了，那么已选到的边就组成了 G 的一棵经济的生成树. 其证明推理与上法同.

把这第二个方法应用于图 39，就给出一个可能的解，如图 40 所示，其建造费用为 30.

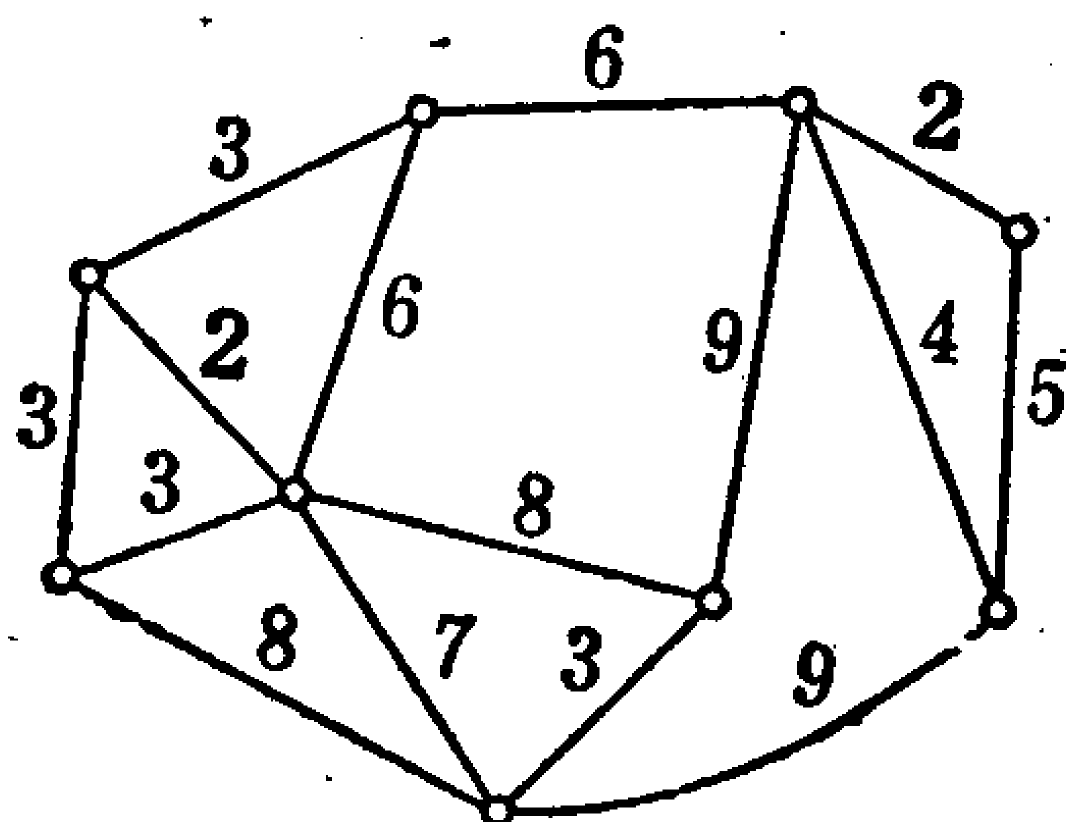


图 39

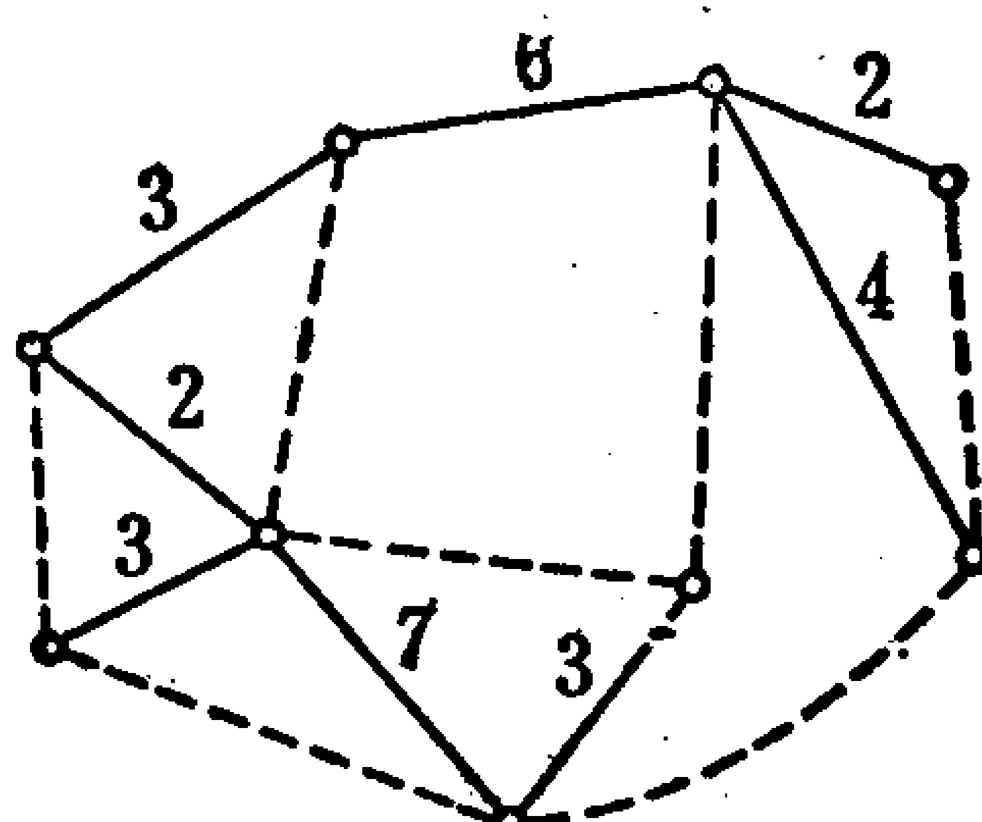


图 40

方 法 3

这里提出的方法仅适用于边的费用互异的情况，这条件在实际问题中通常是可以满足的.不然，可以应用下述方法加以调整.

设边的建造费用是整数(例如，计算中用 1 个货币单位代替 10000 个货币单位). 如果一个费用出现多次，则除一次外，对其他每次出现可以在建造费用上加一个很小的调整量，加以调整：把单位的一小部分 q 加到费用之一上，以 $2q$ 加到另一个上，以 $3q$ 加到第三个上，如此等等. q 必须充分地小，所有调整量的和小于一个单位，若 k 个不同的费用重复出现，且没有一个其重复次数是大于 m 的，则在选取 q 时，必须使它满足下列不等式：

$$k[q+2q+\cdots+(m-1)q]<1.$$

例如，图 39 的图中，建造费用 2, 3, 6, 8 与 9 都多次出现，即 $k=5$，数 3 出现次数最多，4 次；于是，$m=4$. 所以 q 必须小于 1/30. 为简单起见，令 $q=0.01$. 调整后的建造费用如图 41 所示.

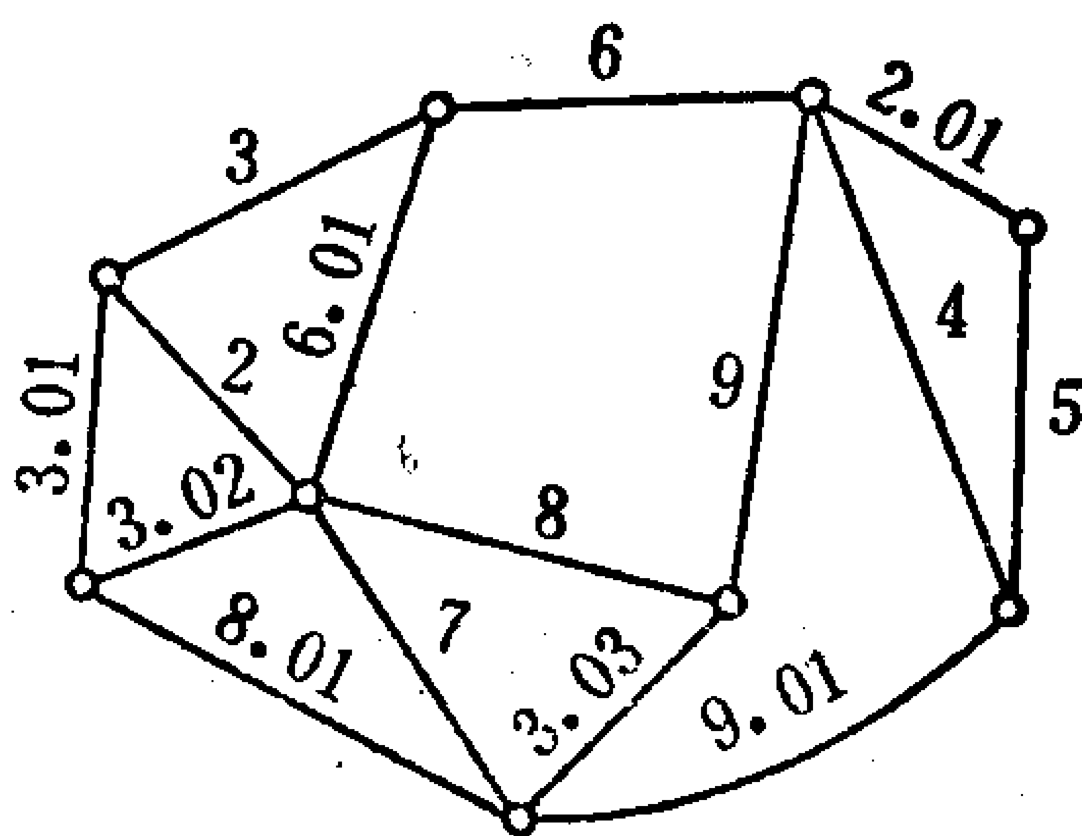


图 41

调整后的图仅含不同费用的边；现在来找这样的图的经济的生成树．这生成树在原图中也是生成树．我们须证明：调整后的图，其每棵经济的生成树在原图中同样是经济的．原图的任何子图 G' 的建造费用是调整后的图中 G' 的建造费用的整数部分，因为调整量的和小于 1 个单位（一个数的整数部分是指不超过这个数的最大整数）．设 F 是调整后的图的一棵经济的生成树，则对图的任意生成树 F_1 有 $\kappa(F)\leqslant\kappa(F_1)$（这里的费用是调整后的）．这些不等式在仅考虑数的整数部分时仍然成立．所以，F 同样是原图的一棵经济的生成树．

一个地图对应着一个连通图 G．其中，不同的边有不同的费用．每个乡村(顶点)必须建造关联于它的费用最省的管线．也可能发生同时从两端出发建设一根管线的情形．例如，对于最经济的边的情形．另一方面，用这方法不会建成一个回路的全部管线．这一点可由读者自己来证明：参照问题 **10**，只需以乡村间的管线的费用替换两点间的距离．这样得到的对应于 G 的子图 G_1 的管线系统不含回路．但 G_1 不一定是连通的，例如，参看对应于图 41 的子图 G_1，它由图 42 中的实线指出．把属于 G_1 的同一分支的 G 的顶

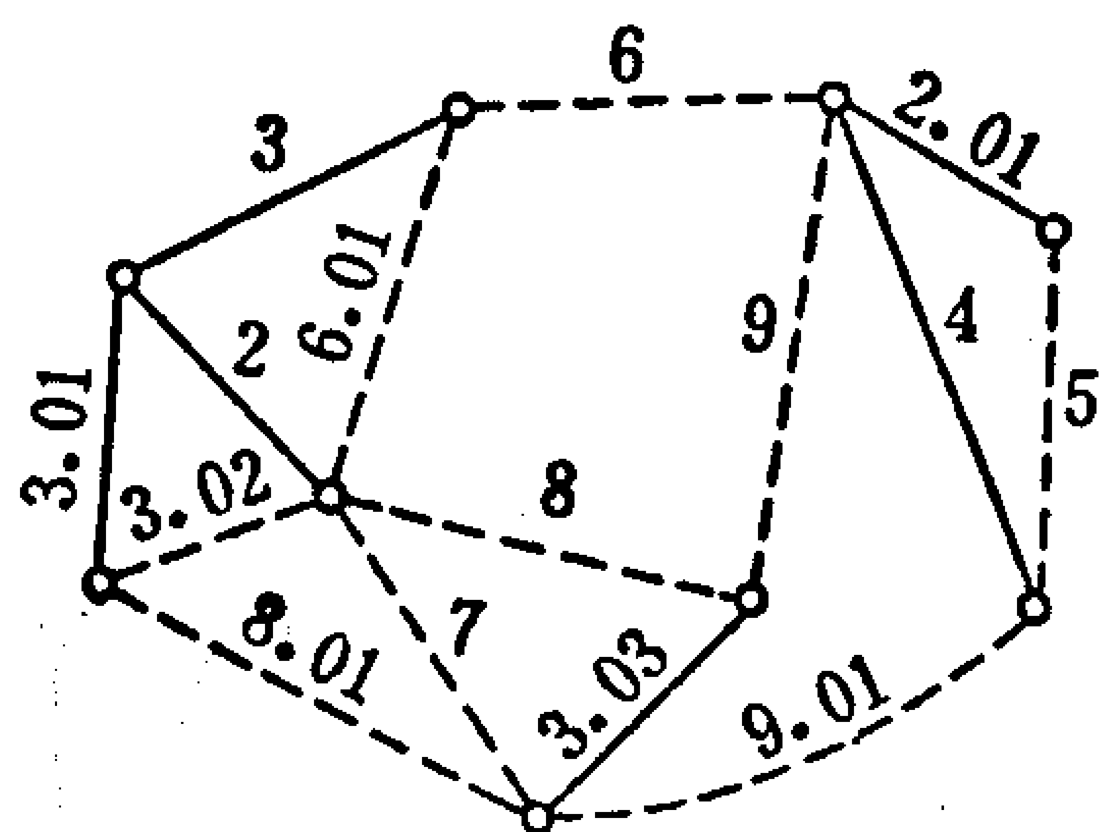


图 42

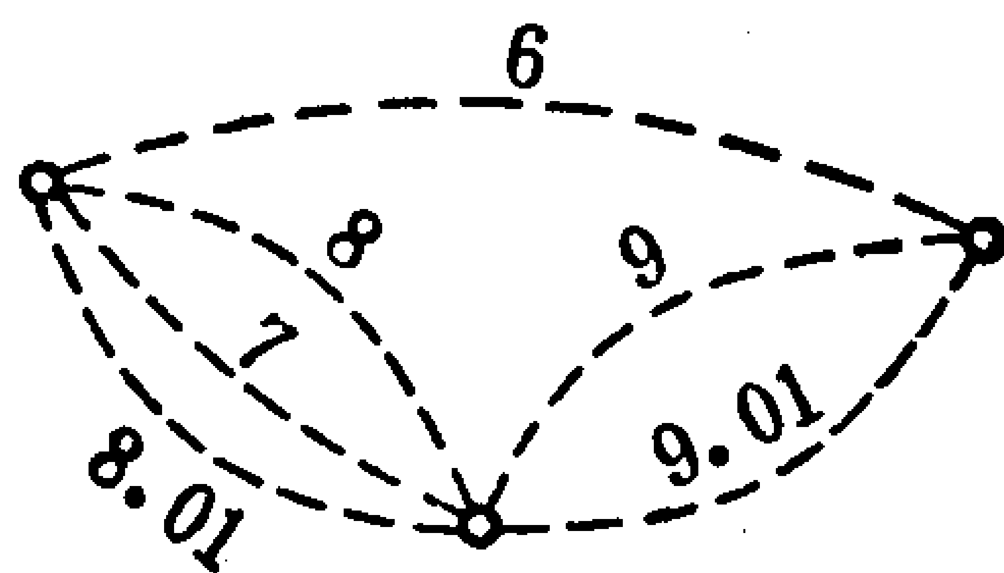


图 43

点合成为一个的顶点，删去由此产生的环．以 H_1 记所得的图(参看图 43)．对 H_1 我们重复相同的步骤，把 H_1 的新边(参看图 44)联结到 G_1 上，以 G_2 表示所得的图(参看图 45)．我们把以 G_2 替换

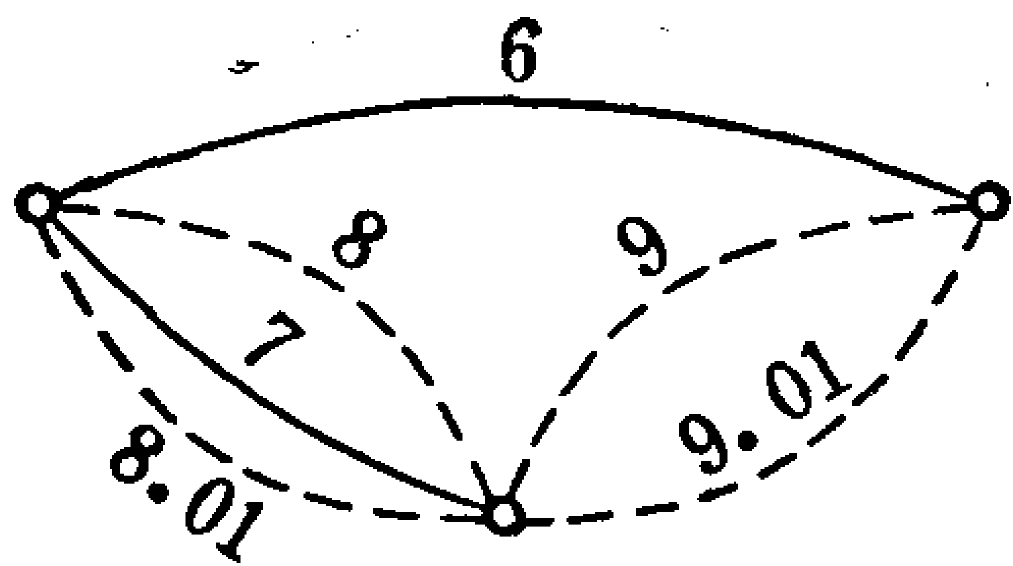


图 44

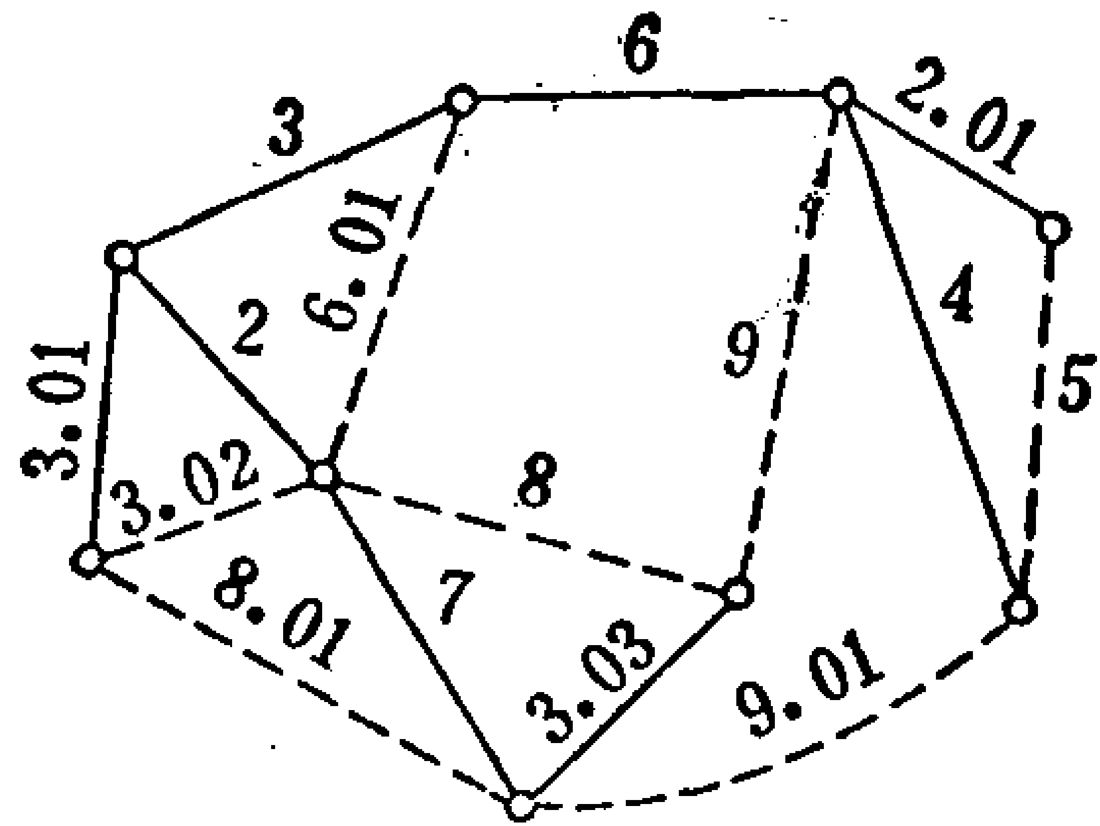


图 45

G_1 的过程重复下去一直到获得连通图为止(在本例中，G_2 已经是连通的)．这过程产生一棵经济的生成树．但这证明是冗长的，这里从略．

本例中经济的生成树是 G_2，而其费用为 30.05．去掉调整量就是 30．这是原图经济的生成树的费用，与图 40 所示的一致．

方法 3 可能比前面的方法在步骤上多一些，但是在每一步要省心些．例如，要确定哪一条管线该建设，可以只对关联于单个顶点的管线的费用进行比较．

易证若对应于边的费用互异时，经济的生成树是唯一的．否则，就不一定．

找经济的生成树的问题可推广如下：G 的每条边对应于一个数(允许为负的)．G 的一个子图 G' 的值是对应于 G' 的边的值的和．需要求出具有极小值的一棵生成树．

也有可能碰到求 G 的具有极大值的生成树的问题．比如，图 G 的顶点与边，分别对应于城镇与公路．运输必须在联结着城镇的已有的公路上实现，为了保证任两城镇间的运输畅通，指定了少数几条合适的公路，让我们把公路(按质量，坡度等标准)进行分类，使较好的公路有较高的指标，需求边的旁边注有指标的图 G 的具有极大值的生成树．

如果我们要求具有极大值的生成树，那么仍然只需应用找经

济的生成树的方法，这只需把路边的数都乘以－1，则在此图中的具有极小值的每棵生成树就是原图中具有极大值的生成树.

电网络的计算

只要把导线、电子管、电阻、线圈、电容与振荡器联结在一起，就有了一个电网络. 每个元件有两个点（两端）与别的元件联结，这些点叫做结点. 为了简单起见，我们假定网络只含有欧姆电阻与电池. 其电路图可用一个图来表示. 其顶点与边分别对应于电网络的结点与元件. 图 46 是对应于电池的边的通常的表示方法. 以边表示的电子元件的数据往往就看作是边的数据.



图 46

问题是如何决定在每个元件内的电流方向与大小，若元件的电阻与电池的电压(电动势)是已知的.

电流的方向可由有关的符号来确定，安培计指针方向的变换改变着读数的正负，从正到负或从负到正. 因此，在表示网络的图的每一边上任意指定一个方向为参考方向，则每个边的电流与电动势都与此参考方向有关：如果它们的方向等同于固定的参考方向取正号，否则就取负号.

在固定这些参考方向以后，解基尔霍夫(Kirchhoff)定律列出的方程组，所提出的问题就可以得到解答.

基尔霍夫电流定律(K. C. L.) 流向一个结点的电流之和等于流出这个结点的电流之和.

基尔霍夫电压定理(K. V. L.)是关于网络的回路的定理. 我们给每个回路以一个定向(按顶点的一个循环顺序). 每个回路有两个和，如下述：第一个由迴路中元素的电阻与它们的电流的乘积组成. 若边的参考方向与回路的定向“相反”则再乘以－1. 第二个和由属于边的电动势组成，若边的参考方向与回路的方向相反，

则乘以-1. K.V.L. 指出这两个和关于网络的同一个(但是任意的)回路是相等的.

应当注意，这些定律在每一时刻都是正确的，如果电流随时间而变化. 比如，在网络含有交流电流(或电压)振荡器时.

图 47 的网络是一个例子. 电池电动势，以边 e_6 表示，电压为 E 伏特；对应于边 e_k 的电阻与电流分别为 R_k 欧姆及 I_k 安培 $(k=1,2,\cdots,6)$. 应用 K.C.L. 于结点 p_1，得

$$I_1=I_2+I_3,$$

即

$$I_1-I_2-I_3=0.$$

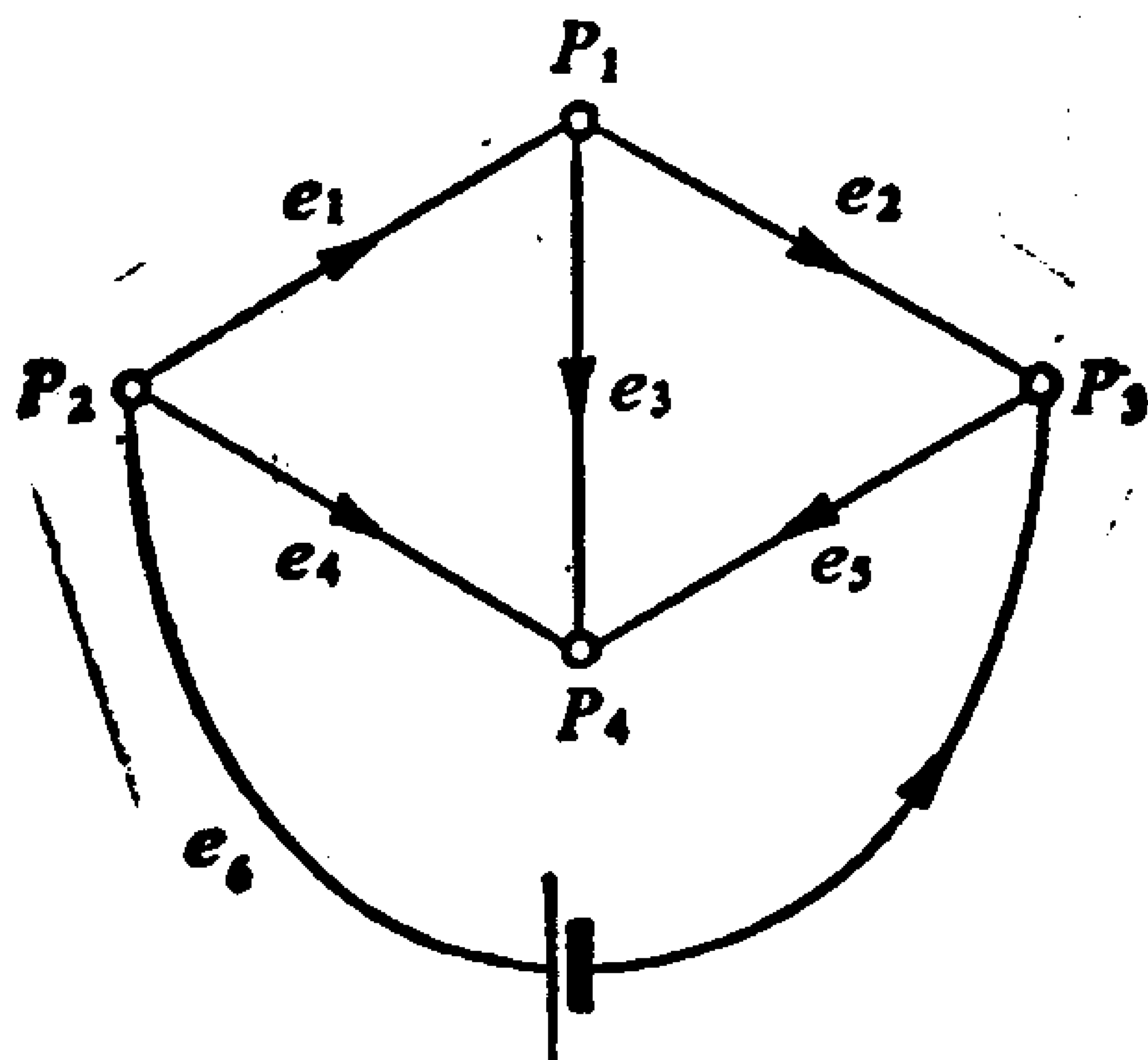


图 47

上面方程的左边是流向结点的电流与流出结点的电流的代数和. 据 K.C.L. 列出对应于结点的各下标的 4 个方程如下:

(1) $I_1-I_2-I_3=0$,

(2) $-I_1-I_4-I_6=0$,

(3) $I_2-I_5+I_6=0$,

(4) $I_3+I_4+I_5=0$.

不过，这 4 个方程是不独立的；比如，把前 3 个方程相加，得

$$-I_3-I_4-I_5=0,$$

它与(4)等价，即(4)可由其它方程推出. 正好由同一方式知道，上

述 4 个方程之任一个可由其它三个推出．为了确定全部六个未知数，这里至少还需要 3 个方程．据 K. V. L. 列出的方程数与在图 47 的图中的回路数一样多．图 48 所示为经此过程找出的图的 7 个回路，箭头表示回路的方向．

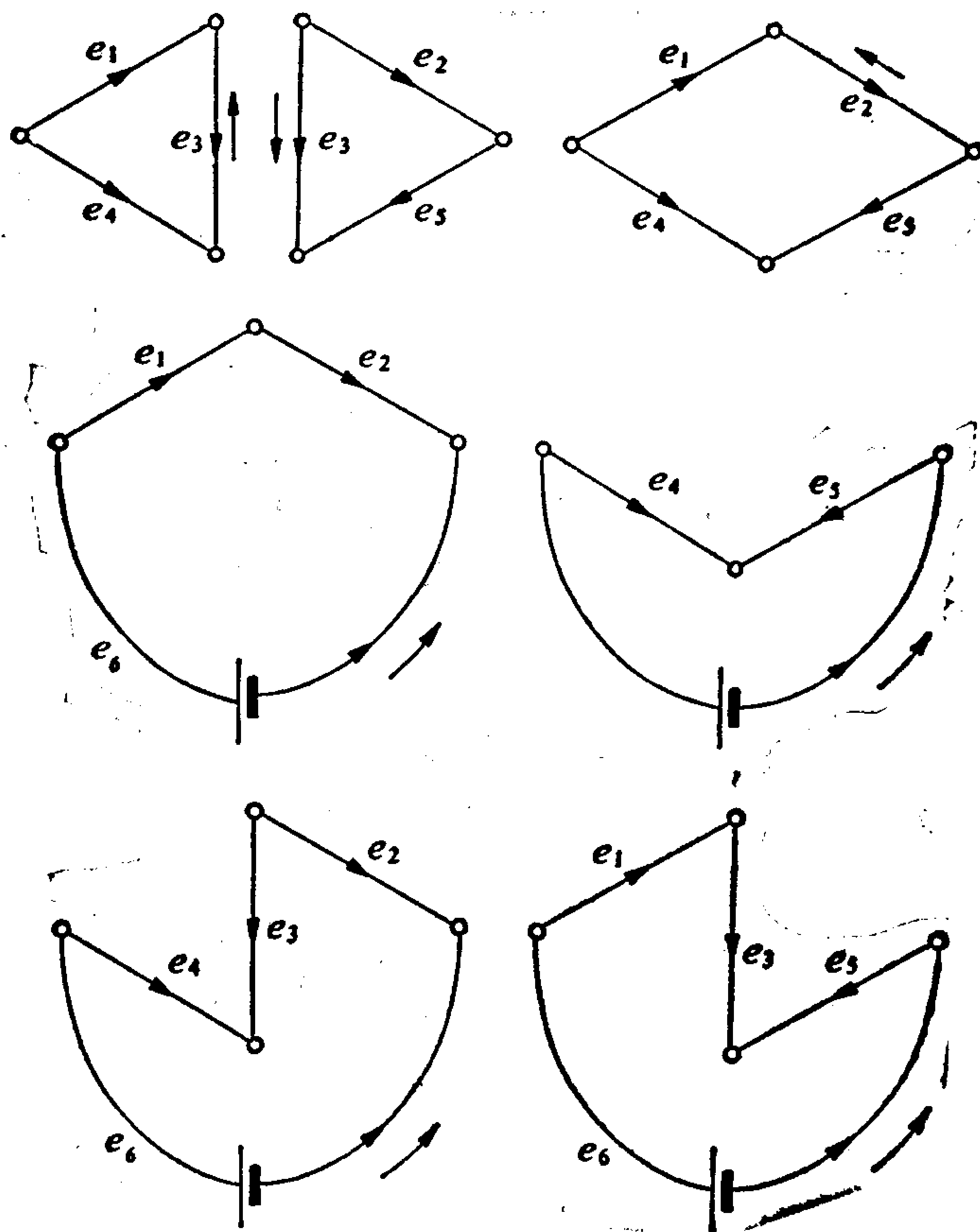


图 48

这 7 个方程是

{1} $\quad -R_1I_1-R_3I_3+R_4I_4=0$

{2} $\quad -R_2I_2+R_3I_3-R_5I_5=0$

{3}　$-R_1I_1-R_2I_2+R_4I_4-R_5I_5=0$,

{4}　$-R_1I_1-R_2I_2+R_6I_6=E$,

{5}　$-R_4I_4+R_5I_5+R_6I_6=E$,

{6}　$-R_2I_2+R_3I_3-R_4I_4+R_6I_6=E$,

{7}　$-R_1I_1-R_3I_3+R_5I_5+R_6I_6=E$.

现在已经有了10个方程(包括刚才得到的3个). 预料后7个方程是不独立的. 仔细地考虑即可发现存在多种方式, 从7个方程中选取3个独立的方程, 其余4个方程可由它们推出. 然而, 并非任三方程都是合适的. 比如方程{1}、{4}与{7}可以推出其余的, 而方程{1}、{2}与{3}, 不能推出方程{5}.

从{4}减去{7}即得方程{2}, 就是

{4}－{7}＝{2}.

这样一来, {4}与{7}的每个公共解也是方程{2}的解: 即由{7}与{4}可推出{2}. 还容易得出下列关系:

{1}＋{4}－{7}＝{3},

{7}－{1}＝{5},

{4}－{1}＝{6}.

这说明方程{1}, {4}与{7}能推出其余的每个方程.

方程{3}可由{1}和{2}推出, 因为

{1}＋{2}＝{3}.

我们还须证明: {5}不能由{1}与{2}推出. 设网络的全部电阻与电池的电动势都取成是单位的. 则下述电流组

$$I_1=I_2=I_3=I_6=1,\ I_4=2 \text{ 及 } I_5=0$$

是方程{1}与{2}的公共解, 但不是{5}的解.

为什么第一组的3个方程能推出其余的方程而第二组的3个方程就不能呢? 易见引出方程{1}, {4}与{7}的回路正好是对应于图49所示生成树的基本回路组. 但产生方程{1}, {2}与{3}的回

路 K_1, K_2 及 K_3 则不是. 每一基本回路恰包含一条弦 (命题 17). 因此, 如果存在一棵生成树, 以 K_1, K_2 与 K_3 为基本回路组, 则 K_3 中恰有一条边是弦. 由于 3 个回路一起只含有一边 (e_3) 以及 K_3 的边, 即全部 3 个回路至多只含有两条弦. 这就得到一个矛盾. 可以证明, 下述一般命题成立.

19. 设一个电网络, 具有几个结点, 仅由欧姆电阻及电池组成. 则当电阻及电动势已知时, 由任 $n-1$ 个结点方程及对应于回路的任一基本回路组的 K. V. L. 方程组合成的方程组, 给出每个元件的电流值及其符号.

设具有几个结点与 e 个元件的网络由连通图 G 来表示; 则 $n-1$ 恰等于 G 的秩, 基本回路组的回路数等于 G 的零度. 由命题 18 知道, 从方程个数为

$$\rho(G)+\mu(G)=e$$

的方程组中, 能求出未知电流, 由于恰有 e 个未知数, 全部这些方程通常是必要的.

命题 19 的证明是冗长的且需要应用高等数学; 因此, 将列入本书的第二卷.

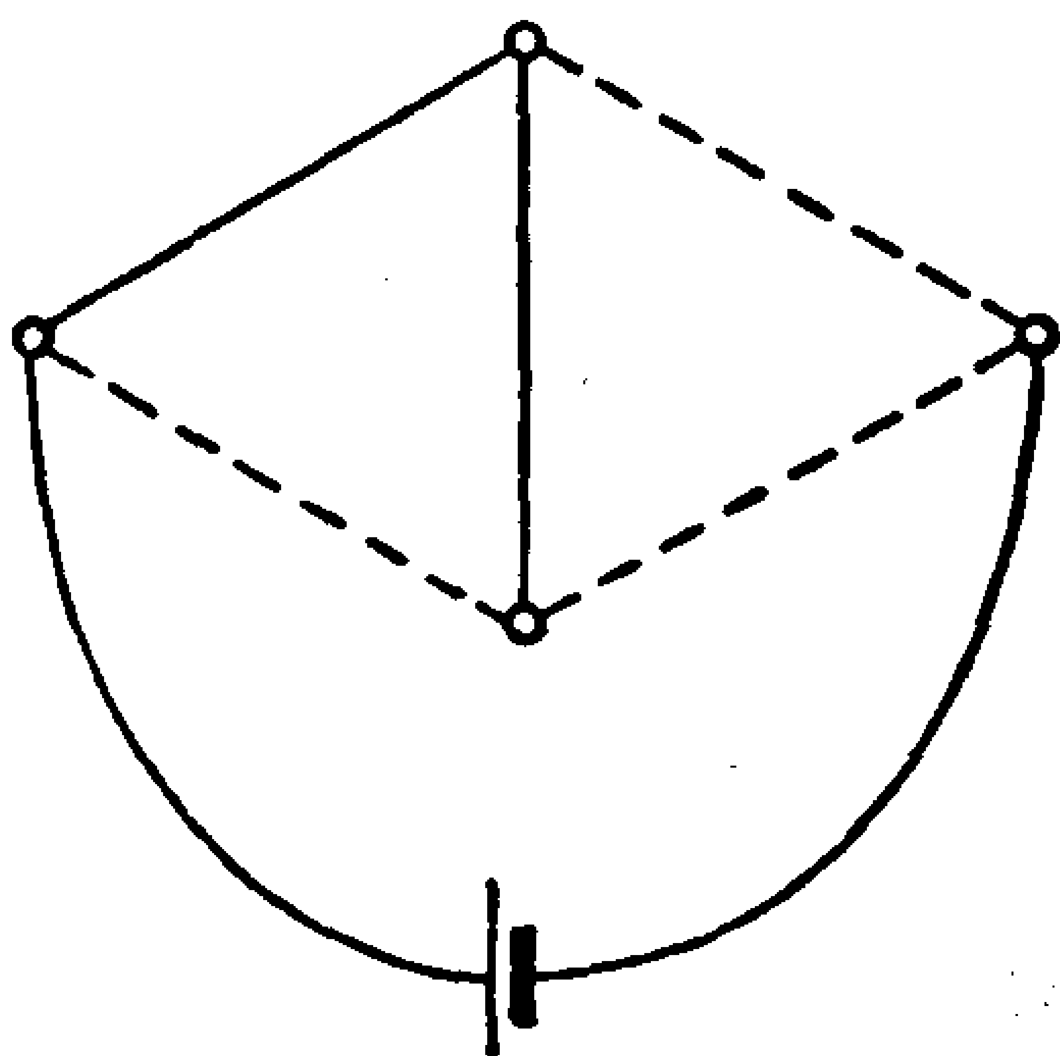


图 49

练　习

20. 画出一些树, 使其每个顶点的次数不大于 3. 在这些图中, 次数是 1 与 3 的顶点数之差如何?

21. 找出图 50 的图的 5 个子图, 它们没有一个是图的生成树, 并且此 5 个子图的每一个依次有下列两性质:

1. 连通，但不含任何回路；

2. 连通，含 8 个顶点；

3. 连通，恰有 7 条边；

4. 包含 8 个顶点，但不含任何回路；

5. 包含 8 个顶点，恰有 7 条边.

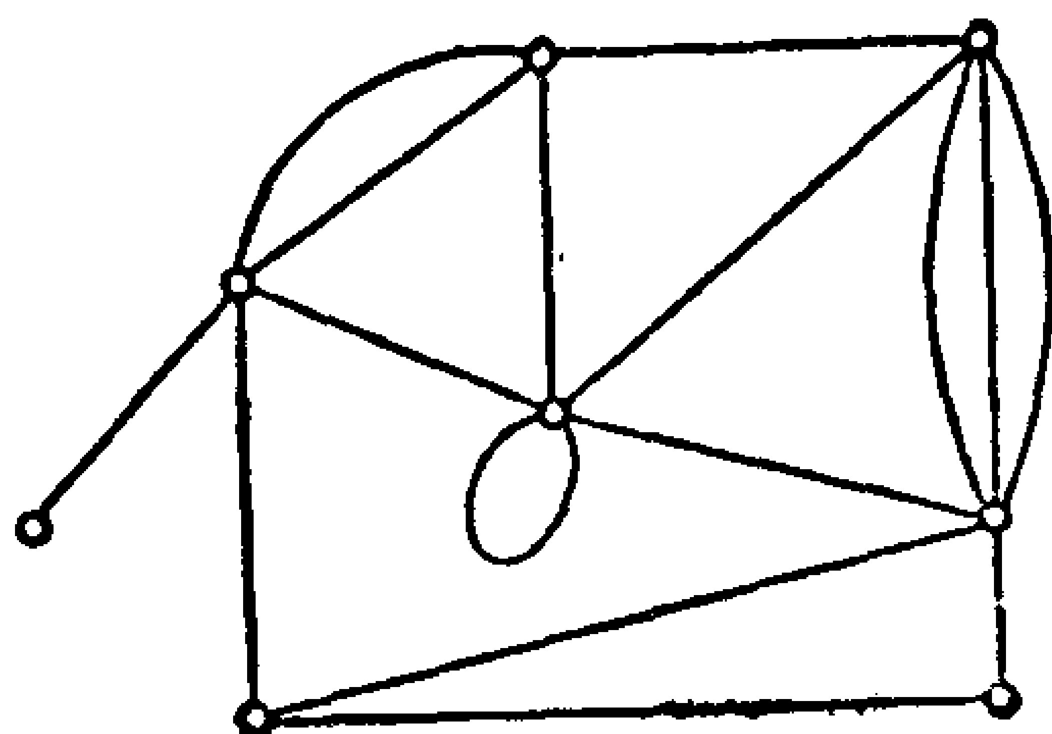


图 50

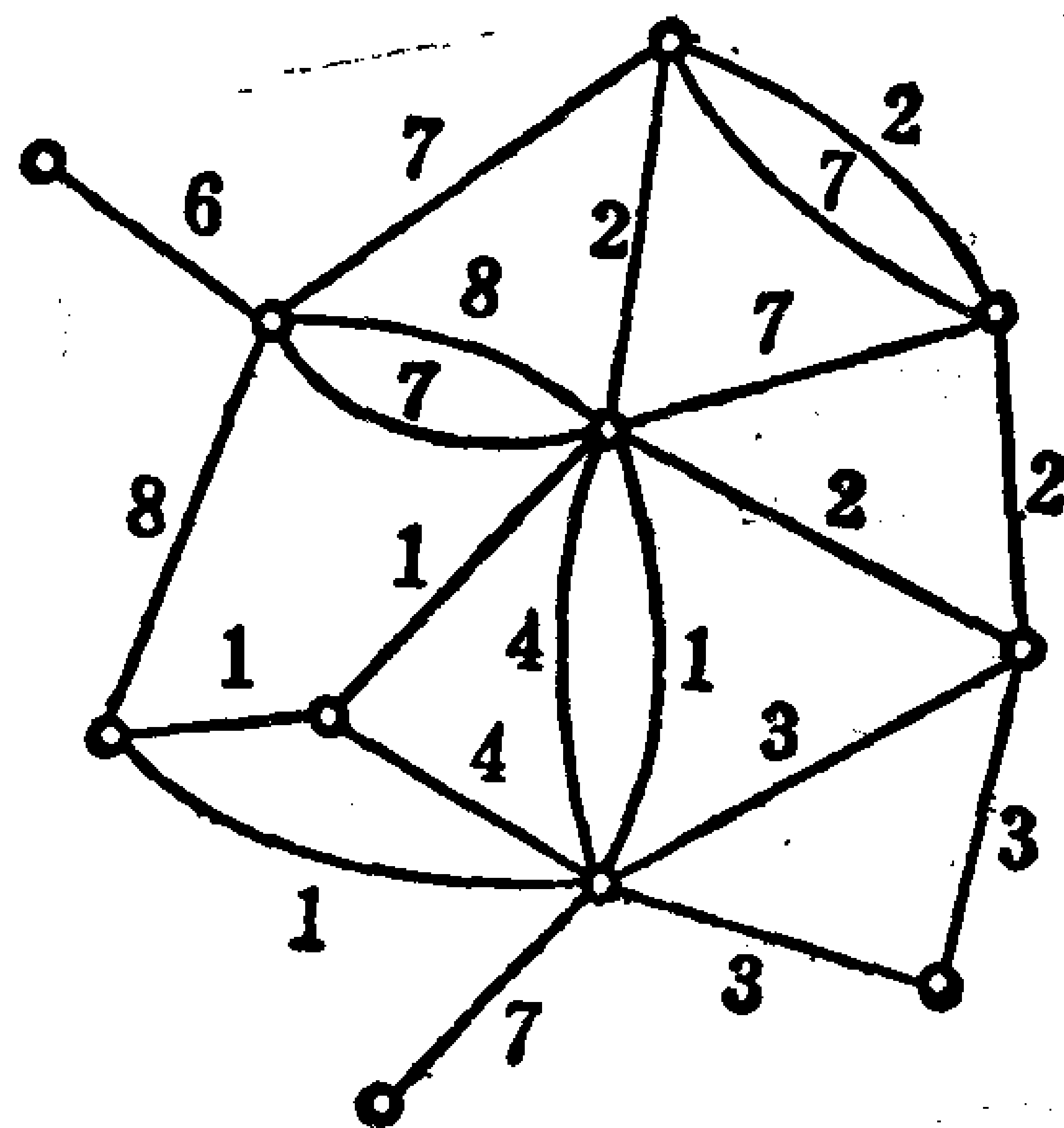


图 51

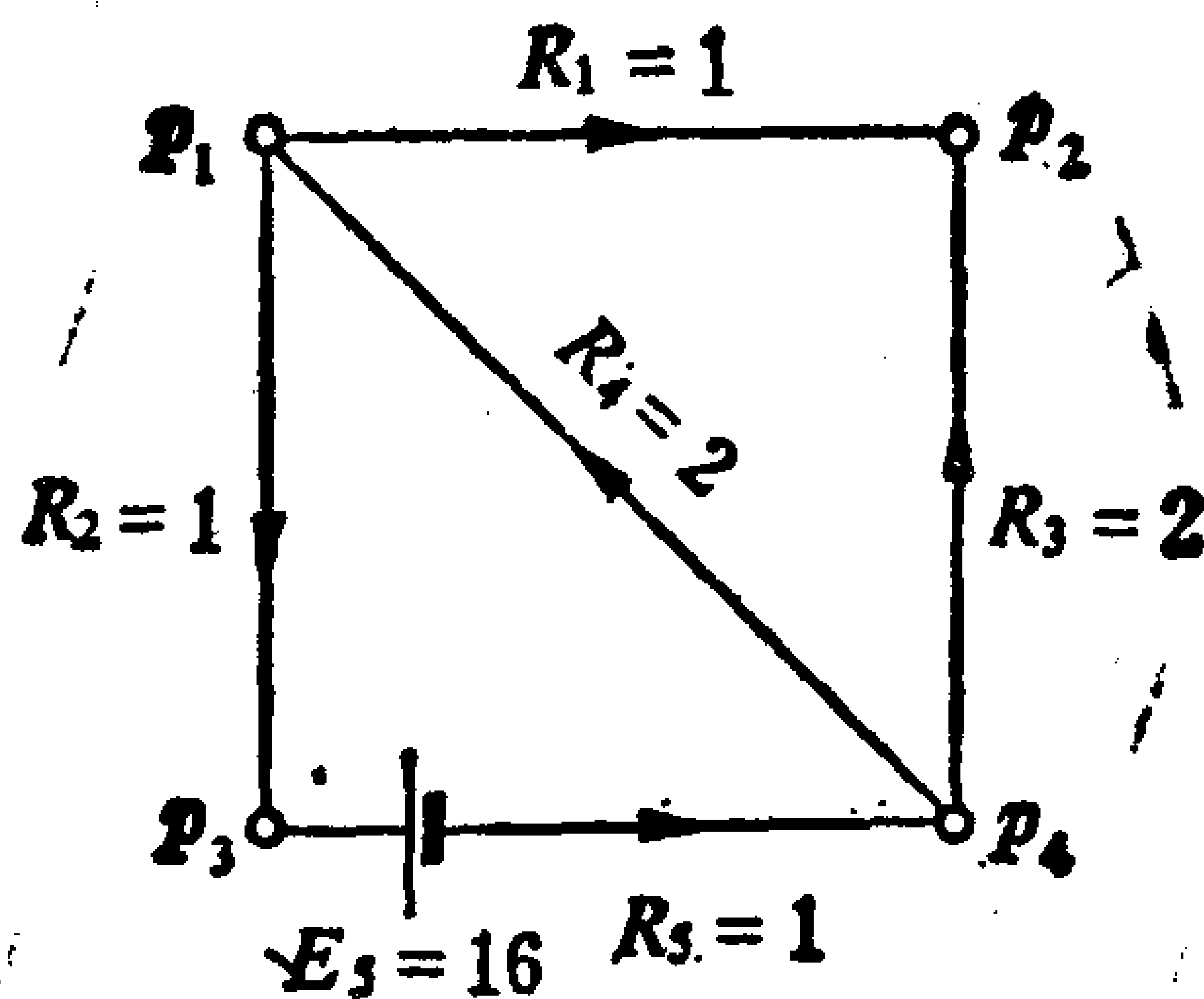


图 52

22. 找出图 51 的图的两棵生成树，使分别具有极大值与极小值.

23. 图 52 的电网络所示的数据中，元件的电阻单位是欧姆,

电池电动势的单位是伏特. 计算每个元件的电流方向与大小.

问　　题

24. 求证:若化合物的分子模型是一棵树,则每个分子至少含有两个一价的原子.

25. 以 f_1 及 c 分别表示一棵树中次数为 1 及次数大于 2 的顶点的数目,求证:若树至少含有两顶点,则 $f_1 \geq c+2$. 当 $f_1 = c+2$ 时,画出此树.

26. 在第二章内已经指出:一个具有 n 个顶点的连通图 G 的任一生成树具有下列 4 性质:

1. 连通,
2. 不含任何回路,
3. 其顶点数为 n,
4. 它的边数是 $n-1$.

求证:对于 G 的任一子图,这些性质中的任三条可推出第四条,即可推出 G 的子图是生成树. 又问是否存在这 4 性质中的两条,可以作为识别 G 的生成树的依据.

27. 求证:具有 n 个顶点及 n 条边的连通图,含有唯一的一个回路.

28. 求证:若 G 是顶点数大于 4 的任意简单图,则 G 或其补图含有回路.

29. 求证:一连通图的任一无回路的子图可以是图的生成树的一部分.

30. 一棵树的连通子图 G_1 与 G_2 有公共边. 设 G_3 以全部这些公共边为边,并以公共边的端点为顶点,求证:G_3 是连通图.

31. 设图 G 具有 n 个顶点,e 条边以及 k 个分支,G' 是 G 的

一个子图. 求证: 若 G' 至少含有 G 的每个回路的一条边, 则它至少有 $e-n+k$ 条边.

32. 连通图 G 的每条边对应于一个数. 设 c 是极小数, 求证: 若 G 含一具有 s 条边的回路, 使同一个数 c 对应于此回路的每条边, 则 G 中至少有 s 棵不同的具有极小值的生成树.

33. 在平面上(或空间内)给出若干个点, 使得任两点间的距离不同, 从每个点到离它最远的点画上直线段. 以 G 表示对应的图, 它分别把这些点与线作为顶点及边, 求证 G 不含回路.

34. 要建设一个(无回路的)管线系统以联结某些城镇, 已提出了一些有能力参加这一工程的承包者, 但联结任两城镇的管线须完全由一家承包者来建造. 于是为了建设全部的管线, 每家公司提出了自己的建设方案与费用估计. 试在指定的条件下确定费用最省的建设方案.

35. 求证: 结点方程(K. C. L.) 中的任一方程可由其它方程推出.

第三章　沿着图的边的路线

图论的一个有趣的问题，渊源于18世纪的哥尼斯堡市(即今苏联的加里宁格勒). 市内有七座桥横跨普雷格尔河 (参看图 53). 市民们为是否能在一次散步中走过每座桥恰好一次的问题所困惑. 既然解决不了问题,他们就去求教于欧拉——瑞士数学家,圣彼得堡(现在的列宁格勒)大学的教授. 欧拉解答了此问题,指出在一次散步中走过每座桥恰好一次是不可能的.

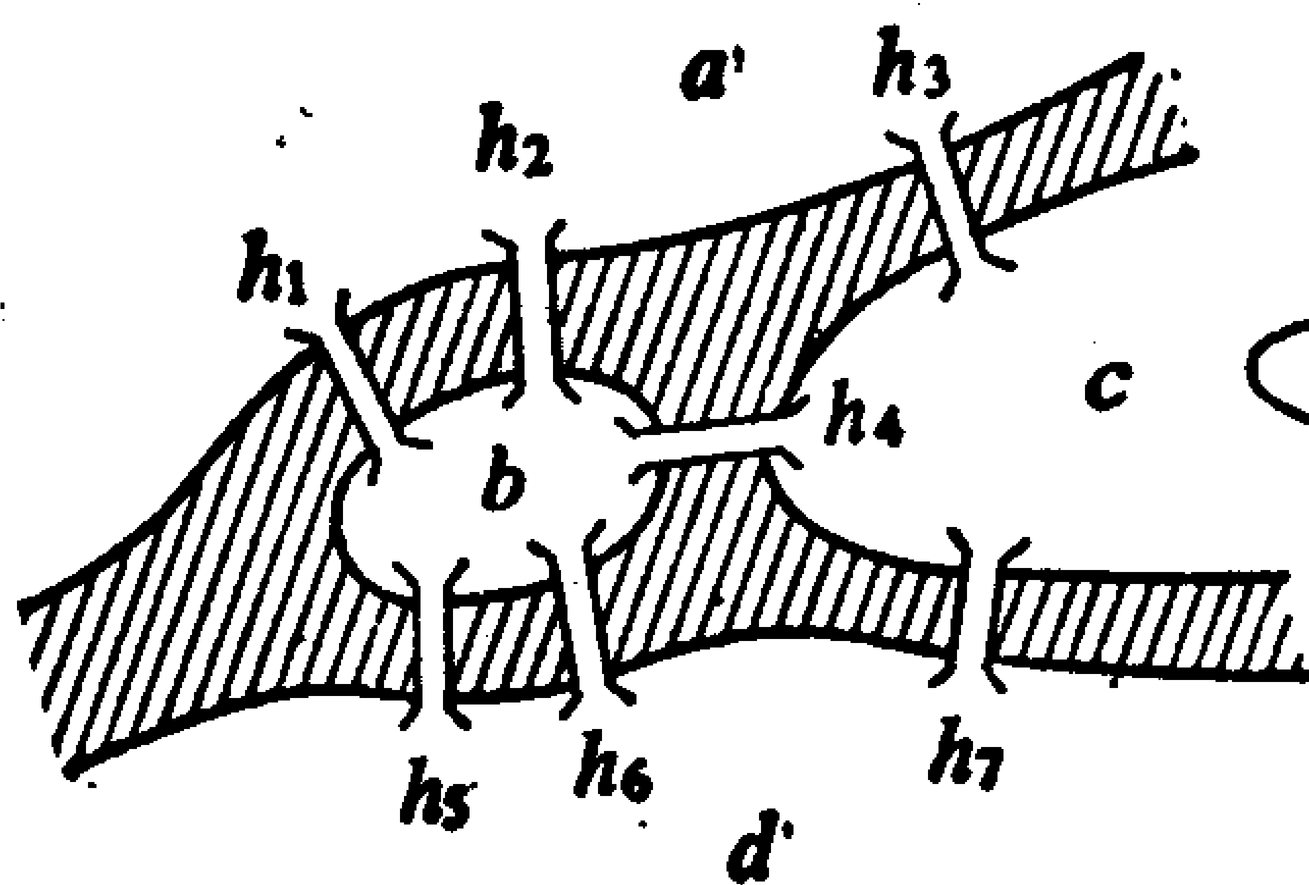


图 53

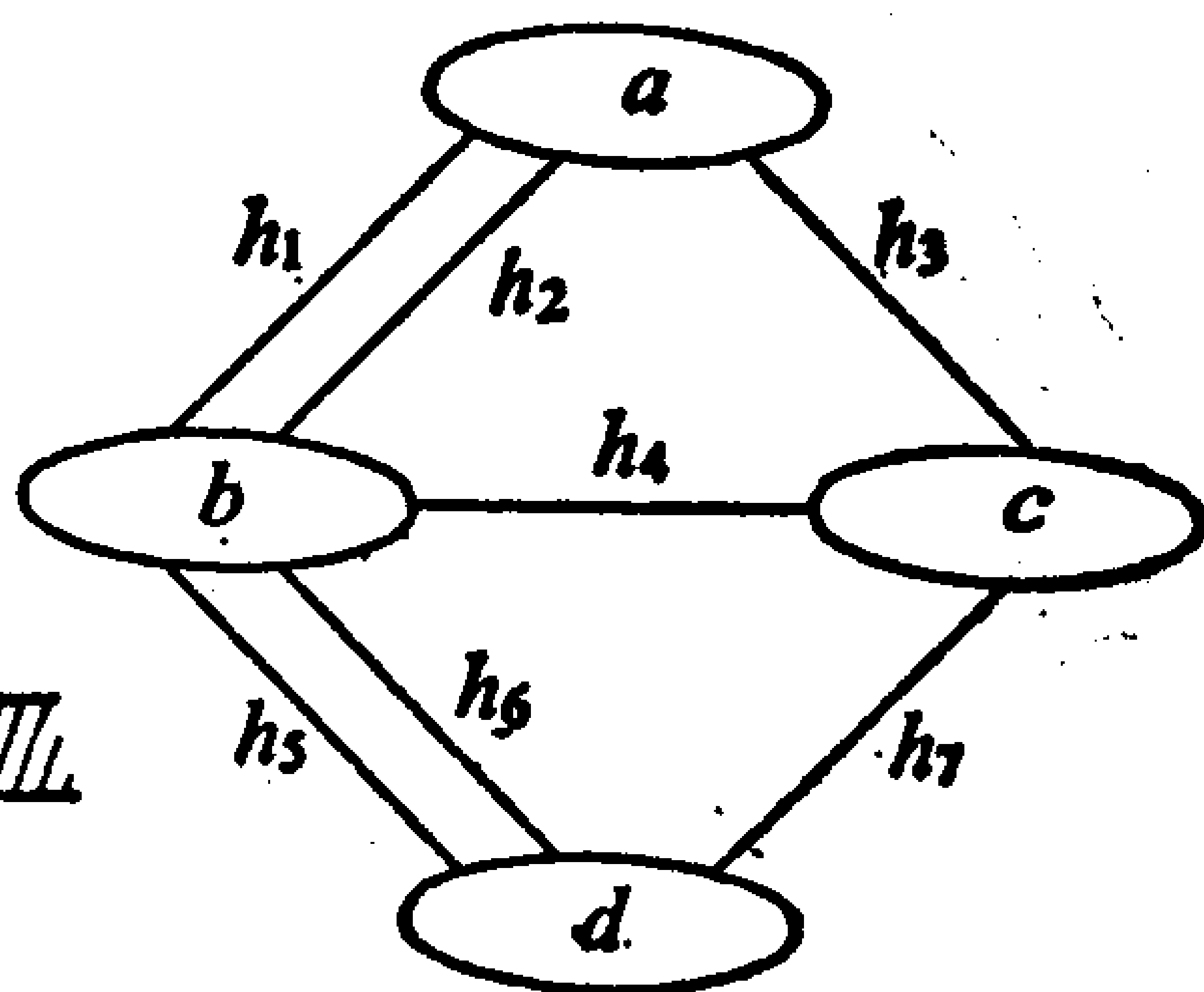


图 54

这样的散步有什么限制条件呢?除了过桥就不能过河,并且必须走过每一座桥. 而路线是经过小岛还是沿着河岸并不重要. 七个标出的路线联结着岛和岸. 例如,如果我们是在岸 a, 要实现规定的散步, 我们沿着岸 a 怎么走都是没关系的. 我们需要考虑的是离开此岸时要过那座桥. 对岛 b 有同样的话可说, 所以, 也可以把岛看成是岸. 因此, 为了解题的方便, 我们只需要岸和联结岸的桥的数目. 图 54 是该区域的地图的一个略图. 如果, 我们注意到, 若一个岸在地图上简单地表示成一个点,就得到了一个图(参看图 55).

哥尼斯堡七桥问题可以重述为：我们能否沿着图 55 的边走，通过每条边恰好一次？欧拉解决了更一般的问题．按他的结果，对于一个任意的图，我们总能确定这样的散步是否可能；若答案是肯定的，我们还要指出该怎么走．本章介绍的欧拉的解，是 1736 年发表的关于图论的第一篇论文．

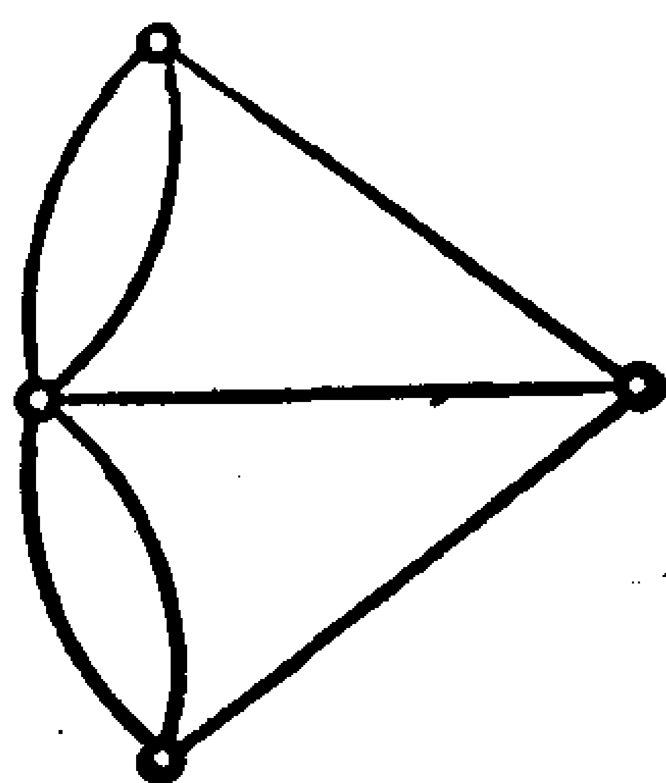


图 55

哥尼斯堡七桥问题也能改述为：假如把图的顶点画成"点"而不是"小圆圈"，能否笔不离纸地(一笔)画出图 55 中的图的所有的边？

练　习

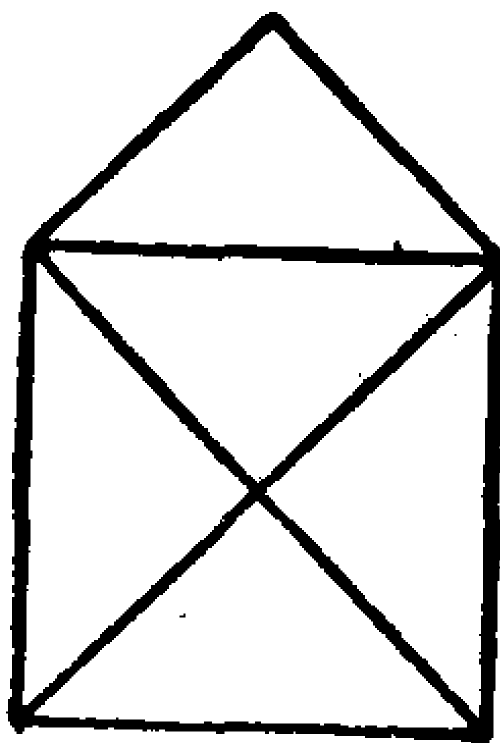


图 56

1．笔不离纸地画出图56(允许与已画出的线接触或交叉，但不许沿着它的任何一段重画一遍)．

2．笔不离纸地画出一个具有 7 个顶点的完全图．(图的顶点是普通的点)．

问　题

3．由多米诺骨牌对构成的一个圆环如图 57 所示．两个不同的多米诺骨牌对按骨牌的相同点数相联接．象这样的一种构形叫做一个环链．让我们从一组骨牌中选出全部多米诺骨牌对，使得每个可能的不同数(从 0 到 6)对都出现．(就是，考虑到全部的多米诺骨牌对，除含有相同的两数字者外．)我们能选出多少多米诺

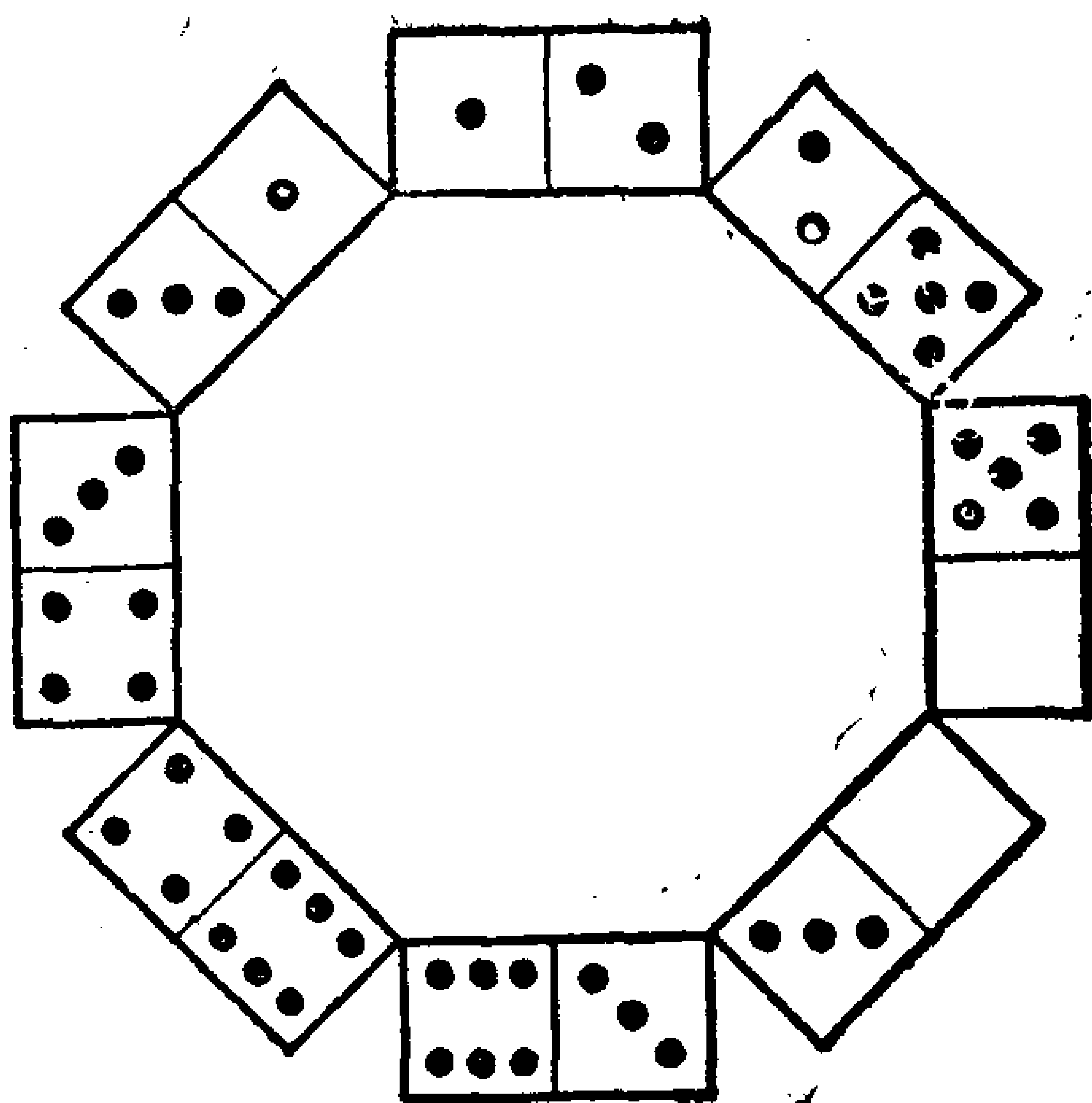


图 57

骨牌对？它们能否构成一环链？

4. 求证走过哥尼斯堡的每座桥恰好一次的散步是不可能的.

5. 考虑一个图，它至少含有一条边，且具有性质：图的每个顶点的次数是偶数. 求证能找到图的一些回路，使每条边恰含于这些回路之一.

练习 1 与练习 2 都有若干个解. 现在把指定的图 56 的画法说明如下：把原图看成是图 58 的图，按画图的顺序相继地列出它的各边. 以顶点对表示各边，把每一顶点对按路线通过的顺序列出. 即，$\{a, b\}$表示这两点之间的边，并且从 a 画到 b. 点 f 不作为图的一个顶点. 于是，一个图解就可以用此方式把它写出来，这里 f 不作为边的一个交点，即如图 59 所示. 如果加上笔不离纸的“限制”原图能画出，那么不加限制也是可能的，或许甚至有几种画法. 把 c 看作是顶点或者干脆把它看作是边$\{b, d\}$上的一点，显然并不重要；对于任一次数为 2 的顶点，这同样是对的.

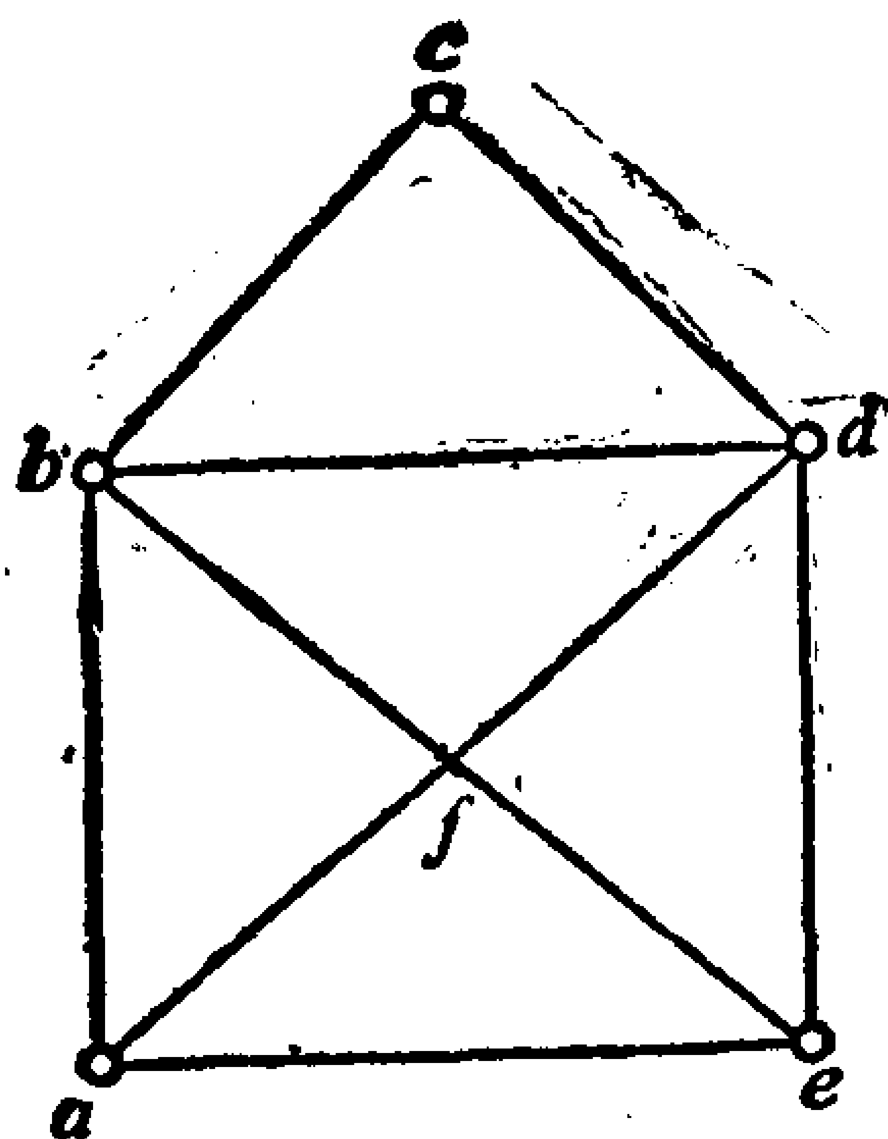


图 58

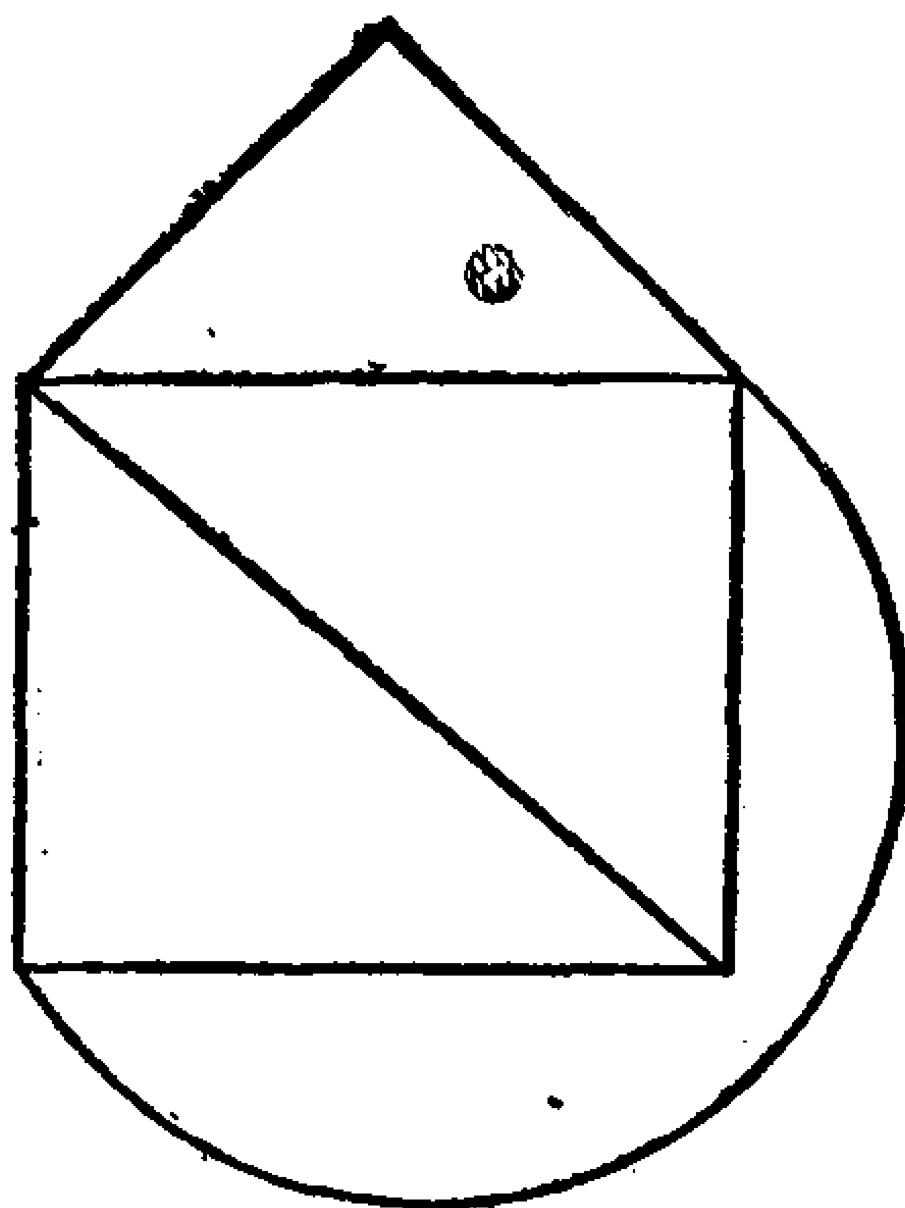


图 59

因此，经过图 58 的所有边的一个可能的路线是

$\{a, b\}, \{b, d\}, \{d, c\}, \{c, b\}, \{b, e\}, \{e, d\}, \{d, a\}, \{a, e\}$,

这也是练习 **1** 的一个解.

以数字 0, 1, 2, 3, 4, 5及 6, 表示具有 7 个顶点的完全图的各个顶点，则可把沿图 60 中 3 个回路的路线，写成如下的序列：

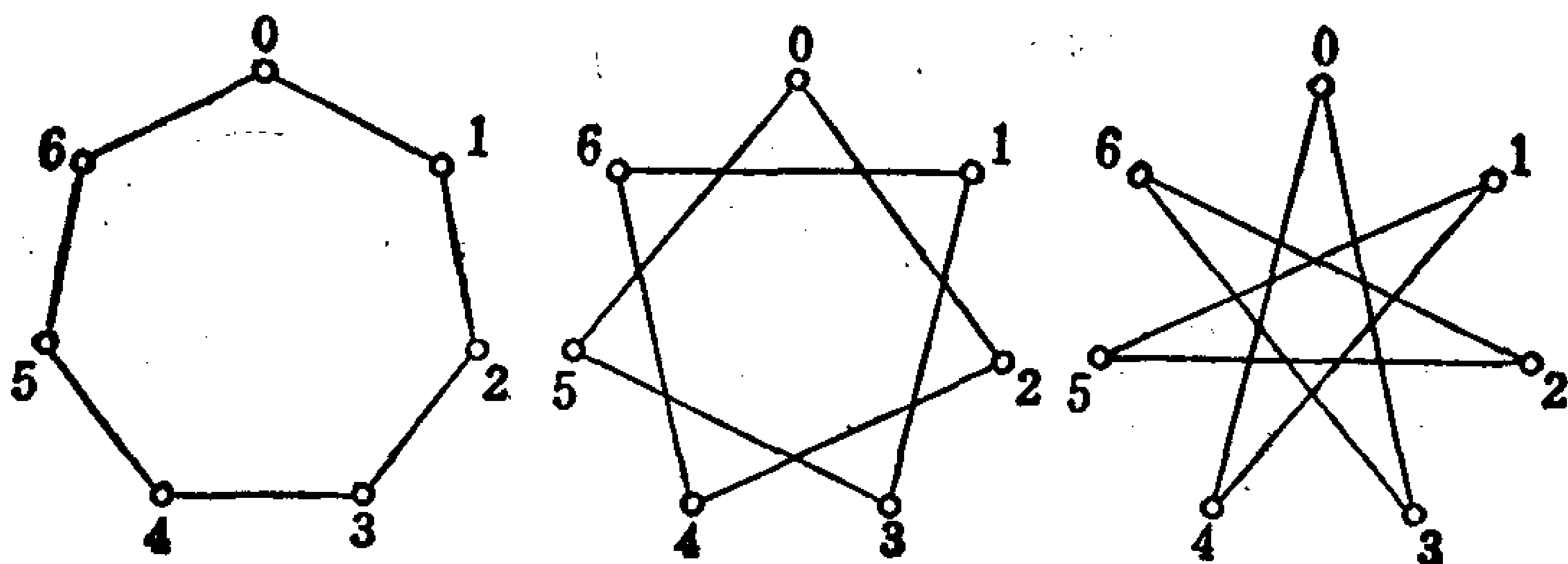


图 60

$\{0, 1\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{6, 0\}$,

$\{0, 2\}, \{2, 4\}, \{4, 6\}, \{6, 1\}, \{1, 3\}, \{3, 5\}, \{5, 0\}$,

$\{0, 3\}, \{3, 6\}, \{6, 2\}, \{2, 5\}, \{5, 1\}, \{1, 4\}, \{4, 0\}$.

只要画出此序列中的边，练习 **2** 自然得解.

这些数对也能用来表示多米诺(骨牌对)，每一骨牌对代替一

边．此时，一个序列就表示多米诺的一个环链．因为 0 到 6 间的所有不同数对都已出现于上述的序列中，问题 **3** 所求的多米诺数就等于 21，恰为具有 7 个顶点的完全图的边数，并且这些多米诺确实构成一环链，从而问题 **3** 得解．

从练习 **1** 与练习 **2** 的解可以看出：经过图的所有边的一个路线，通过一个顶点时，我们总是遇到有两条边关联于这个顶点．这些边的端点可以看成是互相伴随的．若我们的路线，如练习 **1**，终止于非始点的一个顶点，则边所遇到的最先的与最后的(顶点)不能是伴随的，但若终止于始点便是互相伴随的(如练习 **2**)，所以，若遍及图的所有边的一路线，经过每条边恰一次，则仅两顶点有奇次数，而在另一情况下它们也有偶次数，或说每个顶点的次数是偶数．图 55 的图有 4 个奇次数的顶点，所以图的边不能以上述的方式组成一条路线．于是哥尼斯堡市民的问题(问题 **4**)同时得解．

下列概念在练习 **1** 与练习 **2** 的解中已被证明是有用的：若图 G 的边的一个序列：$\{a_1, b_1\}$，$\{a_2, b_2\}\cdots$，$\{a_k, b_k\}$ 仅由不同的边组成，并且 $b_1=a_2$, $b_2=a_3$, $\cdots$, $b_{k-1}=a_k$，则此边的序列叫做 G 的**边列**．说边列是**闭的**，若 $b_k=a_1$；否则，是**开的**．（若 $k=1$，闭边列是单一的环．）图 G 的一个闭边列叫做 G 的一条**闭欧拉线**，如果它包含图 G 的全部边．**开欧拉线**的定义仿此．

笔不离纸地画一个图的方法可简化为一个有序的边列．

图 58 中图的一条开欧拉线已由练习 **1** 的解给出．在解练习 **2** 与问题 **3** 时，给出了具有 7 个顶点的完全图的一条闭欧拉线．前面的结果也可改述为：若图 G 中有一条闭欧拉线，则它的顶点全是偶次数的：若 G 有一开欧拉线，则除两顶点外其余顶点就是偶次数的．所以，图 55 既无闭的也无开的欧拉线．这一结论使问题 **4** 得解．

现在的问题是其逆是否为真．即，设图 G 至少含有一条边，全

部G的顶点是偶次数的(或G的顶点,除两个外,全是偶次数的).这些条件是否表明G具有一条闭欧拉线(或一条开欧拉线)?显然,不能.若一个图是不连通的,且其分支中至少有两个分支含有边,则此图既无闭的也无开的欧拉线.下面,如果只限于讨论连通图,我们证明上述条件是充分的.但我们先来解问题5.

假设图G,至少含有一条边,并设它只含有偶次数的顶点.删去G的孤立顶点,把得到的图记为G_0.G_0中每个顶点的次数至少为2.第一章的命题23表明G_0含有一个回路K_0,我们从G_0删去K_0,并删去经这么一删而变成孤立顶点的全部顶点.这样得到的新图G_1,其每个顶点的次数仍然至少为2.因此,G_1也包含回路K_1.我们继续这一过程,所得的回路的序列$K_0, K_1, K_2, \cdots$适合于问题5.

问题5的另一解法如下.图G_0的每个顶点的次数是偶数,且至少为2.次数为$2k$(这里,$k>1$)的一个顶点p"分离"为k个不同的顶点,其中每个顶点关联着两条边,这些边是关联着p的.(图61表示$k=3$时的这样一个"分离".)设从图G以所说的方式

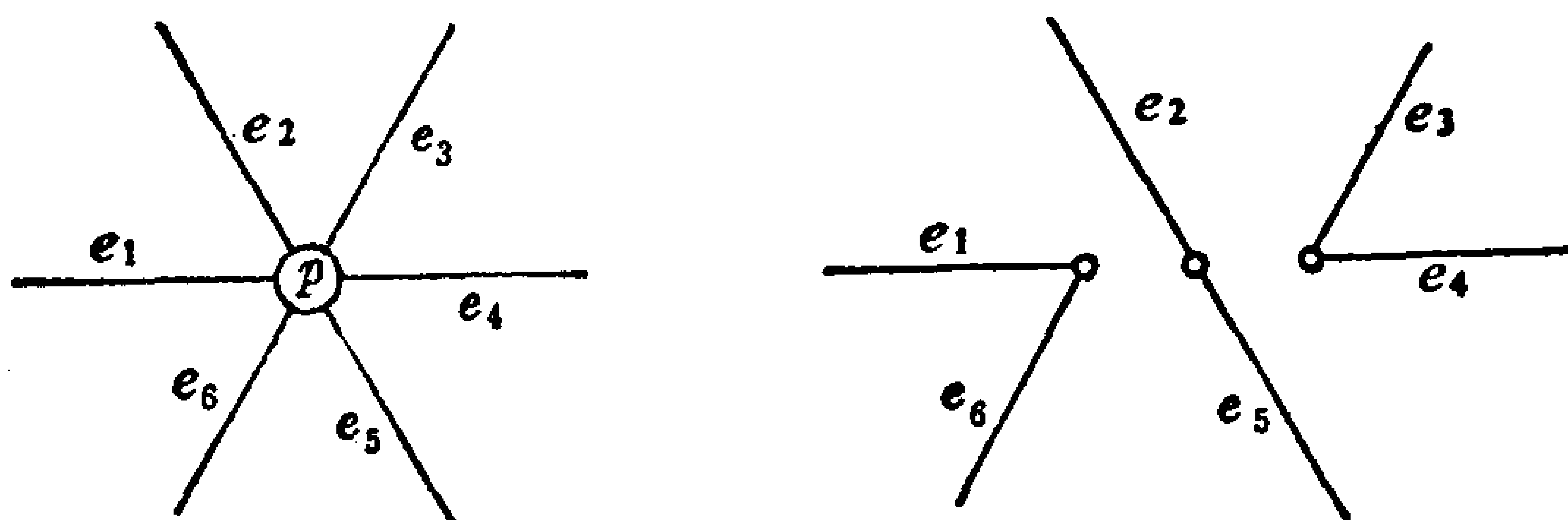


图 61

得到的图G_0'仅有次数为2的顶点.第一章的问题36表明G_0'的每个分支是一回路."G_0中的各个的回路"正好组成所求的回路组.

在问题5的第一个解中用到第一章的问题23,不但引用了命

题，而且还应用了它的第一个证明的推理．一个任意的至少含有一条边且由偶次顶点组成的连通图G的一条闭欧拉线，等同于G上的下述路线：我们从G的一个任意的顶点a_1出发，只沿着从未走过的边走，来到异于a_1的顶点，我们总能沿着新边继续走，因为每个顶点的次数是偶数，所以路线迟早只能终止于顶点a_1．于是，得到了G的一个闭边列E_1．若G的每一边都含于E_1，则E_1是一闭欧拉线．若G中有一不属于E_1的边，则我们把第一章的命题26应用于由E_1的边组成的G的子图，得到一条边，它不含于E_1但通过一个顶点a_2(a_2可能与a_1相重)与E_1联结．若我们从a_2出发沿着不在E_1中的边走，根据以上的推理，则我们只能停止于a_2．用E_2表示沿着此新路线的闭边列．现在我们重走第一条路线，沿着E_1的边，从a_1出发但止于顶点a_2．从这里，我们离开E_1走遍了E_2的边．当我们走完路线的这一部分(回到a_2)时，路线的另一部分，沿着E_1的全部边仍有待完成．这样，就得到了同时包含E_1与E_2的边的一个闭边列，这一扩大闭边列的方法最终产生一条闭欧拉线．

若一个连通图有且仅有两个奇次的顶点，则我们添加一条新边连结这两顶点．按照上面的推理，新图含有一闭欧拉线，删去那新添的边，就产生了原图的一条开欧拉线．

综合这些结果，我们有：

6. 设一个连通图至少含有一条边；若其每个顶点的次数是偶数，则图有闭欧拉线．反之，若一个无孤立顶点的图有一条闭欧拉线，则它是连通图且只含偶次的顶点．

7. 若一个连通图恰有两个奇次的顶点，则图中存在着一条开欧拉线．反之，若一个无孤立顶点的图有一条开欧拉线，则它是连通图且恰含两个奇次的顶点．

一个图，没有孤立顶点，若它具有一条闭欧拉线，有时称它为

欧拉图. 据命题6, 一个欧拉图总是连通的, 且只含有偶次的顶点.

有 向 图

由于任何无孤立顶点的图可以看作一个公路网的地图, 一个任意的边列可以认为是表示沿着某些街道走, 同一街道不走第二遍的一条路线. 边列的每一条边是沿着对应于街道的路线的一部分, 街道与边列的边有相同的出现顺序; 路线的方向由出现于边列的对应边的端点的顺序来规定. 因此, 若公路网的略图是一个欧拉图, 则公路组可由经过每边恰好一次的一条路线所行遍. 一个已知的欧拉线同样地规定了路线的方向. 但是, 如果如实地沿着这些公路行车, 则或许会由于单行道禁止车辆进入以及在某交叉口不许左拐或右拐而不能沿着规定的路线走.

按照通行的方向, 图的边需同时考虑方向(或定向), 就象第二章里以图表示电网络的情形一样, 边$\{a, b\}$的定向, 取决于写下的字母 a 与 b 的顺序. 因此, 为了表示它们的顺序是固定的, 改用圆括号来表示. **有向(定向的)**边(a, b)指的是, 关联于 a 与 b 的边, 从 a 到 b 地确定着它的方向; 即, 它的尾是 a, 而它的头是 b. 方向用沿着边的小箭头(如图 62)表示. 若 a 与 b 是不同的顶点, 则边 (a, b) 与 (b, a) 也是不同的. (类似于在直角坐标系下, 平面上的点(3, 5)与(5, 3)是不同的.) 一个图叫做**有向图**, 如果它只含有有向边.

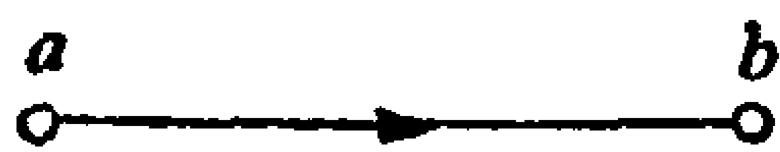


图 62

不含边的图也可以看作是一个有向图, 因为我们的定义对于这样的图并没有规定什么。显然, 这种"空"的条件(它什么也没有规定)是常见的. 为了唯一地描述某些条件, 图论中将常常利用它.

一个图的方向(或定向)指的是: 给它的每个边以定向. $\vec{G}$ 表

示给图 G 以一个特定的方向以后所得的一个有向图.

有向图的一个边列的定义与一个无向图的边列的定义类似,即,若一个有向图 $\vec{G}$ 的边的一个序列,$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \cdots, (a_k, b_k)$ 仅含 $\vec{G}$ 的不同的边,且 $b_1 = a_2, b_2 = a_3, \cdots, b_{k-1} = a_k$,则序列叫做 $\vec{G}$ 的一个**边列**. 若 $b_k = a_1$,则说边列是**闭的**,否则是**开的**. $\vec{G}$ 的一个闭(开)边列叫做闭(开)**欧拉线**,如果它含有 $\vec{G}$ 的全部边. 一个有向图的边列,按照它们的方向,规定了沿着图的所有这些边的一些路线.

一个有向图叫做一个**有向路**,如果它是一条开欧拉线,并且在删去边的定向后它是一条路. 类似地,一个有向图叫做一个**有向回路**,如果它是一条闭欧拉线,并且在删去边的定向后它是一个回路. 让我们考察图 63 的 4 个有向图. 仅左上图是有向路及右上图是有向回路.

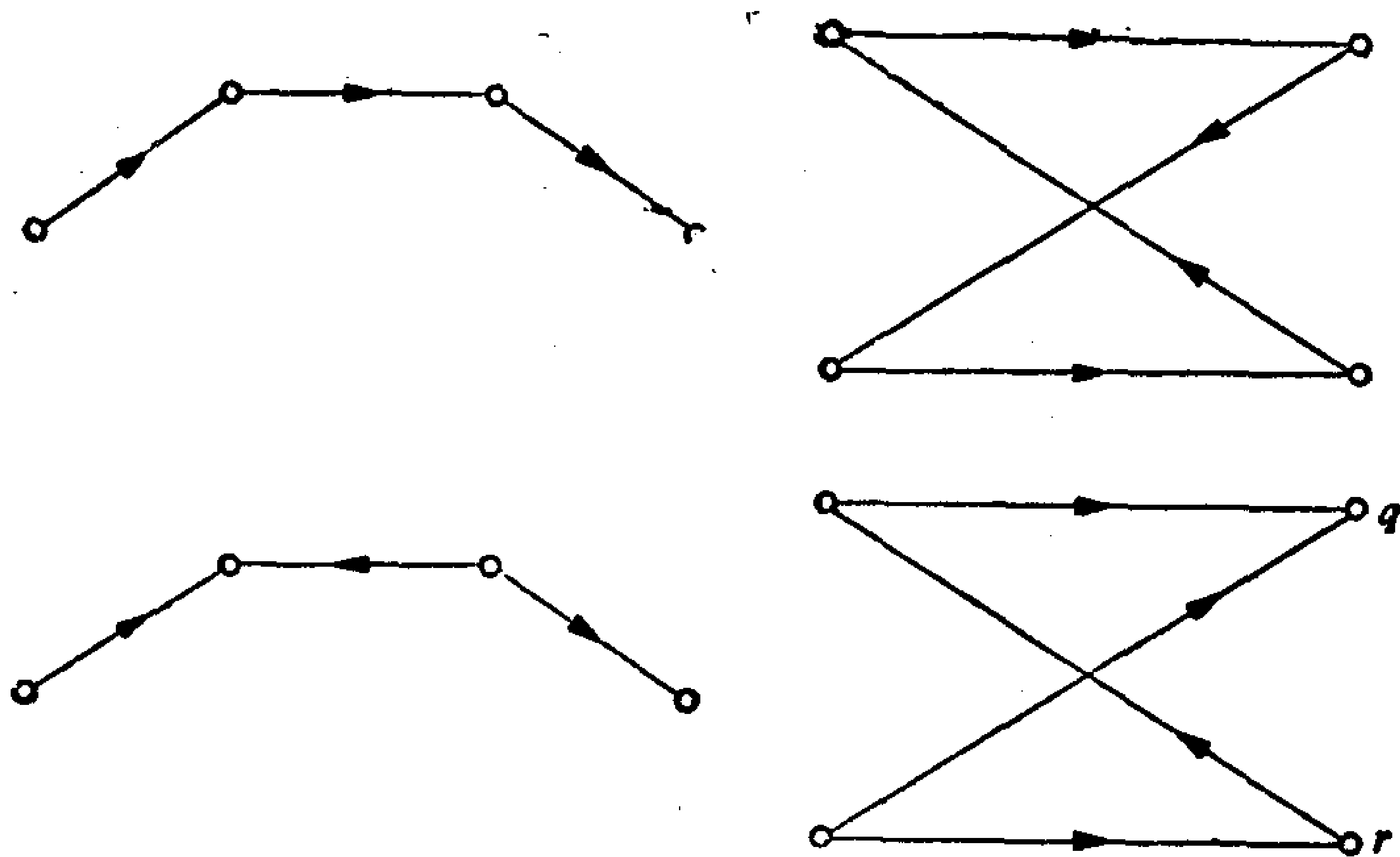


图 63

若图 $\vec{G}$ 的一个顶点 p 是 i 条边的尾与 j 条边的头,就说 p 的**出次数**是 i 与**入次数**是 j. 我们采用下列记法:

$$\varphi_{\text{out}}(p) = i;\quad \varphi_{\text{in}}(p) = j.$$

例如,对于图 63 的顶点 q 及 r,

$$\varphi_{out}(q)=0,\ \varphi_{in}(q)=2,\ \varphi_{out}(r)=\varphi_{in}(r)=1.$$

若以 $\varphi(p)$ 表示 G 的一个顶点 p 的次数，则显然

$$\varphi_{out}(p)+\varphi_{in}(p)=\varphi(p).$$

若把有向路 $\vec{L}$ 的各顶点记为 $a_1, a_2, \cdots, a_k$（同于沿 $\vec{L}$ 的开欧拉线中出现的顺序），则说 a_k 是从 a_1 沿 $\vec{L}$ **可到达的**；我们也常说 $\vec{L}$ 是一条从 a 通向 b 的路；称 a_1 为 $\vec{L}$ 的**始点**，具有性质：$\varphi_{in}(a_1)=0$ 及 $\varphi_{out}(a_1)=1$；称 a_k 为 $\vec{L}$ 的**终点**，具有性质：$\varphi_{in}(a_k)=1$ 及 $\varphi_{out}(a_k)=0$；$a_2, a_3, \cdots, a_{k-1}$ 都叫 $\vec{L}$ 的**内点**，具有性质：$\varphi_{in}(a_m)=\varphi_{out}(a_m)=1$. 若 $b_1, b_2, \cdots, b_k$ 是一个有向回路的顶点，则

$$\varphi_{in}(b_m)=\varphi_{out}(b_m)=1 \qquad (m=1, 2, \cdots, k).$$

某一公路网的许可的通行情况（不违反交通规则的）可由一个合适的有向图表示如下. 考虑一个任意的公路网，它只包含单行车道. 显然一个双行车道可以看成是两个平行的单行车道. 允许的通行方向可表示为下列规则：只沿着边且只按给定的方向行进. 但是它仍然未能表明一个U形转弯或别的特定的转弯是否允许可的问题. 在双行车道内不必考虑是否许可作U形转弯的问题，因为这不是交通检查上的现实问题. 如果在任一交叉路口允许作任意方向的转弯，则我们的图已说明所有许可的通行的情况；所以，把它叫做公路网的**通行图**. 如果往某方向转弯是被禁止的，则需应用下列程序：我们暂不管禁止转弯的问题，先从公路网得到图；删去对应于交叉路口的顶点，而在边的“自由”端上添加新的顶点；再添加新的有向边联结对应的顶点，使表示出只能作许可的转弯. 作为一个例子（在关于交通规则的所有问题中，总假定是靠右走的——英译者注）考虑图 64 的十字路口及公路网的图的对应部分. 可能的行进方向已在公路上标出. 在横的车道上的行进一定不作左转弯，而对纵的“直”车道则不加限制，即许可在十字路口照直行进、左或右转弯以至作U形转弯. 白线表示公路的中心线，这是

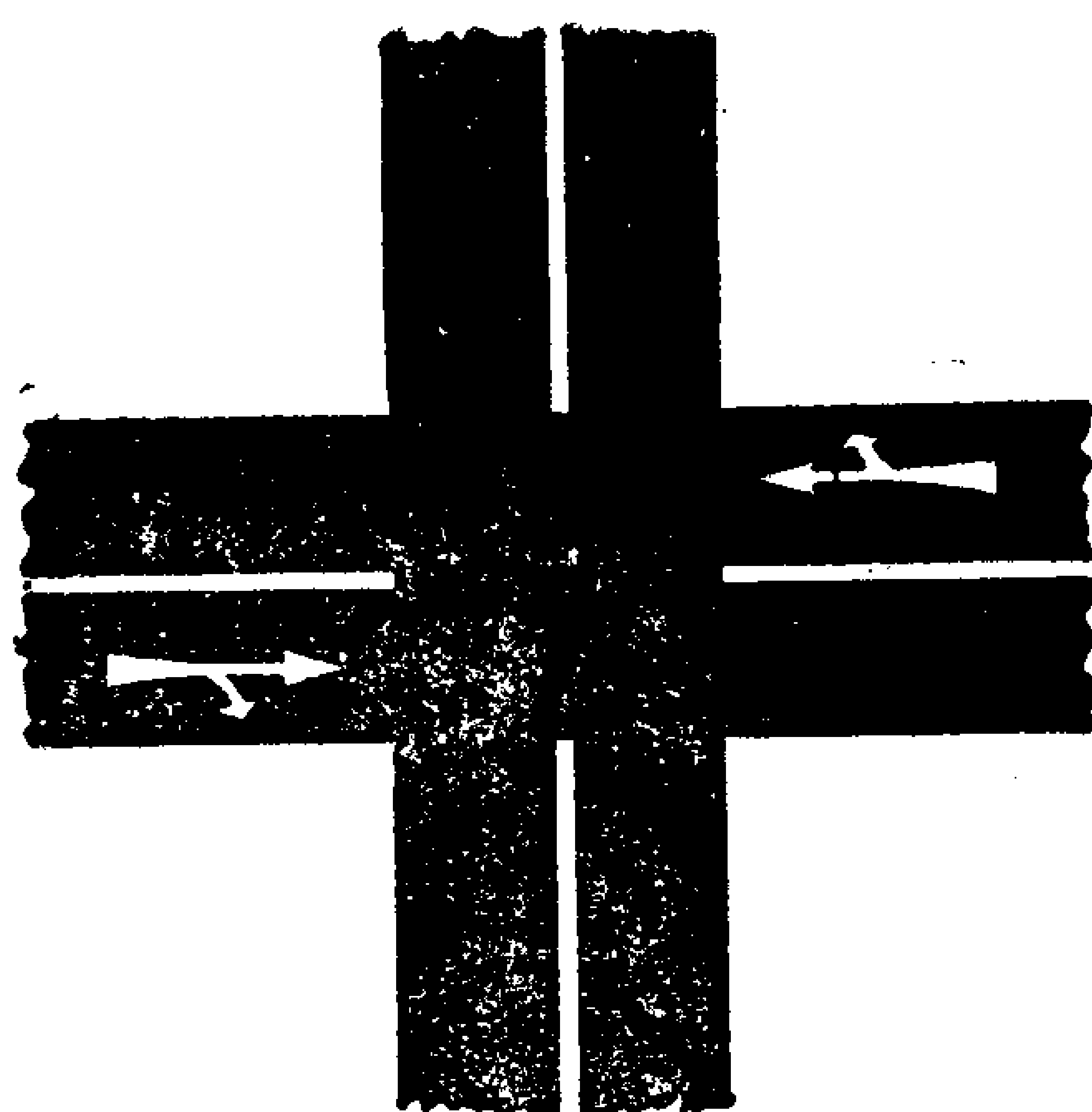


图 64

决不许穿越的；这就排除了在到达十字路口以前及以后作U形转弯——这情况早已被略去．于是，图 65 表示出通行图的这一部分的最后形式．

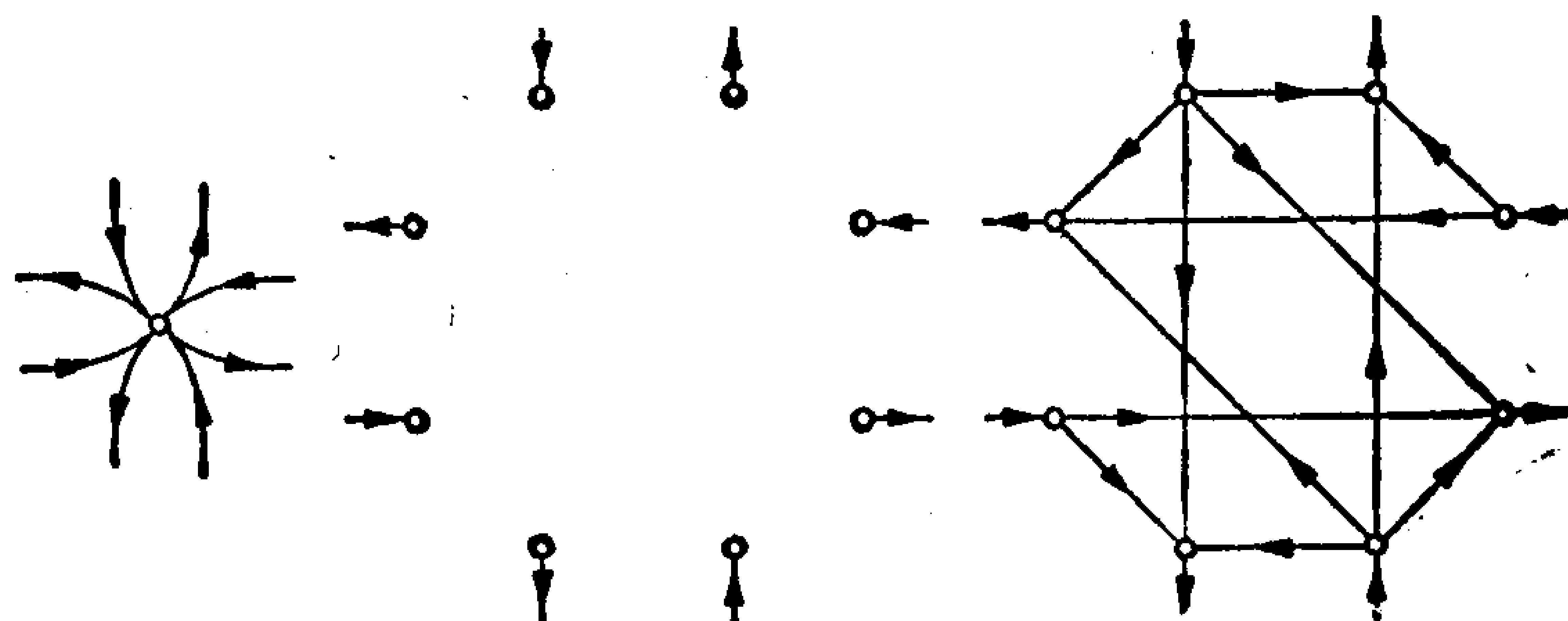


图 65

在现代大城市的交通中，单行车道的重要性正日益增加．在某些车道上，单向通行的规定，必须考虑到通行条件的实现问题，即，能否从城市的任一点，不违反交通规则地到达任何另一点．假设在任一十字路口允许作任方向的转弯，问题是这条件能否实现．在用图说明通行路线时，问题取如下形式：能否给图的边以定向，

使每个顶点从每一其余顶点沿有向路是可达到的. 一个有向图, 如果此通行条件得以满足, 则叫做**强连通图**. 为了给一个图的边以定向而获得一个强连通图, 原图必须是连通的, 但此条件通常是不充分的. (若一个图不含任何的边, 条件倒是充分的, 因为此时通行条件也是空的.) 若, 例如, 河岸与小岛仅以一桥相联结, 且若在此桥上只许单向通行, 则要么来到, 要么离开小岛, 在不违反交通规则的情况下, 两者中仅一者是可能的.

一个连通图的边, 若把它删去, 就使图不再连通, 则称此边为**桥**. 若给这样的图的边以定向, 那么通行条件总是不能得到满足的.

命题 25 与 26(第一章的) 刻画了图的"连通"的性质. 类似地, 下列命题刻画了这样的有向图的性质: 若略去边的方向以后, 图仍然是连通的. (证明也类似.)

8. 若 $\vec{G}$ 是从连通图 G 给其边以定向得到的, 又若 $\vec{G}'$ 是 $\vec{G}$ 的子图不包含 $\vec{G}$ 的全部的边, 则 $\vec{G}$ 必至少含一有向边, 它不属于 $\vec{G}'$, 但它的尾或它的头在 $\vec{G}'$ 内.

下列命题类似于第一章的命题 25, 刻画一个有向图的强连通性质. 证明也类似, 但需要以两条有向边替换一条.

9. 若一个强连通图 $\vec{G}$ 的子图 $\vec{G}'$, 不包含 $\vec{G}$ 的全部的顶点, 则能找到 $\vec{G}$ 的两边, 它们不属于 $\vec{G}'$, 而每条边的尾(或头) 在 $\vec{G}'$ 内, 但它的头(或尾, 分别地)不在 $\vec{G}'$ 内.

练　　习

10. 能否给图 66 的边以定向, 使通行条件得以满足?

11. 给图 66 的边以任意定向, 试确定其顶点的入次和, 出次和及其边数.

问　　题

12. 设边 e 是连通图 G 的一座桥. 求证: e 不属于 G 的任一回路.

13. 求证命题 **12** 之逆也成立;即, 若 G 中没有任何回路包含 e, 则 e 是 G 的一座桥.

14. 在图 66 上添加一条边 $\{a, d\}$, 并给新图的边以定向, 使它成为强连通图.

15. 一个有向图, 至少含有一条边, 且其每个顶点的入次数与出次数相等. 试证明: 能找出一个有向回路组, 使其每条边恰含于回路之一.

16. 求证: 一个任意的有向完全图, 必有一个顶点具有如下性质: 可从这个顶点沿长为 1 或 2 的有向路到达图的每个顶点.

由于图 66 的图中, 边 $\{g, h\}$ 是一座桥, 给边以定向, 决不能使通行条件得以满足.

练习 **11** 的三个未知数的每个的值是 16, 与边的方向无关. 这一事实并非偶然, 因为每添一条边使出次数添加 1, 入次数也添加 1. 于是有

17. 任一有向图中, 顶点的出次数和与入次数和都等于图的边数.

若问题 **12** 的边 e 属于 G 的一个回路, 则把它删去并不改变图的连通性(参看第二章的问题 **3**). 因此, e 决不能是 G 的一座桥.

为了解问题 **13**, 假定连通图 G 中没有含边 $e=\{a, b\}$ 的任何回路. 因此, G 中使顶点 a 与 b 连通的每条路必包含边 e, 因为, 否则把 e 联结到路上就会产生一个回路. 若从 G 中删去 e, 所得的图 G' 是不连通的, 因为不能从 b 沿着 G' 的路到达 a. 所以, e 是

G 的一座桥.

在图 66 的图上添加一条边，象在问题 **14** 中那样，就得到一个

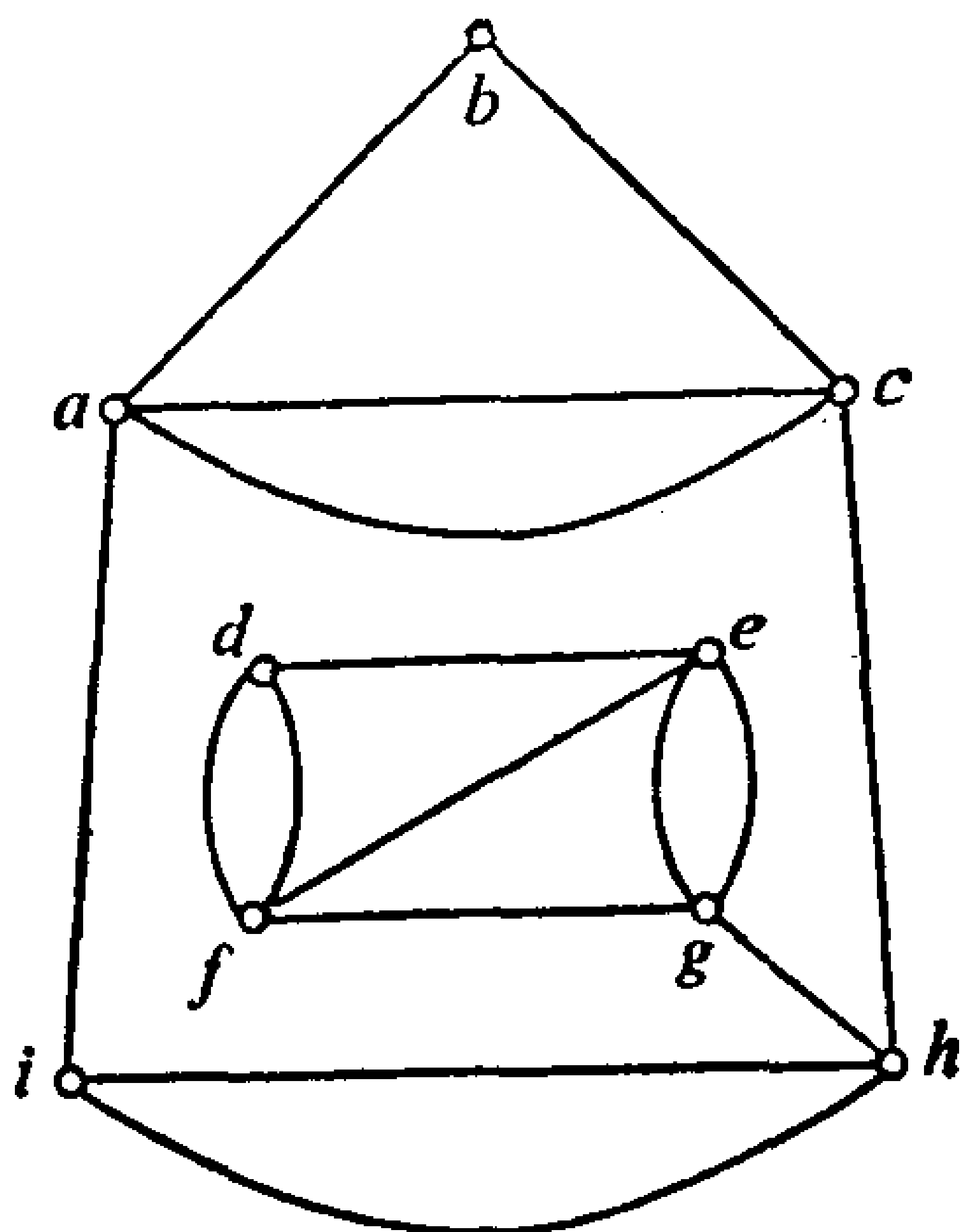


图 66

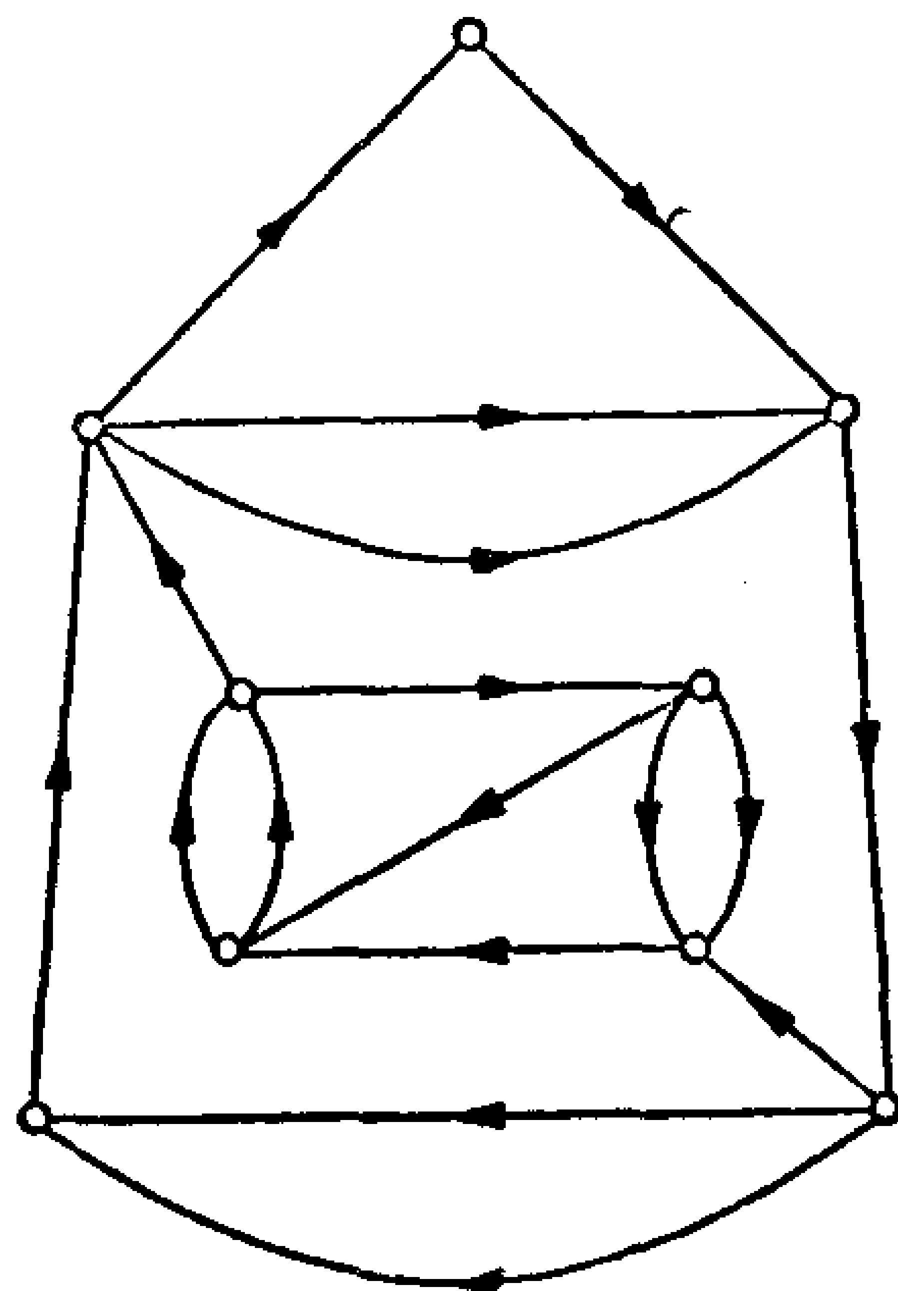


图 67

无桥的图. 它的边的一个合适的定向如图 67 所示. 一般地:

18. 可以给一个任意的无桥的连通图的边以定向，使它成为一个强连通图.

命题的证明包括下列几步: 首先，考虑连通图 G 的一个子图，无桥，且其边能被定向，使它成为一个强连通图. 这样的子图必然存在；例如，单个顶点的图，显然满足这些"空"的要求. 若此子图不包含 G 的全部边，则还有一些边能添去进去而使定理的陈述仍然正确. 使这过程重复适当的次数，就能得到一个图，它不能再扩大. 这图与 G 相重.

为了简化这些步骤，我们先考虑一个子图，它不能再扩大，即 G 的子图 G'，它有最大的边数，并且满足定理的陈述.

从最大出发的方法 应用它，使我们的许多定理的证明得以简化. 类似地，也经常使用**从最小出发的方法**.

回到我们的问题，须证图 G' 重合于 G. G' 的最大性表明一条

两个端点属于G'的边一定属于G'，因此，若G'不同于G，则它有一顶点不属于G'. 第一章的命题**25**表明G必含有一边$e=\{a,b\}$，使a属于G'而b不是. 按问题13, G中无桥表明了G中存在含边e的一回路K(见图68; 其中子图G'恰由虚线围出). 让我们沿着e从a通向b，并继续沿K的边直至到达属于G'的一顶点c，(参

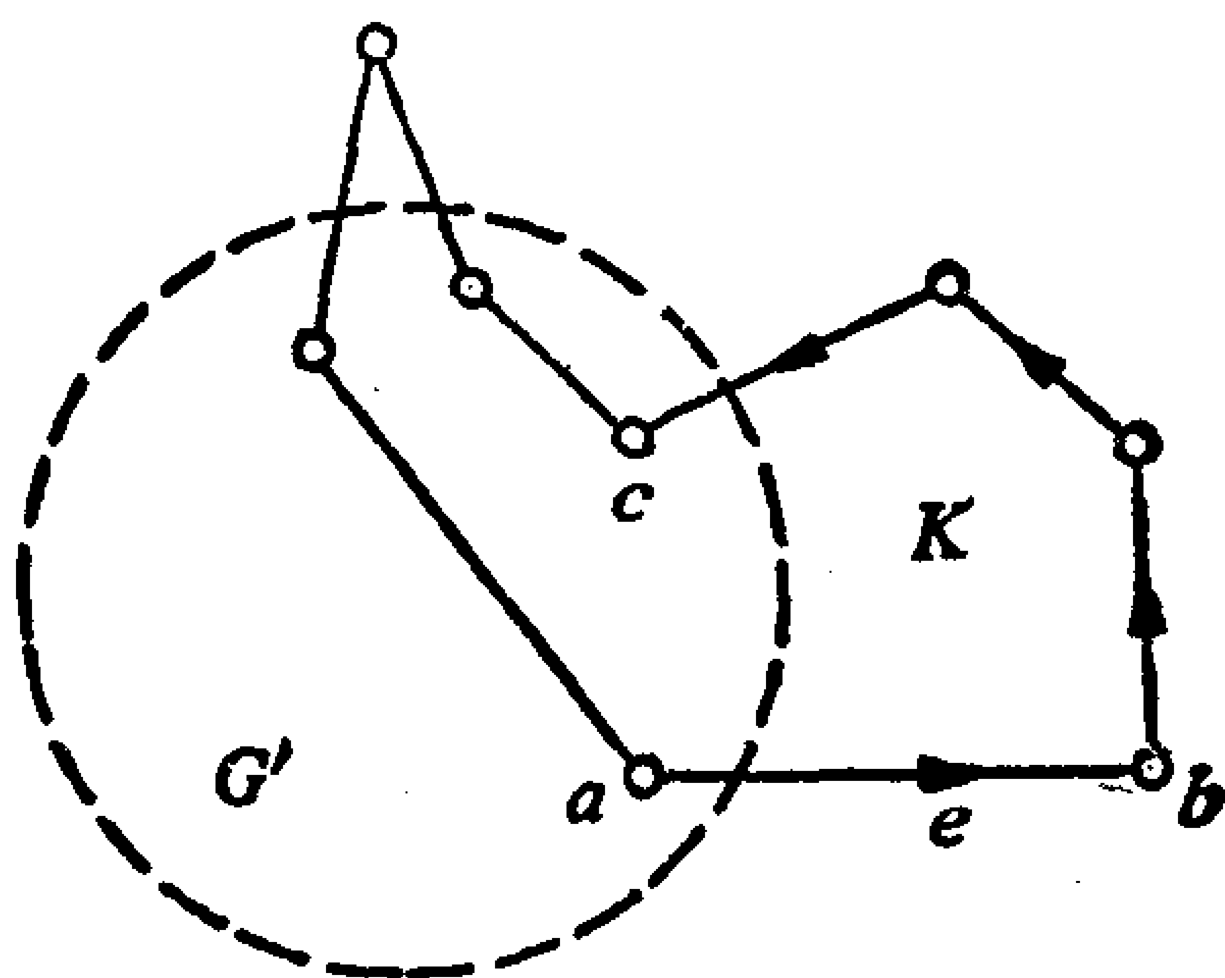


图 68

看第一章末的最先接触的点). 这样一个顶点总存在(它可能与a相重). 把K的这些边与顶点都添加到G'上，并考虑所得的图G''. G'的每边可加以定向，使$\vec{G}'$是强连通的. 接着我们按这方向给K的每条边加以定向. 设$\vec{G}''$是由G''通过给K的边以定向及G'的定向$\vec{G}'$而得来的有向图. 可以证明$\vec{G}''$是强连通的. 即，$\vec{G}''$的每一顶点f可以从任一顶点d沿着一有向路所到达. 若两顶点d与f都属于$\vec{G}'$，则由$\vec{G}'$的性质知道这路是存在的. 若d属于$\vec{G}'$，但f不是. 则沿着在$\vec{G}'$内的一有向路，从d先到达a，再从a沿K的边到达f. 所以从d沿着$\vec{G}''$内的有向路能达到f. 余下两种情况，当f属于$\vec{G}'$而d不是时，或当两者都不属于$\vec{G}'$时，可类似地加以讨论. 由于$\vec{G}'$可扩大到$\vec{G}''$，$\vec{G}''$的强连通性质与G'的最大性相矛盾. 所以G'不能不同于G，命题得证.

命题**15**是问题**5**关于有向图的一个推广. 把推理应用于第一章命题**23**的第一解、再一次地利用: 从图的任一边出发，沿着边

走，到达不同于出发点的任意一个顶点，由于顶点是同样多的边的头与尾我们总能继续下去．沿着一个有向回路的路，在我们到达一个已经有的顶点以后便完结．若我们删去这有向回路的边，所得图的每个顶点的入次数仍然等于同一顶点的出次数；因此，这个过程可以重复．由被删去的一些回路所形成的组恰有所求的性质．

按照这一推理（参看命题 **6** 的证明），我们获得一个关于有向图的命题．

19. 有向图 $\vec{G}$，不是单个孤立的顶点，若其每个顶点的入次数等于同一顶点的出次数，并假定 G 是连通的，则 $\vec{G}$ 含有一条闭欧拉线．反之，若一个无孤立顶点的有向图 $\vec{G}$，具有一条闭欧拉线，则 G 是连通的，且 $\vec{G}$ 的每个顶点的次数等于同一顶点的出次数．

命题 **6** 确定了具有下述性质的图：可以走遍它的边，经过每边恰好一次，并且回到出发点．当沿一个任意的连通图的边走时，所有它的边都被包含在终止于出发点的一条路线中．因为一个连通图的任一顶点，能从任一别的顶点到达．不过，这路线常常是不止一次地通过某条边．能否得到经过每条边都不多于两次呢？下述命题表明这是可以的．

20. 设一连通图，至少含有一条边．存在一条路线，走遍该图的全部边，通过每条边恰好两次，并且回到始点，这条路线还可以有如下性质：每条边按每个方向恰经过一次．

我们把连通图 G 的每一条边都变成两条边，则所得的图 G' 也是连通的，并且其任一顶点的次数是偶数．所以 G' 是欧拉图．于是 G' 的闭欧拉线规定出一条路线，它以确定的方式通过 G 的所有的边．让我们给图 G 的边以任意的定向．当我们构造 G' 时，我们给对应的新边以相反的方向．所得的一个有向图 $\vec{G}'$，满足命题 **19** 第一部分的条件，所以有一闭欧拉线．这 $\vec{G}'$ 的闭欧拉线规定出 G 的全部边上的一条路线，使每一边按每个方向，恰通过一次．

问题 16 的命题对于仅含一个顶点的完全图是正确的，因为“空”条件当然被满足．所以，假定 $\vec{T}$ 是至少含有两个顶点的有向完全图，且 p 是具有极大出次数的顶点之一．我们来考虑以 p 为尾的那些边，并以 p_1，p_2，…，p_k 记这些边的头．可以证明顶点 p 适合命题的要求．假设不然，$\vec{T}$ 有一顶点 q，使下列各边

$$(p,q),(p_1,q),(p_2,q),\cdots,(p_k,q)$$

中没有一边是属于图的．因为 T 的任两顶点是邻接的，于是下列各边（也如图 69 所示）必存在于 $\vec{T}$ 中：

$$(q,p),(q,p_1),(q,p_2),\cdots,(q,p_k).$$

所以，顶点 q 至少是 $k+1$ 条边的尾，这矛盾于 p 的极大性．

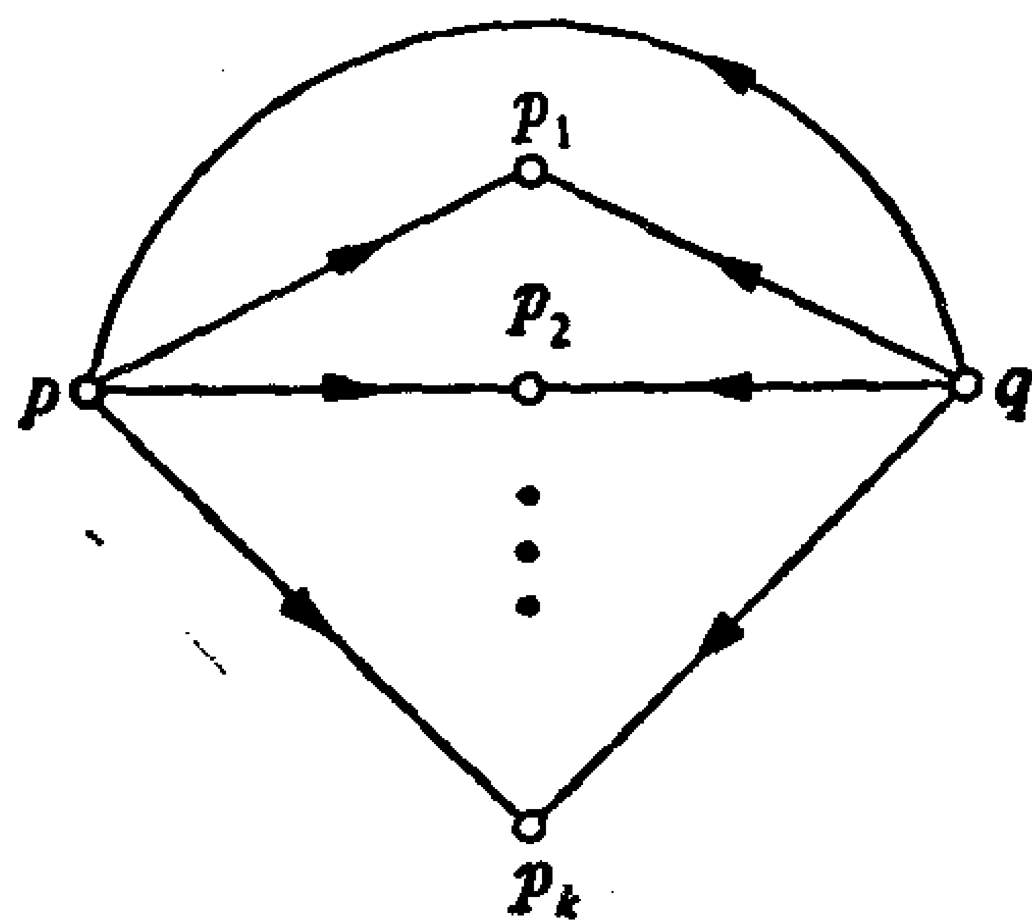


图 69

问题 16 应用数学归纳法的另一证明，现介绍如下．以 T_n 表示具有 n 个顶点的完全图．对于任意的 $\vec{T}_2$ 命题显然成立．设对于具有 n 个顶点的任有向完全图也成立．需证对任 $\vec{T}_{n+1}$ 也成立．若删去图 $\vec{T}_{n+1}$ 的任一顶点 q 以及与 q 关联的边．由假设，所得的图 $\vec{T}_n$ 有所需的性质．令 p 是图 $\vec{T}_n$ 内满足问题条件的顶点．p 是某些边的尾．我们以 $p_1,p_2,\cdots,p_k$ 表示它们的头．则若 r 是 $\vec{T}_n$ 的任一顶点，要么边 (p,r)，要么边 (p_i,r) 之一出现于 $\vec{T}_n$ 中．若 p 在图 $\vec{T}_{n+1}$ 内不符合问题的要求，则下列各边中没有一条会出现于 $\vec{T}_{n+1}$ 中：

$$(p,q),(p_1,q),(p_2,q),\cdots,(p_k,q),$$

这表明存在下列的边

$$(q,p),(q,p_1),(q,p_2),\cdots,(q,p_k).$$

因为，对于 $\vec{T}_n$ 的任一顶点 r，要么边 (p,r)，要么边 (p_i,r) 之一出

现于 $\vec{T}_{n+1}$. q 被证明是 $\vec{T}_{n+1}$ 内的一个适合命题要求的顶点.

关于无限图的注

可以把平面上的两坐标轴看成一个图，使得轴上对应于整数的点为图的顶点(参看图 70). 这图由无穷多的顶点与边组成（在定义一个图时，并未排除顶点或边为无穷多的可能性).

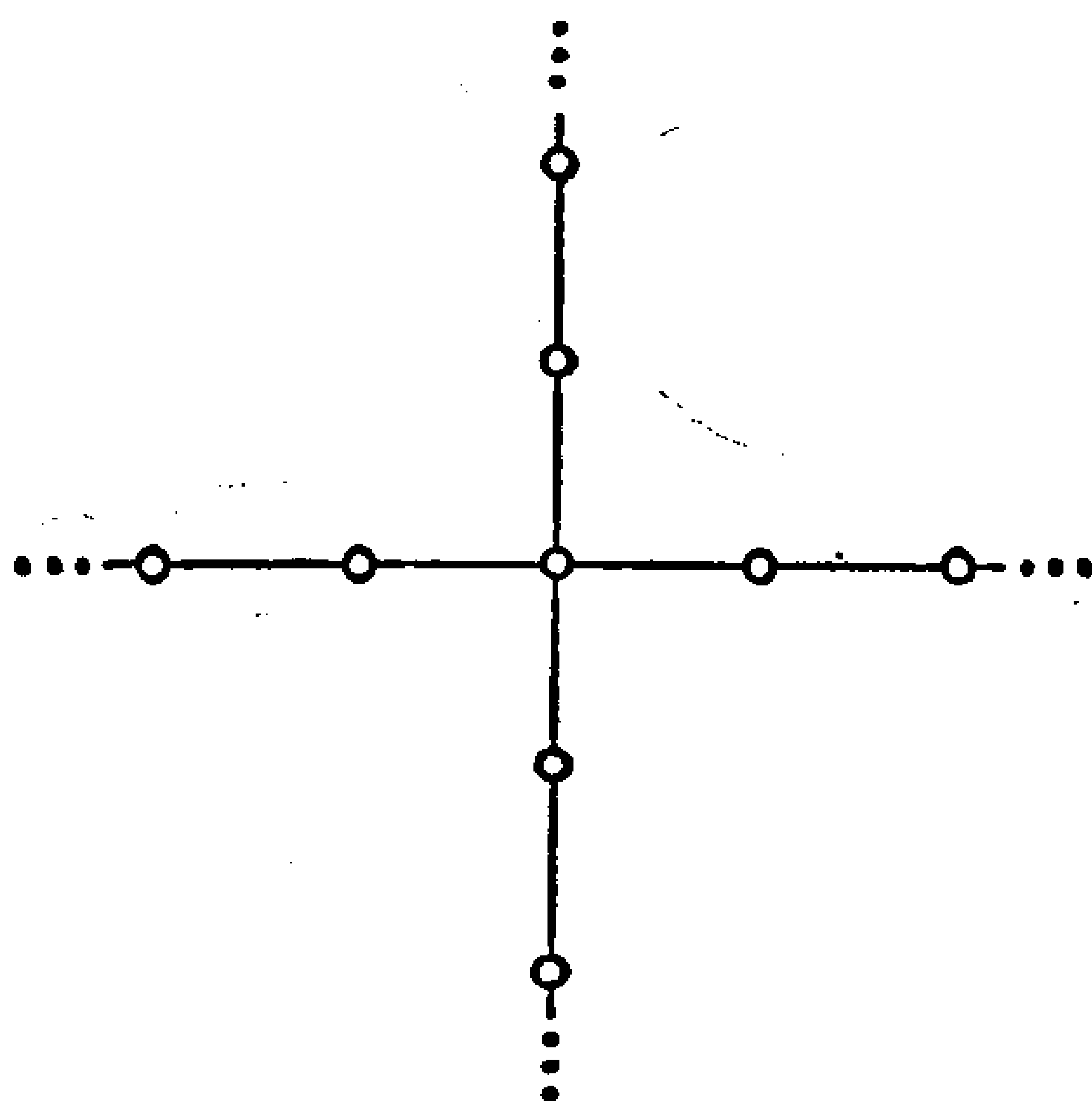


图 70

这图是连通的，其中有一个次数为 4 的顶点(即对应于原点的顶点)，而其余每个顶点的次数为 2. 无论如何，图不含闭欧拉线，因为从原点出发的任何边列决不能回到原点.（自然，边列的概念必须推广到向一方或向两方无限延长的情形.）

称一个图是**无限图**，如果它含有无穷多的顶点或边；否则就叫**有限图**.

于是，命题 6 的第一部分对无限图不成立. 给出的证明不再适用，因为假定了过程于有限步后结束，而对于无限图不能作这个假定. 图 70 使我们注意到以下事实：每个顶点的次数至少是 2，不是必须有回路存在. 对于有限图，这可是必然的(参看第一章问

题 23)．若考虑从原点出发的一个半轴，则对应的图有单独一个奇次顶点．这在有限图中是不可能的(第一章的命题 9)．问题 16 的命题对于无限图是不成立的．以 p_1，p_2，p_3，…表示一无限完全图的顶点，按下述方式给边以定向：使每个边的尾的下标高于同一边的头的下标．这样的定向产生了一个图．其中，离开一个顶点，(沿着已给的方向)由此能到到达的顶点只有有限个，即具有较低指标的顶点.

不过，在前几节中，也有一些命题对于无限图仍然是正确的，例如，问题 12 及问题 13．只考虑图 70 中的一个轴，对应的图(参看图 71)的边，沿着如下的边列

$$\cdots,\{-2,-1\},\{-1,0\},\{0,1\},\{1,2\},\cdots$$

走遍了对应图（参看图 71）的边，此边列"按两个方向都是无穷

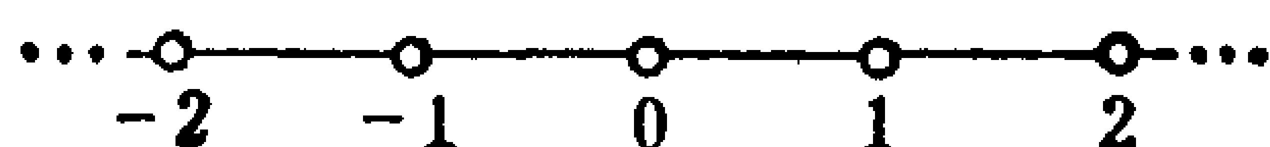
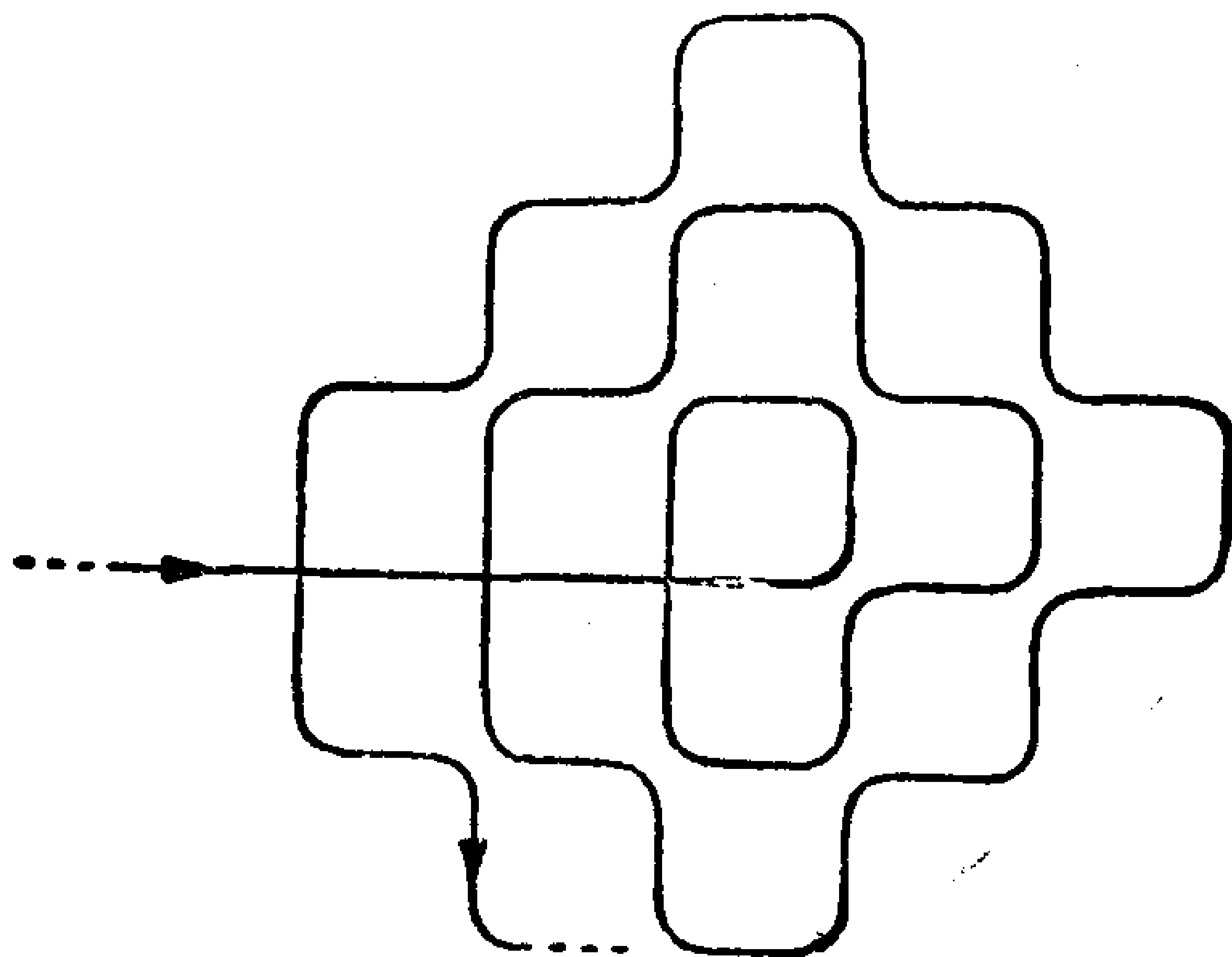


图 71

的"．这个边的序列可以认为是图 71 的无限图的欧拉线．在此意义下，还有别的图也是欧拉图．考虑二维直角坐标系，对于任一整数 k，画出直线 $x=k$ 及 $y=k$．坐标为整数的点作为此图（无穷方格纸)的顶点．此图中，如图 72 所示的边的序列是图的一个


图 72

欧拉线.

前述各例表明，对于无限图，作进一步的研究是必要的. 在此，我们不拟作更多的讨论. 以下若非特别声明是无限图时，总假定图是有限的.

在迷宫里

克里特岛神话般的米诺斯王的妻子，是叫做米诺托人头牛身怪物的母亲. 希腊巧匠第斗娄建造了一座著名的迷宫，那怪物就被安稳地圈在里头. 作为给米诺斯王的贡品的一部分，一些雅典的童男与童女被送去给怪物米诺托吞食. 忒修斯，雅典王子，决心顶替牺牲品之一去杀死米诺托. 公主亚丽阿特涅把忒修斯找到一边，给了他一个线球，告诉他："把线的一头栓在迷宫的大门上；你呢，一边走，一边放开线球". 忒修斯杀死了怪物，顺着原路返回，带上美丽的亚丽阿特涅返回希腊.

米诺斯迷宫的故事只是借古钱币的记载留传下来的，但是奥伦治的威廉王的迷宫(建于 1690 年)却至今还屹立着. 图 73 所示为其平面图.

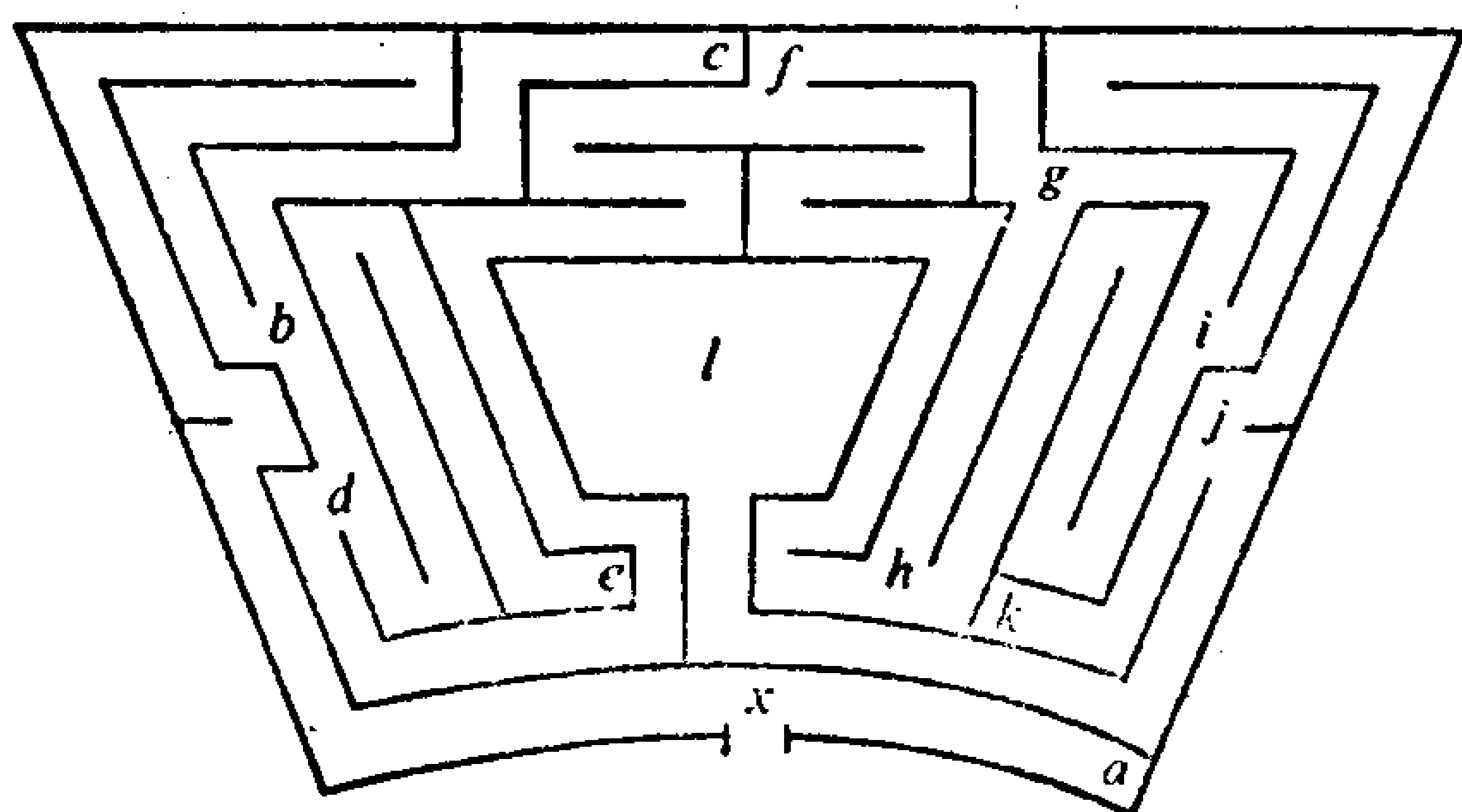


图 73

一座迷宫是带有一些死角与岔口的回廊，如果把死胡同的底端及回廊的分岔点作为图的顶点，而把每一段回廊本身作为图的

边，那么在迷宫内的一次行走可模拟为沿着图的边串成的一条路线.（一个人在迷宫中行走，他是不知道这个图的.）尽可能简单地画出这个图，就可以使这迷宫一目了然. 例如，图 74 表示对应于图 73 的迷宫的图. 在此图中，顶点 x 是唯一的次数为 2 的顶点. 为了使图简化，我们只把回廊的其次数为 3 的岔口作为顶点，即，如果两个回廊关联于一个点，这个点，从路线的观点看来是无关紧要的，那么这两段回廊恰好可以看成是一段回廊.

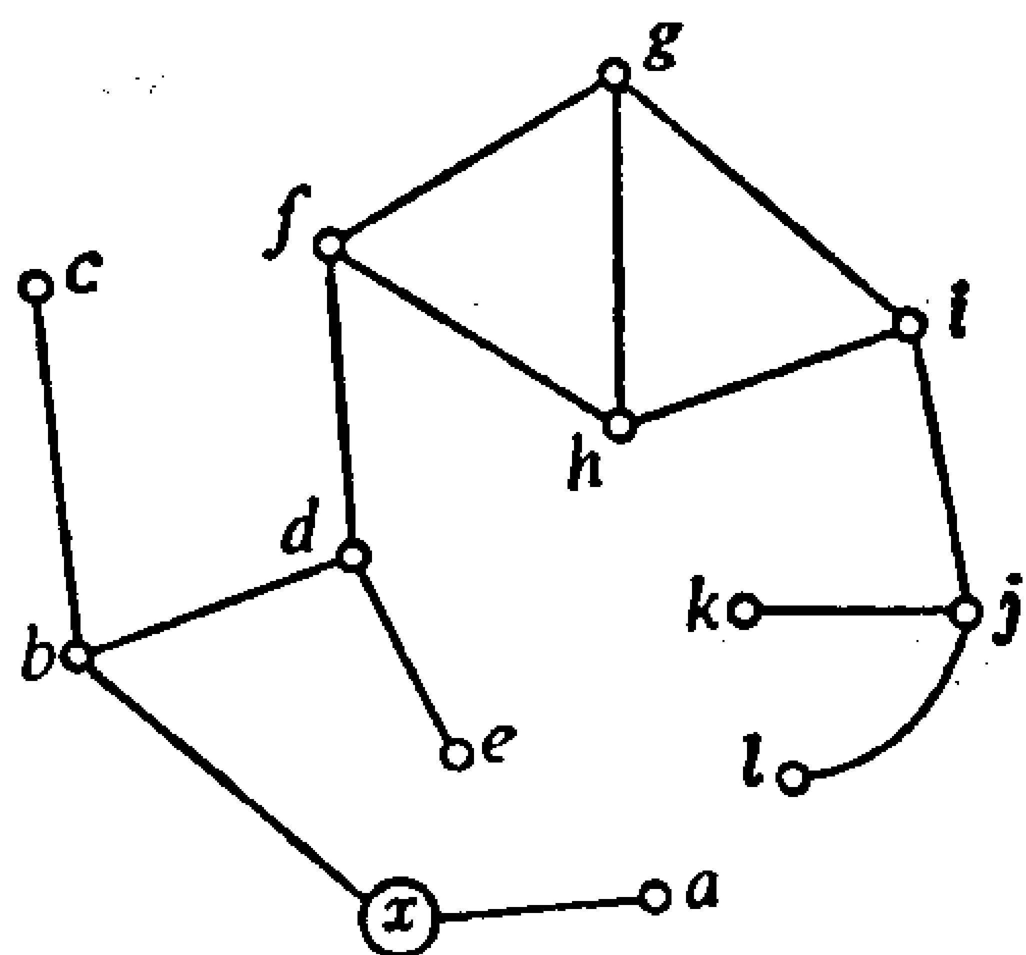


图 74

按照希腊神话，任务是从一个给定的顶点（迷宫的入口处）出发在图上行走，经过每条边至少一次，最后回到始点. 要求一个合适的"迷宫规则"以避免在回路上兜圈.（即便是使用了线球，忒修斯也需要一个计划以便找到米诺托，然后，他还须找到退路.）如所求的路线需经过每条边，所考虑的图必须是连通的. 此条件也是充分的，甚至还有条件：经过每边恰好两次（参看命题 20）. 双重化图的边，考虑此新图的闭欧拉线提供了一个走迷宫的规则. 但图是未知的，就象忒修斯不知道迷宫的图一样. 需要的是"局部的"条件，就是说，只处于某通行位置的条件下，但仍然能使人找到所求的路线. 现在给出两个这样的规则.

迷宫规则 I 此规则仅适于：当到达任意一个顶点时，我们能说出关联于此顶点的边中，哪些是已经走过的；并且我们随时可以沿着同一路线，依相反的方向而返回.（亚丽阿特涅的线球使这成为可能.）让我们从一个特定的顶点开始，沿着未走过的边尽可能远地走下去. 若我们不能继续走了，就沿原路返回，直至到达关联于一条未走过的边的一个顶点. 现在我们沿着这新的边按规定的

方式走.（读者可轻易地在图 74 上照此办理.）

我们将证明: 从连通图 G 的特定的点 x 出发，经过所有的边，终止于 x.

让我们考虑这样的时刻，我们走上了还未经过的边中的最后一条边. 待走完此边后，就得沿同一路线，按所规定的规则返回到 x. 经过这样的过程，G 的全部边都已走过. 否则，我们能找到一条不曾走过的边，并且它的端点中恰有一个已到达（第一章命题 26）. 但是按照规则必须已经走过这条边. 这一矛盾就证明了命题.

按此规则，每条边可能经过多次——反正是至少两次. 回忆命题 20，这种走法，看来是不够经济的. 下列规则能使我们经过每边恰好两次，即，沿每个方向一次.

迷宫规则 II 这一规则仅适用于: 在到达任一顶点 p 时，我们能说出关联于此顶点的边中，哪些是从 p 出发而已走过了的，也能说出哪一条是"进入" p 的边，即我们首次来到 p 的边.（比如，可借助于在墙上作出不同的标记.）让我们从一特定的顶点出发，一旦到达 p，我们就沿着在此方向至今还未走过的边走，此边也可能与首次来到的边重合，但这仅限于下述情况: 从 p 出发的其他关联于 p 的边已经走过了.

例如，我们在图 74 的图中，从 x 出发，沿着边走. 由于此图中无多重边，路线可按所到达的顶点的顺序来描述. 按规则 II 的一种可能的走法是: $x, b, c, b, d, f, g, i, j, l, j, k, j, i, h, g, h, i, g, f, h, f, d, e, d, b, x, a, x$.

我们将证明: 从连通图 G 的顶点 x 出发，按此规则，G 的每一边按每一方向恰好经过一次，并且路线中止于 x.

把 G 的边双重化后得到的图记为 G_0. 给 G_0 的每条边以定向，使对应于 G 的同一边的 G_0 中的两条边必须有不同的方向. 以 $\vec{G}_0$

表示此有向图．我们从顶点 x 出发，沿着边按定向走．到达一顶点 p 时，路线仍须沿尚未走过的一边继续走下去．仅当没有别的可能性时，这边可以是对应于首次来到 p 的边．

为了证明我们的命题(对于 G)，只须证下列命题：从 $\vec{G}_0$ 的顶点 x 出发，据给定的规则，仅经过每边一次，走到 x 为止(走过 $\vec{G}_0$ 的两边，它们对应于 G 的同一边，相当于沿此边的每个方向走一次)．

由于 $\vec{G}_0$ 的每个顶点的入次数等于同一顶点的出次数，按规则，我们的路线只能终止于 x．我们还须证明的只是，最后到达 x 时，对应于路线的闭边列 V 恰好是 $\vec{G}_0$ 的一闭欧拉线．

设顶点是(按它们在路线中出现的顺序)：

$$x=p_1, p_2, p_3, \cdots, p_1.$$

让我们设 $\vec{G}_0$ 含有不属于 V 的一边．应用命题 8 于 $\vec{G}_0$ 及由 V 的边组成的子图．存在一条边属于 $\vec{G}_0$ 而不属于 V，但要么它的头要么它的尾作为边列 V 的顶点之一．以 p_n 表示有如下性质的顶点中的头一个：存在不属于 V 的一条边关联于它．由于在图 $\vec{G}_0$ 中 p_n 的出次数与入次数相等，又因 p_n 在 V 中有同数目的边的头与尾，不在 V 内但关联于 p_n 的一条边的存在表明必然至少存在一条边它不属于 V，而它的尾是 p_n，且必然至少存在一条边，它不属于 V 而其头为 p_n．由于 p_n 是一条边的尾，该边不属于 V，所以，路线不能终止于 p_n，即 $p_n \neq p_1$．首次来到 p_n 的边必然是属于 V 的边 (p_{n-1}, p_n)，因为我们考虑到在给定的序列中 p_n 的是首次出现．但对应的边 (p_n, p_{n-1}) 必也属于 V，否则，就会存在一个顶点 p_{n-1}，使得它关联于不属于 V 的 $\vec{G}_0$ 的一条边，这是一个矛盾．但在另一情况也提出了矛盾．由于 p_n 一定是根本还未走过的一条边的尾；按规则，这排除了我们沿着对应于首次来到 p_n 的边走的可能性．于是，命题得证．

别的例子，如某展览会上展品的回廊组的布置．虽然，不打算把它弄成一个迷宫，但总得使参观者看到每件展品，同时又使他们不重复地走同一回廊，所以，一个"迷宫"是适用于展览会的，只要对应的图是一个欧拉图．在此情况下，参观者也得沿一闭欧拉线以避免不必要的行走．对于每位参观者可以给定一个路线的计划，但是，若参观者要避免不止一次地走同一回廊而能看到每件产品，一个"迷宫"更为合适．

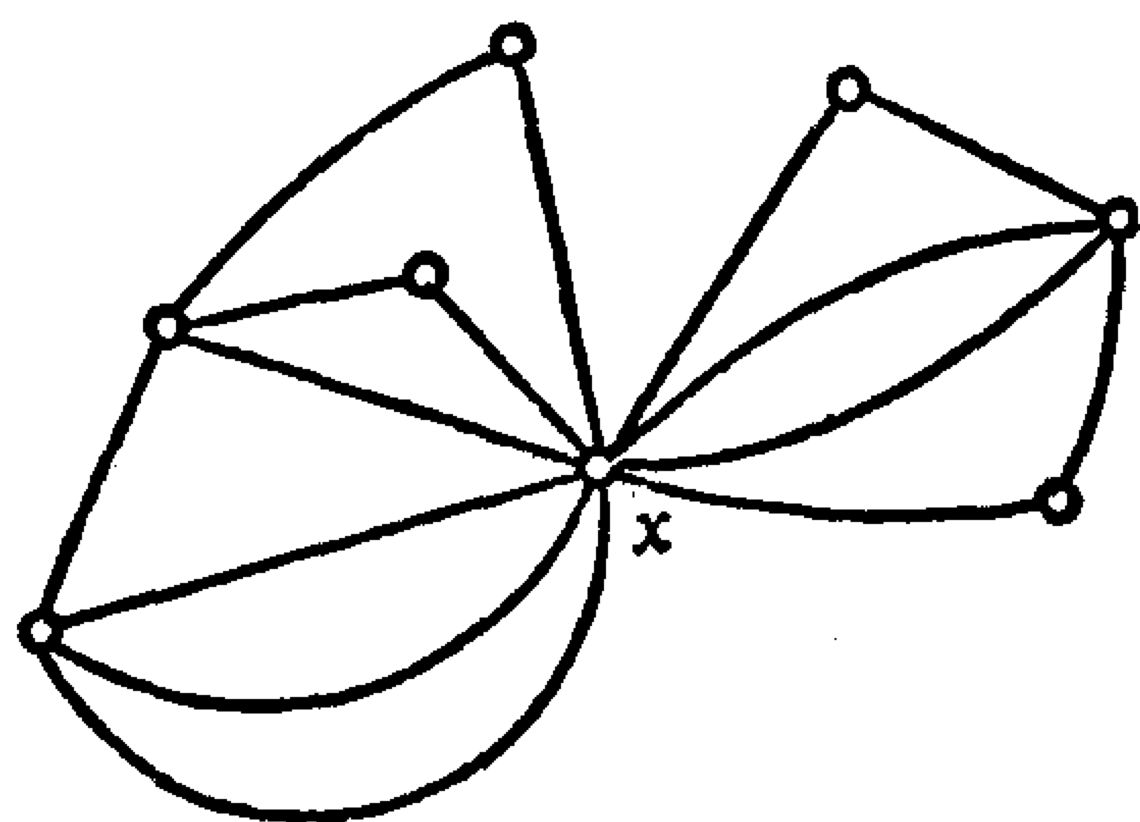


图 75

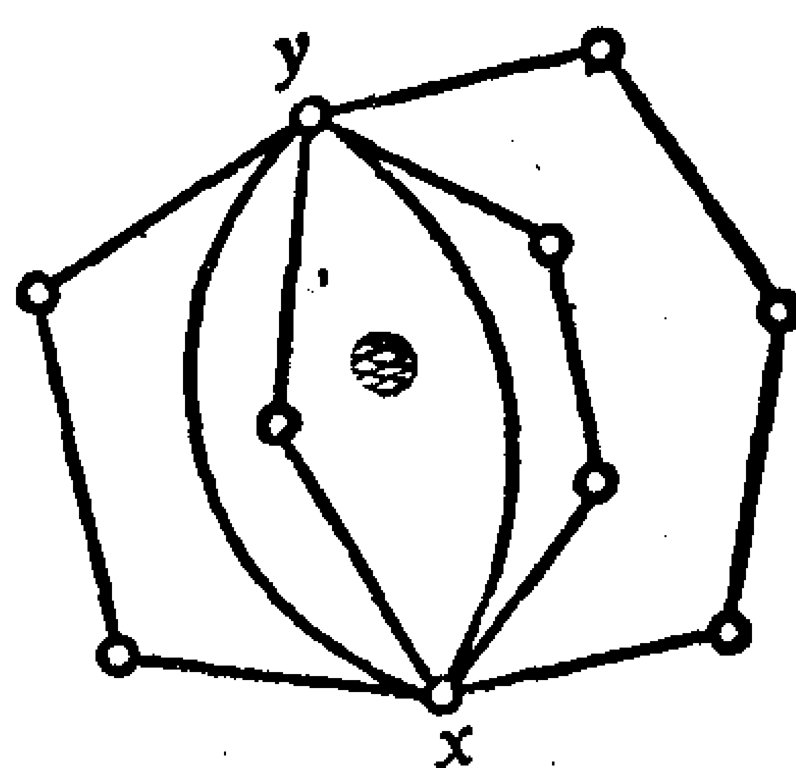


图 76

一个欧拉图没有孤立顶点，叫作始点为 x 的随意欧拉图，如果从 x 出发，只要走新边，就必然产生一条欧拉线．一个"作为展览线的迷宫"就对应于这样的一个图．一个回路显然是以它的任一顶点为始点的随意欧拉图．可以断言（稍迟还将加以证明）图 75 的图是只以 x 为始点的随意欧拉图，而图 76 的图则是既以 x，也以 y 为始点的随意欧拉图（但不能以别的顶点为始点）．

以下我们将研究那么一些图的结构，它们是以其某些顶点为始点的随意欧拉图．

问　　题

21．图 G 是以顶点 x 为始点的随意欧拉图，欧拉图 G_1 含有 x，且为 G 的真子图．删去 G_1 的边，同时删去由于删去这些边

而成了孤立顶点的那些顶点．设 G_2 是留存的图．求证 G_1 与 G_2 都是以 x 为始点的随意欧拉图．

22. 求证：若 G 是以 x 为始点的随意欧拉图，则 x 含于 G 的每个回路中；反之，若欧拉图 G 的每个回路都包含 x，则 G 是以 x 为始点的随意欧拉图．

问题 **21** 的图 G_1 是欧拉图；以 E 表示其闭欧拉线之一．由于 G 是以 x 为始点的随意欧拉图，可以先随着 E 沿 G_1 走．因此，G_2 是以 x 为始点的随意欧拉图．在任何情况下，G_2 是欧拉图且含有 x．对换 G_1 与 G_2 的作用表明 G_1 也是以 x 为始点的随意欧拉图．

为了解问题 **22** 的第一部分，假定 K 是 G 中不含 x 的回路．删去 K 的边，由于所得图的每个顶点的次数是偶数，它的分支 G_1 含有 x；所以全部边关联于它，是欧拉图．图 G_1 与 K 的并记为 G_2．G_2 的每个顶点是偶次数的，且 G_2 是连通的．为了证明这后一个结论，我们注意到 K 的每个顶点能由连通图 G 内的从 x 出发的一条路所到达，存在此路的一部分含于 G_1，若它的端点是 x 及 K 的一个顶点，但没有它的内点属于 K．所以 G_2 是欧拉图；因此，按问题 **21**，这是以 x 为始点的随意欧拉图．但这是一个矛盾，因为在沿它的闭欧拉线之一首先通过 G_1 的所有的边时，K 的边将绝不能被到达，因为 x 不含于 K．

为了解问题 **22** 的第二部分，假定欧拉图 G 中有一顶点 x 含于 G 的每个回路中，而假设 G 不是以 x 为始点的随意欧拉图．若我们从 x 沿 G 的边走，则路线可能终止于 x 而不包含 G 的全部边，但含有关联于 x 的全部边．这样一个闭边列的边应予删去．因为所得图的每个顶点的次数全是偶数，根据问题 **5** 所述，它包含一个回路．但 x 未含于此回路内，这是一个矛盾．问题 **22** 得证．

也可以把问题 **22** 的命题叙述如下：一个图 G 是以其顶点 x 为

始点的随意欧拉图，当且仅当 G 是欧拉图并且删去关联于 x 的边就产生一座林. 所以，图 75 与图 76 的图分别是以 x 为始点与以 x 及 y 为始点的随意欧拉图，但它们不是以任一别的顶点为始点的随意欧拉图.

另一方面，让我们考虑一座林 L 与一个不含于 L 的顶点 x. 再添加一些边到图上：若顶点在 L 内是奇次数的，就以奇数条边联结 x 到 L 的一个顶点上，并且以偶数条边把 x 联结到 L 的其余顶点上. 若 L 的顶点不是孤立顶点，这偶数也可以是零. 最后，还允许联结关联于 x 的环. 得到的图 G 是连通的，其每个顶点是偶次数的，因为奇次数顶点的个数是偶数(参看第一章命题 **9**)；L 的全部顶点是偶次数的，所以 x 的次数也必为偶数. 因此 G 是欧拉图，从问题 **22** 的新说法，它是以 x 为始点的随意欧拉图. 所以，以一顶点为始点的随意欧拉图能刻画如下：

23. 若一座林 L 的顶点以新边联结于不含于 L 的顶点 x，使得偶数条新边联结于 L 的一个顶点，若这个顶点在 L 内是偶次的（若顶点不是 L 内的孤立顶点这数可以是零），以及奇数条新边联结 L 的一个顶点，若此顶点在 L 内是奇次的，最后还可添加一些关联于 x 的环，则得到了一个以 x 为始点的随意欧拉图. 所有以 x 为始点的随意欧拉图都可以按此方式得到.

图 **77** 表示以此方式构造得的一个图，它是以 x 的始点的随意欧拉图. 实线是 L 的边.

我们现在考虑那些以两个顶点为始点的随意欧拉图. 假定图

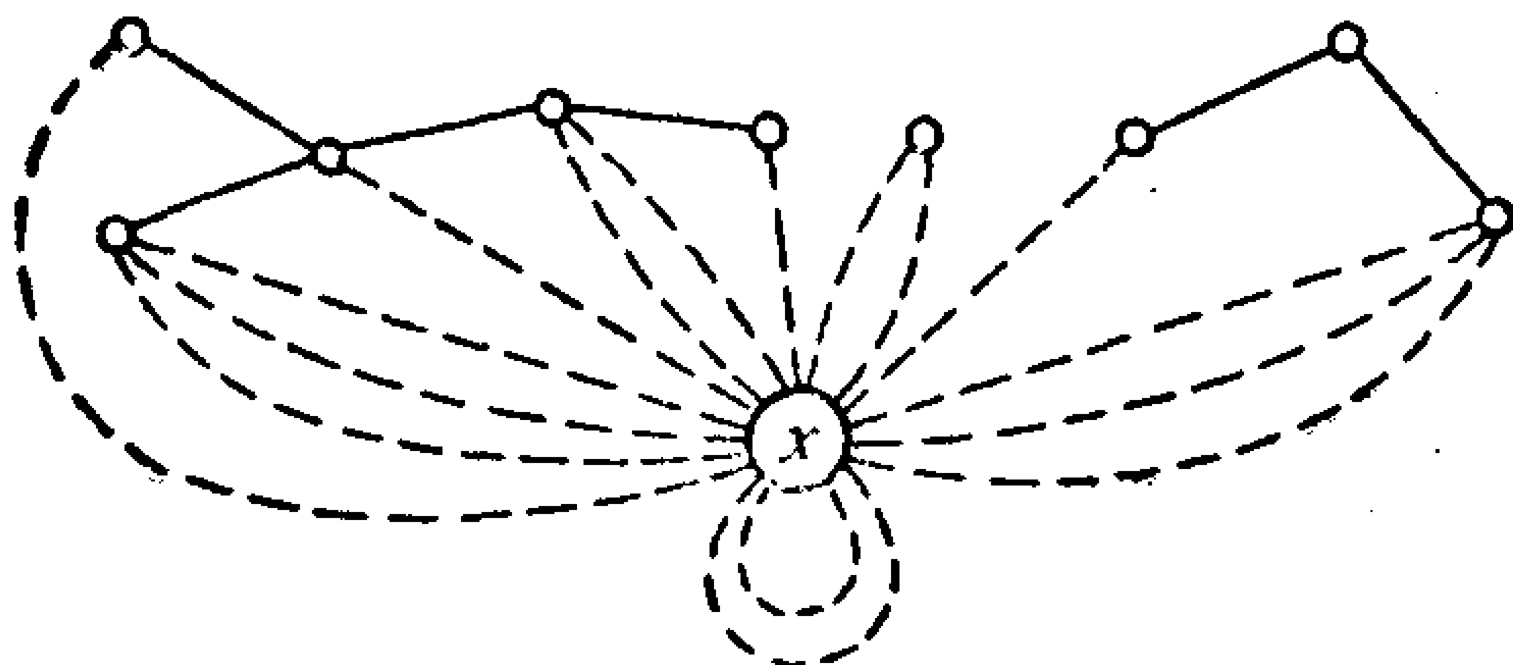


图 77

G 是以 x 与 y 为始点的随意欧拉图. 若删去顶点 x 以及与它关联的那些边,就得到一座林 L(如上述). 让我们假定 L 是不连通的, L_1 是 L 的不含 y 的分支. L_1 要么是一个孤立顶点,至少由 G 的两边联结于 x, 要么含有一个次数为 1 的顶点 (参看第一章的问题 23); 但第一章的命题 9 表明它还含有奇次顶点,此时发现 L_1 的两顶点由 L_1 内的一条路所连通且邻接于 x. 在任一情况下,找到了仅由 x 与 L_1 的顶点组成的 G 内的一个回路. 因为此回路不含 y, 因而不能是以 y 为始点的随意欧拉图(据问题22), 这是一个矛盾. 所以, L 是一棵树. 问题 22 表明 G 内不能有环关联于 x, 除 y 外没有 L 的顶点以多于一条的边联结于 x, 除 y 外也没有 L 的偶次顶点在 G 内邻接于 x.

让我们假定在 L 内存在一个次数至少为 3 的顶点 z. 我们从 z 出发, 按一个任意的方向经过 L 的边. 由于 L 是树, 路线沿着 L 的路终止于 L 的一个次数为 1 的顶点. 我们再一次从 z 开始, 但只沿前次未曾经过的边走. 得到了 L 的另外的路, 联结了 z 与一个次数为 1 的顶点, 没有接触任一顶点二次, 甚至也不接触第一轮走过的顶点. 以此方式从 z 构造尽可能多的路. 命题 23 表明这些路的端点(不同于 z 的)全在 G 内邻接于 x. 若 $z \neq y$, 可以从这些路中选出两条, 使 y 不含于其中的任一条. 但它们的端点(不同于 z 的)邻接于 x, 把这些路联结到 x 产生一个不含 y 的回路, 据问题 22, 这是一个矛盾.

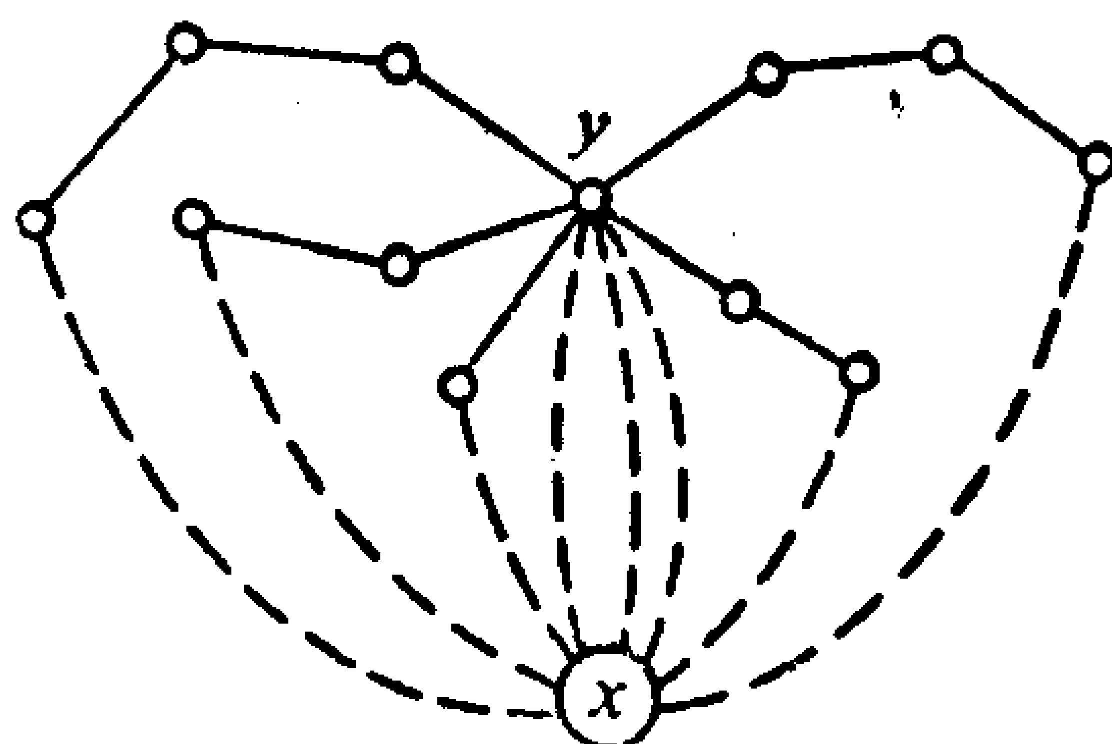


图 78

因此, y 是 L 中次数大于2的仅有的一个顶点, L 由这样一些路组成, 每条路含有 y, 但任两条路无别的公共顶点. (证明可由图 78 引出; 实线对应于 L 的边.) 端点不在 y 的路的端点全联结到 x,

但每条路的端点仅用单一的边与 x 联结. L 的其他顶点中除 y 外，没有顶点能在 G 中邻接于 x，所以，G 是在 x 与 y 间的路的并，这些路没有别的公共顶点.（参看图 76 与78.）由于 G 是欧拉图，这些路的数目是偶数. 命题 23 表明此时 G 确实是以 x 与 y 为始点的随意欧拉图. 于是，下述命题足以刻画以两个顶点为始点的随意欧拉图：

24. 若联结偶数条路使得 x 与 y 是它们的公共顶点，但任两条路没有任何公共内点，则所得的图是以 x 与 y 为始点的随意欧拉图. 所有以 x 与 y 为始点的随意欧拉图都能以此方式得到.

*

练　习

25. 图 79 表示某城镇的一部分. 我们要参观商店的橱窗，它们沿着街道被粗线标出. 我们用 x 表示始点兼终点. 找出使所需时间为极小的一条路线. 假定不计横过街道的时间。

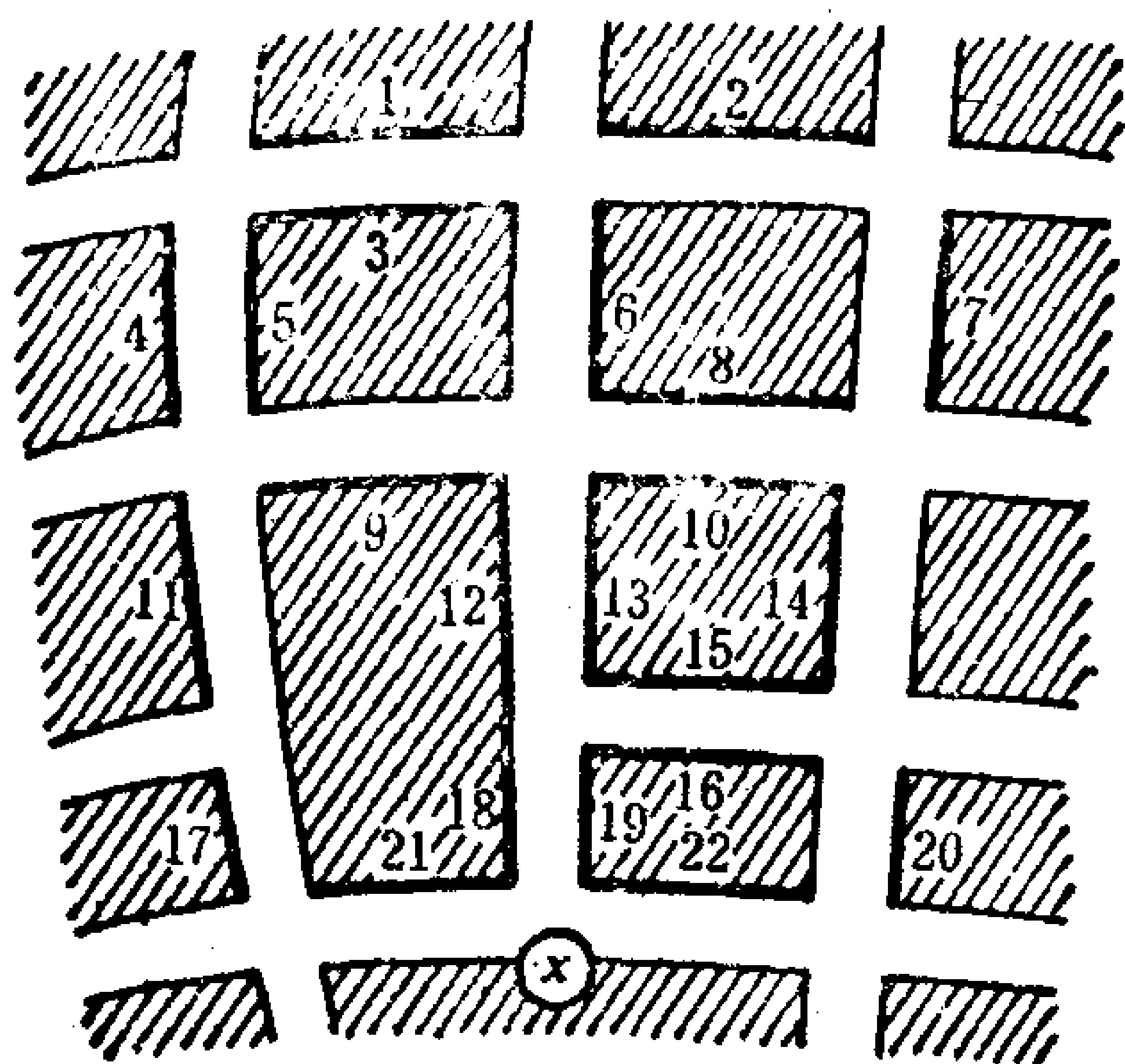
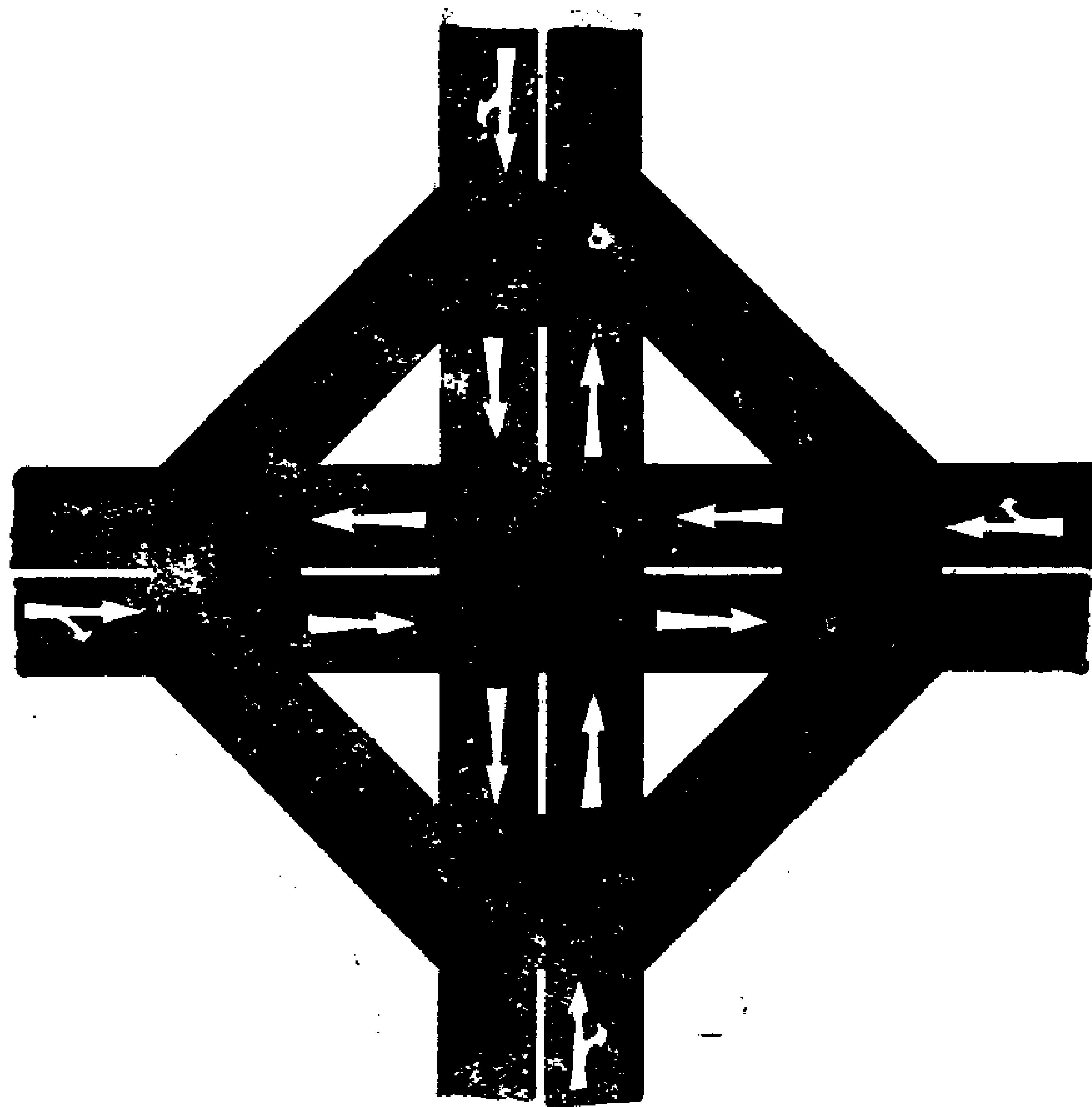


图 79

26. 图 80 是布达佩斯一个八角广场的简图，在围着直角十字路口的八角圈上，只允许按反时针方向通行. 然而，允许从八角形


图 80

的顶点作左转弯，而在每个岔口作右转弯. 画出对应于这广场的部分的城市交通图.

27. 有一辆清洁车，需单独清扫城市中图 81 所示部分的全部

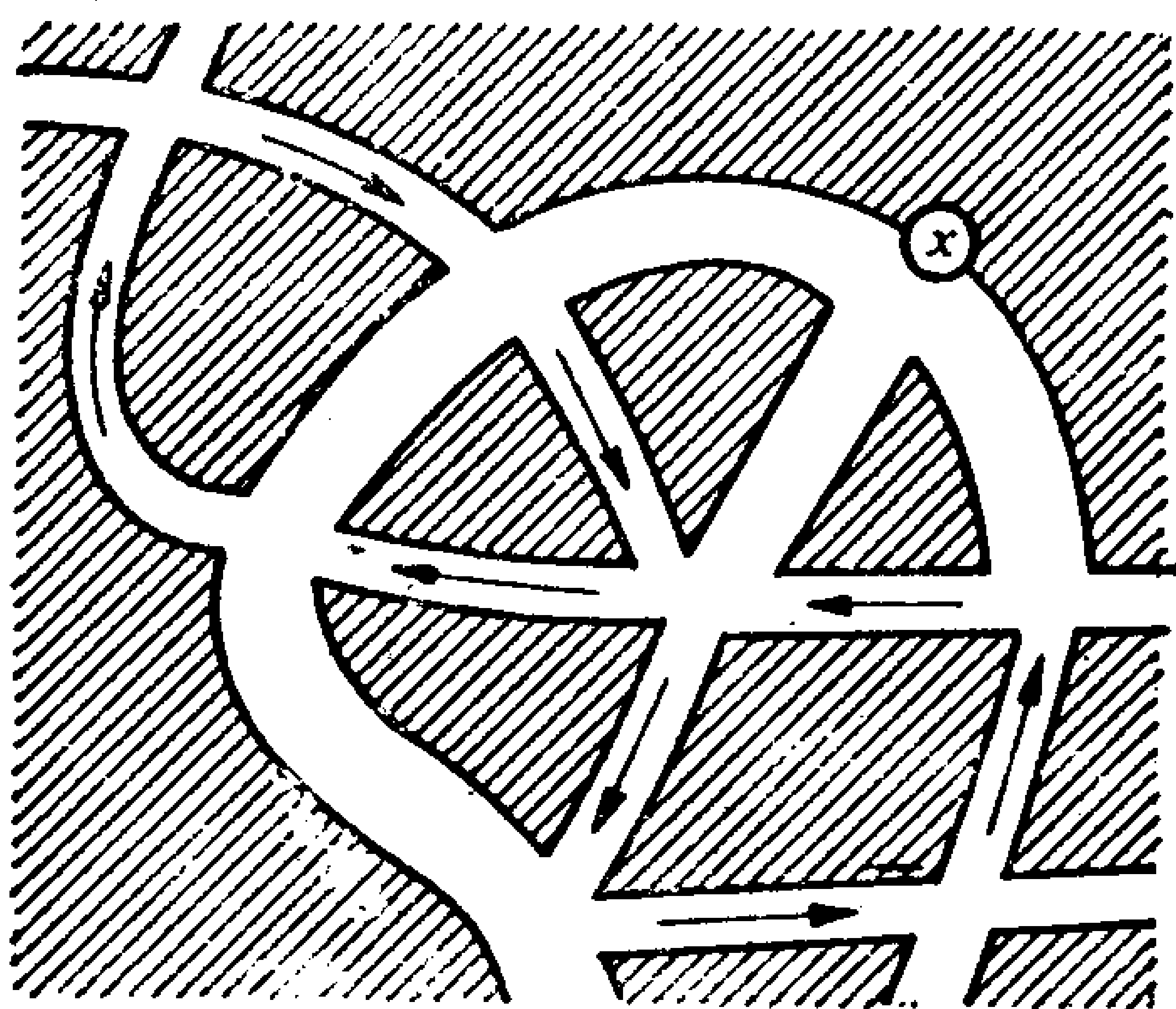


图 81

街道，始点兼终点为 x. 箭头所示的街道单行道需清扫一遍，而其

它的街道，两侧都需清扫．在任一十字路口都不禁止转弯．找出一条经济的路线以实现上述要求．

28． 在图 81 中未标出进行方向的街道上标出单向通行箭头．使得通行条件仍能满足．

29． 按两迷宫规则之一走遍图 82 所示的迷宫．

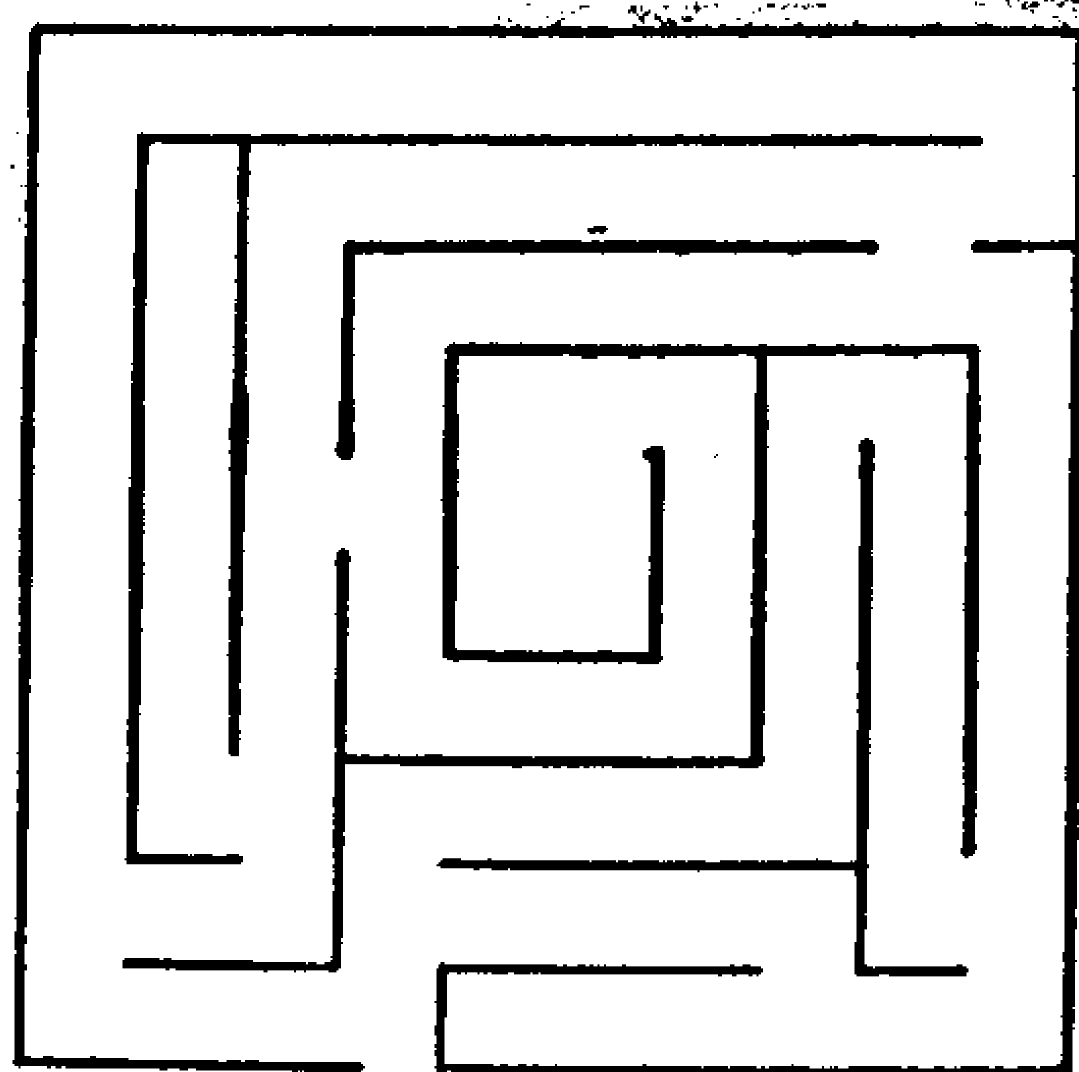


图 82

问　　题

30． 求证：若一连通图含有 $2k(k\geqq1)$ 个奇次顶点，则可在图中找到 k 个开边列，使图的任一边恰含于这些边列之一．

31． 求证：如果一个图中，每个顶点的次数是 4，则它的边能按这样的方式染上红色与蓝色，使每边依它的整个长度染成一种颜色，而每个顶点有性质：与它关联的 4 边中有两者是红的，有两者是蓝的．

32． 推广问题 3，即尽可能多地从一堆多米诺骨牌中选取骨牌，以保证数 $0, 1, 2, \cdots, n$ 的每一可能的不同的对的出现，但别的骨牌不要．（这里考虑的是多米诺的"抽象"的集合，因为 n 是任意的自然数．）能选出多少多米诺骨牌对？多大的 n 值能使全部选到的骨牌对排列成唯一的环链？

33． 对于有向图 $\vec{G}$ 的每个顶点 p，有

$$\varphi_{\text{out}}(p)=\varphi_{\text{in}}(p).$$

设 A 是 $\vec{G}$ 的顶点集的任一子集．求证头在 A 而尾不在 A 的边数等于尾在 A 而头不在 A 的边数．

34. 设 p_1, p_2, …, p_n 是有向图 $\vec{G}$ 的顶点. 求证下列的和是偶数:

$$|\varphi_{\text{out}}(p_1)-\varphi_{\text{in}}(p_1)|+|\varphi_{\text{out}}(p_2)-\varphi_{\text{in}}(p_2)|+\cdots$$
$$+|\varphi_{\text{out}}(p_n)-\varphi_{\text{in}}(p_n)|.$$

35. 求证,若 G 是连通图, 且上一问题提出的和是 $2k(k\geqslant 1)$, 则能在 $\vec{G}$ 内找到 k 个开边列使得 $\vec{G}$ 的每边恰含于这些边列之一(参看问题 30).

36. 求证: 任一无环的图能用这样的方式加以定向, 使得有向图不含有向回路.

37. 在某项竞赛中, 每个局中人与其余所有的局中人进行了对抗赛,没有和局. 求证: 总能找到一名局中人,他能在所有其他的局中人中,列举出哪些局中人是被他战胜的,哪些局中人又是被他战胜的人所战胜的.

38. 求证: 若一个有向图 $\vec{G}$ 的任一顶点的入次数与出次数是相等的,则下列命题是正确的: 对于 $\vec{G}$ 的任意一对顶点 a 与 b,从 a 通向 b 的边两两不相重的有向路的极大数等于从 b 通向 a 的边两两不相重的有向路的极大数.

39. 一个图是以不止两个顶点为始点的随意欧拉图. 求证图是一个回路,因而是以其任一顶点为始点的随意欧拉图.

第四章　覆盖图的顶点的路线

图 83 表示一个正多面体，它的表面由 12 个正五边形所构成，称为正十二面体．若把它的顶点看作是一个图的顶点，则我们可以用图 84 中的图来表示它，把它画在一平板上．设想图的顶点是板上的孔眼，用 20 个软木塞子用来填塞孔眼．第一个塞子可以插入任一孔眼，但其余的每个塞子必须放入与前一个邻接的孔眼．说一个解是成功的，如果所有的塞子能按给定的规则放进孔眼，使最后到达的孔眼相邻于第一个．这个游戏叫做**十二面体游戏**（或“周游世界”），是由爱尔兰的数学家哈密尔顿(Hamilton, 1860)首创的．

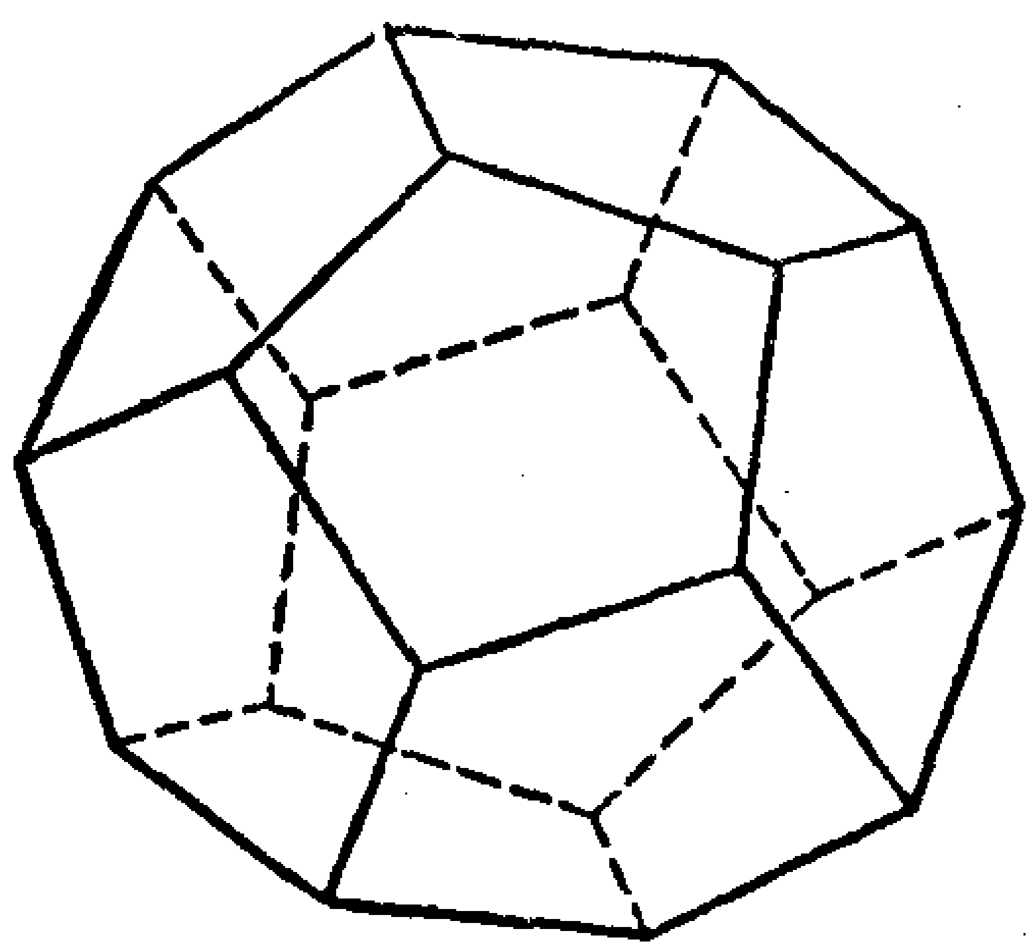


图　83

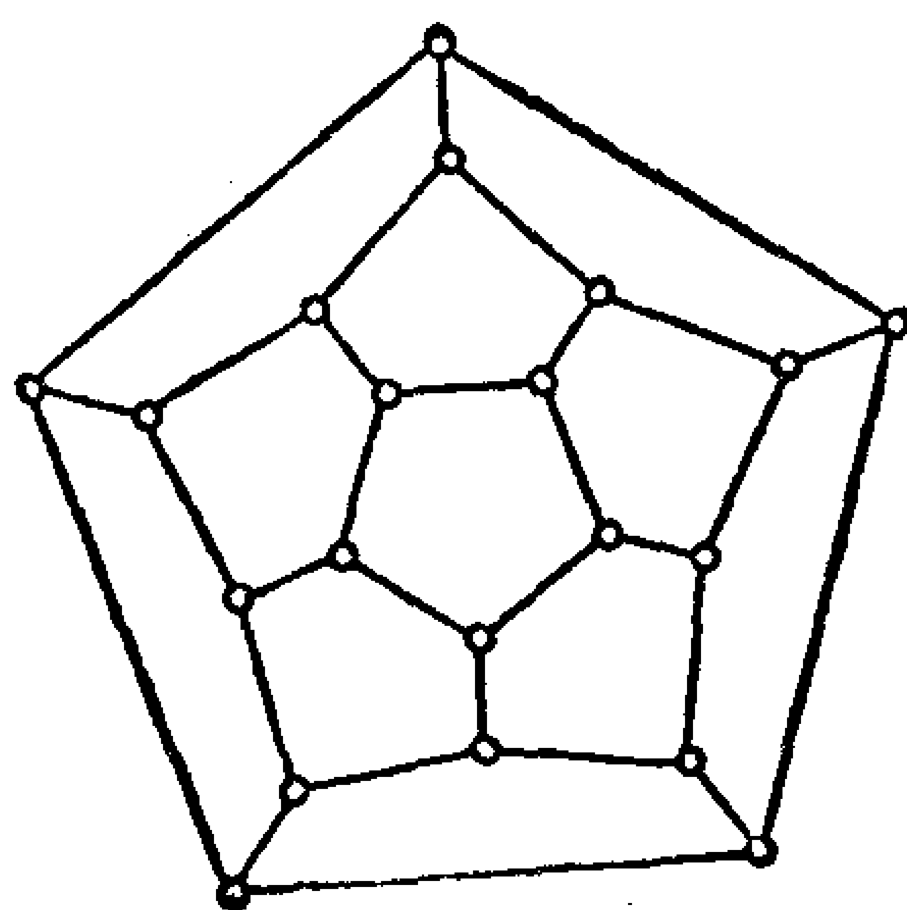


图　84

练　　习

1. 求出十二面体游戏的一个解．
2. 用下述方式画出图 85 的“16 格棋盘”上的图：顶点对应

于棋盘格，当且仅当对应的“棋盘”格之一能以马的一步跳动到达另一顶点时，两顶点为一条边所联结.

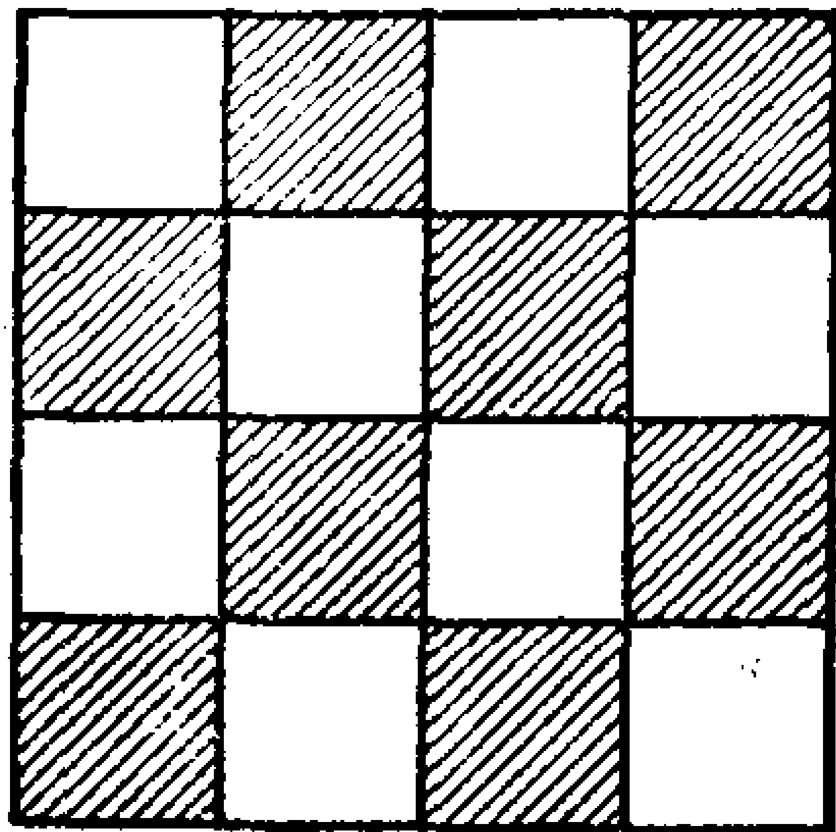


图 85

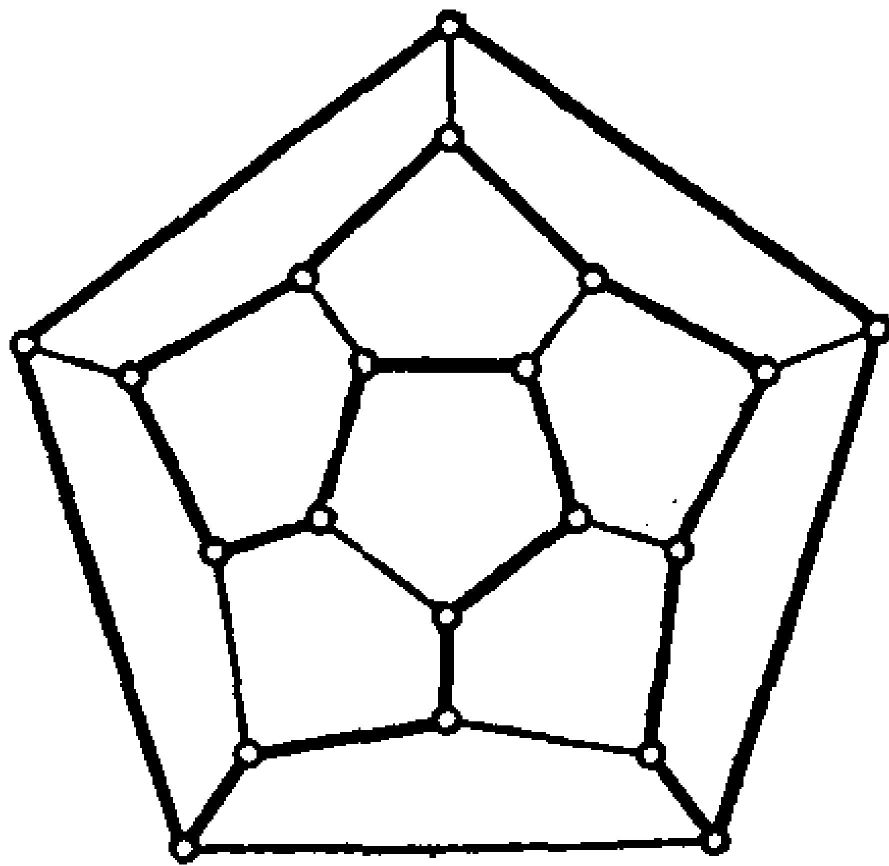


图 86

图 86 表示练习 **1** 的一个解. 第一个塞子可以放进任一孔眼；所有其余的塞子如粗线所示的顺序插入. 粗线是图的一个回路，它含有图的全部顶点. 经过图中全部顶点的一个回路，叫做图的一个**哈密尔顿回路**，具有同一性质的一条路，叫做图的一个**哈密尔顿路**. 如果图中存在哈密尔顿回路，则也存在哈密尔顿路，因为从哈密尔顿回路中删去其任一边就得到哈密尔顿路. 显然，图 84 的图的任一哈密尔顿回路表示十二面游戏的一个成功的解，而游戏的任一解也指出图的一个哈密尔顿回路.

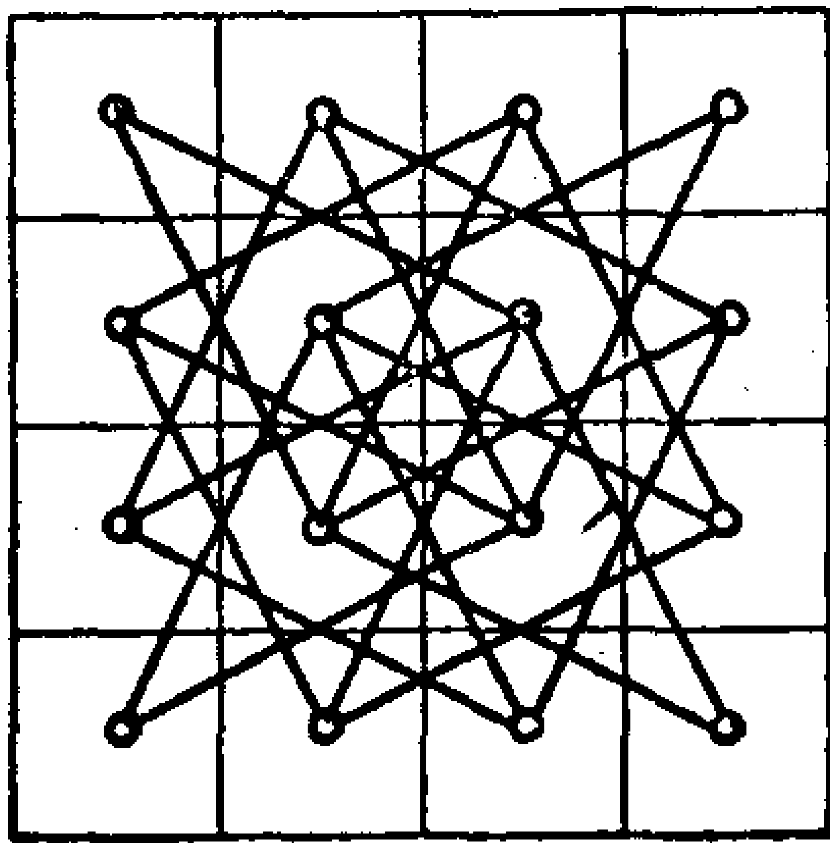


图 87

图 87 表示练习 **2** 的一个解. 细线标出的是棋盘.

问　题

3. 若从一个连通图 G 删去 k 个顶点（以及删去关联于它们的

边）产生一个分支数大于 k 的图. 求证: 此图 G 不能有哈密尔顿回路；又，若 G 的分支数大于 $k+1$，则连哈密尔顿路也没有.

4. 能否以一马的跳步完全覆盖图 85 的“棋盘”，使接触每个方格恰一次？允许从任一方格出发.

5. 对于“25 格的棋盘”回答与问题 **4** 同样的问题.

6. 求证: 前 6 个塞子的一种特定位置可以阻止十二面体游戏得解.

7. 第一个（或第一与第二个）塞子已定位，试确定成功地继续十二面体游戏的可能的方法的数目.

问题 **3** 的证明十分简单. 若删去连通图的 k 个顶点，一个回路的顶点与一条路的顶点分别含于新图的至多 k 与 $k+1$ 个分支中. 因为哈密尔顿回路与哈密尔顿路都包含图的全部顶点，若图原来就分别有哈密尔顿回路与哈密尔顿路，在删去 k 个顶点后，所得的图分别地不能有多于 k 与 $k+1$ 个分支. 例如，图 88—91 中没有一个图含有哈密尔顿回路，而图 90 与 91 的图甚至还不含哈密尔顿路（p, a 及 b 是被删去的顶点）.

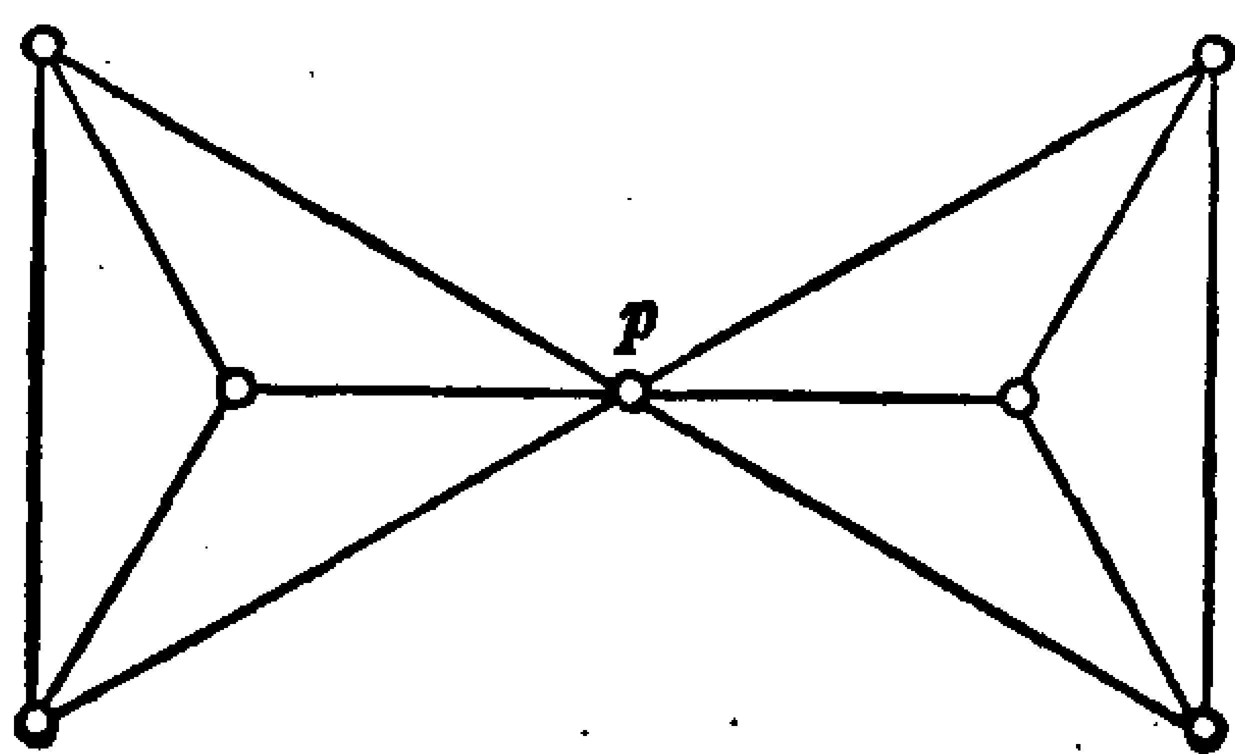


图 88

连通图的一个顶点叫做一个**割点**或**关节点**，若把它移去就产生一个不连通的图. 如果一个图含有多于一条边，则关联着环的一个顶点常常叫做一个割点. 在图 88 与 90 的图中，顶点 p 是

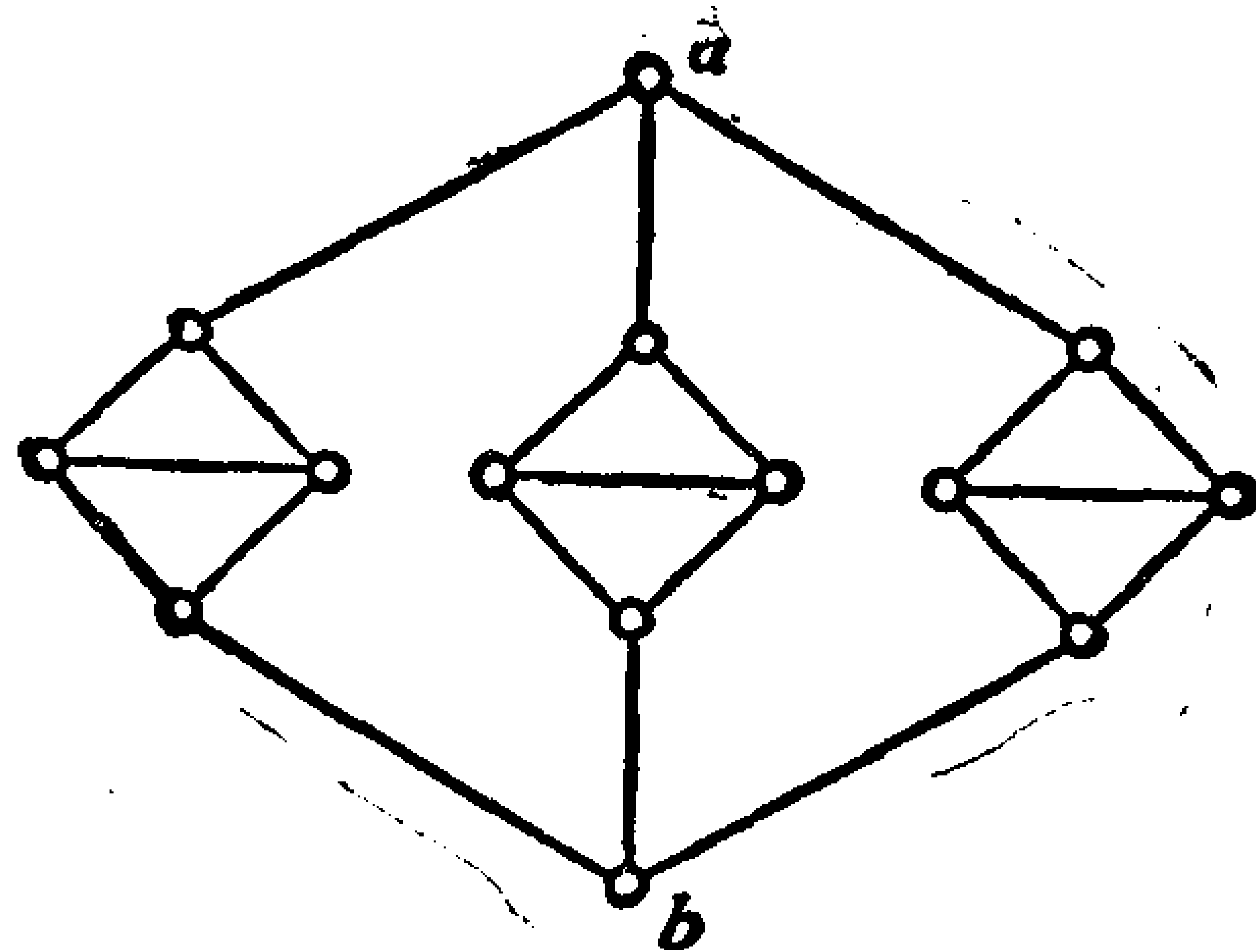


图 89

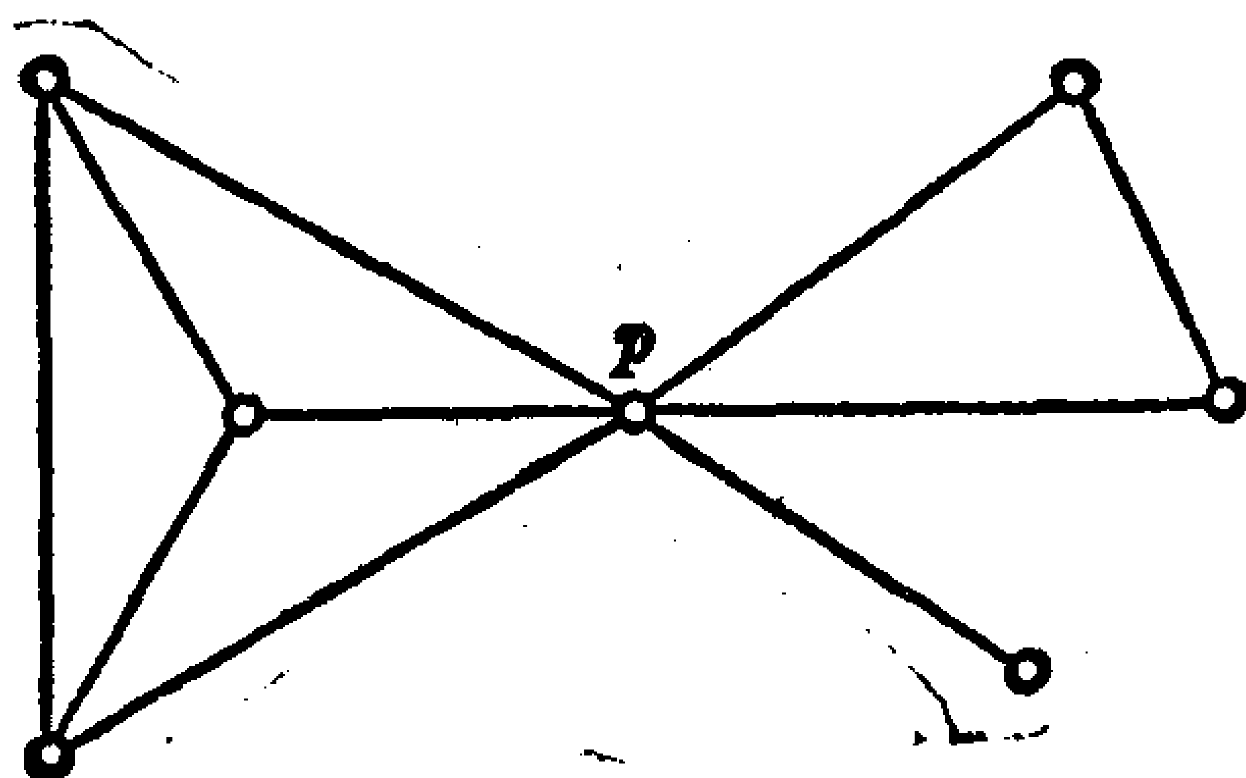


图 90

割点.

象我们已见到的，顶点不止一个的图若含有一个割点就不能有哈密尔顿回路.

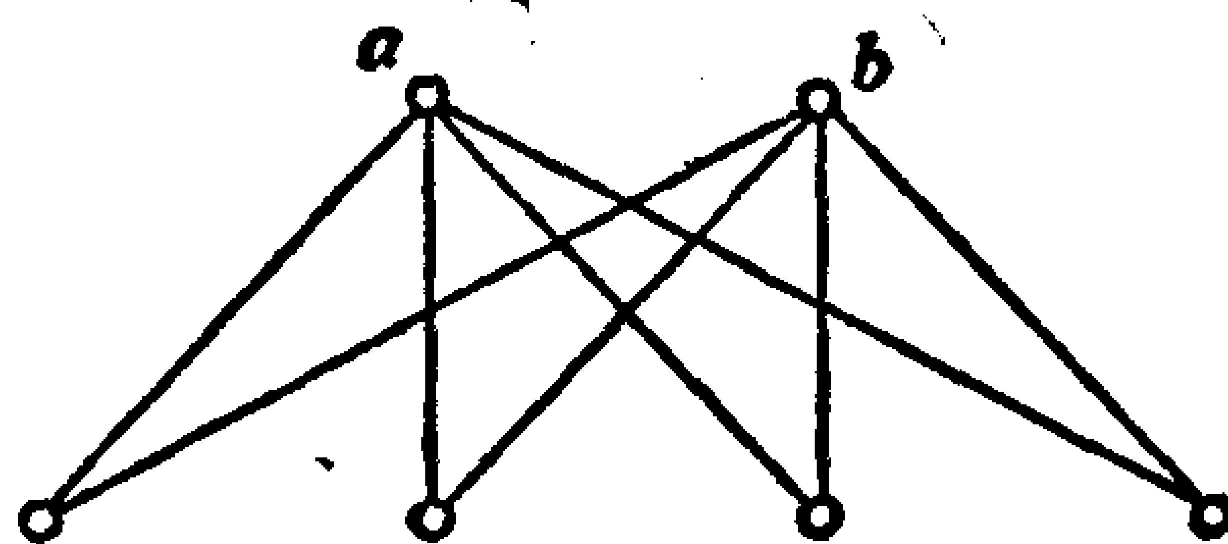


图 91

问题4是要确定图 87 中的图 G(画在一个“棋盘”上的)是否有一个哈密尔顿回路或一条哈密尔顿路. 把图重画，使顶点的布置更清楚. 删去次数为 2 的顶点a(棋盘的角)以及 4 个顶点 b 以获得两个回路(见图 92)；以 c 与 d 分别标记此两回路的顶点. 若把此两回路画成不相交的，则图就更清楚了(图 93). 每个顶点 b 邻接于一顶点 c 与一顶点 d. 我们可以说(即使是在原图内)，也易于在新形式下构造成使 G 是连通的，删去 4 个顶点 b 产生一个具

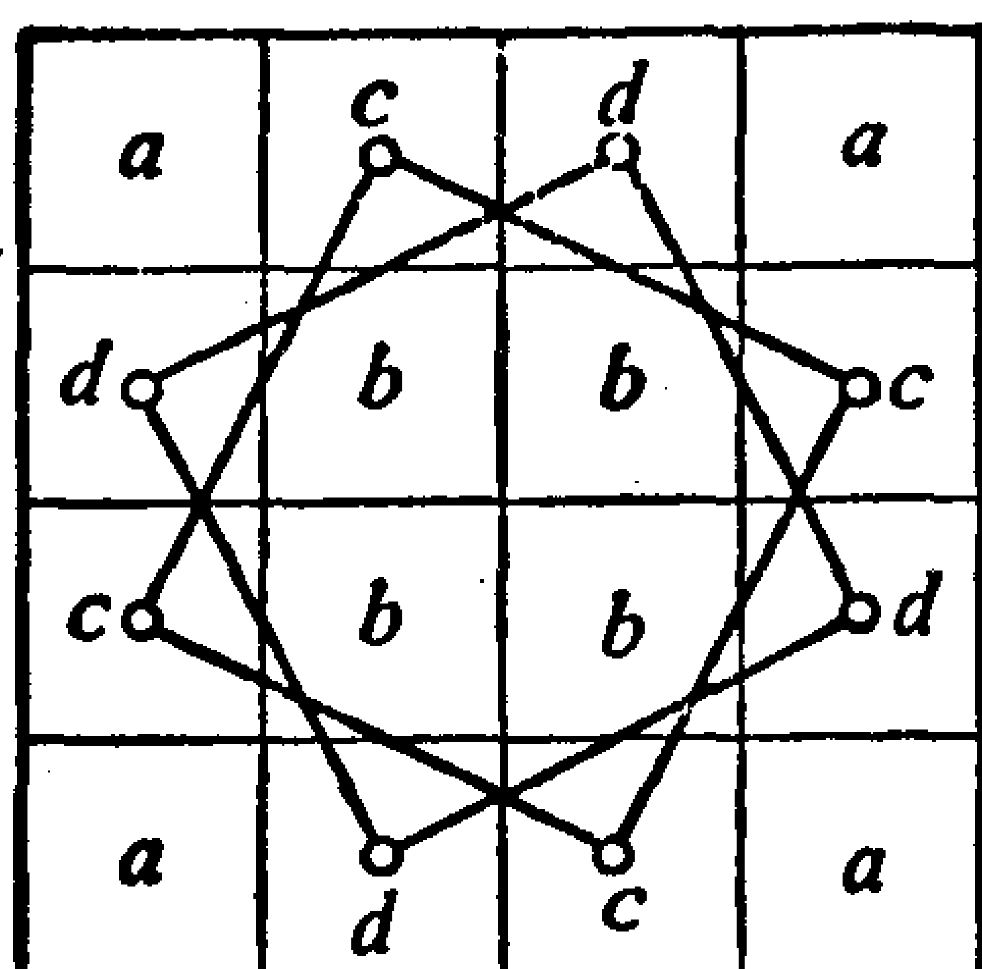


图 92

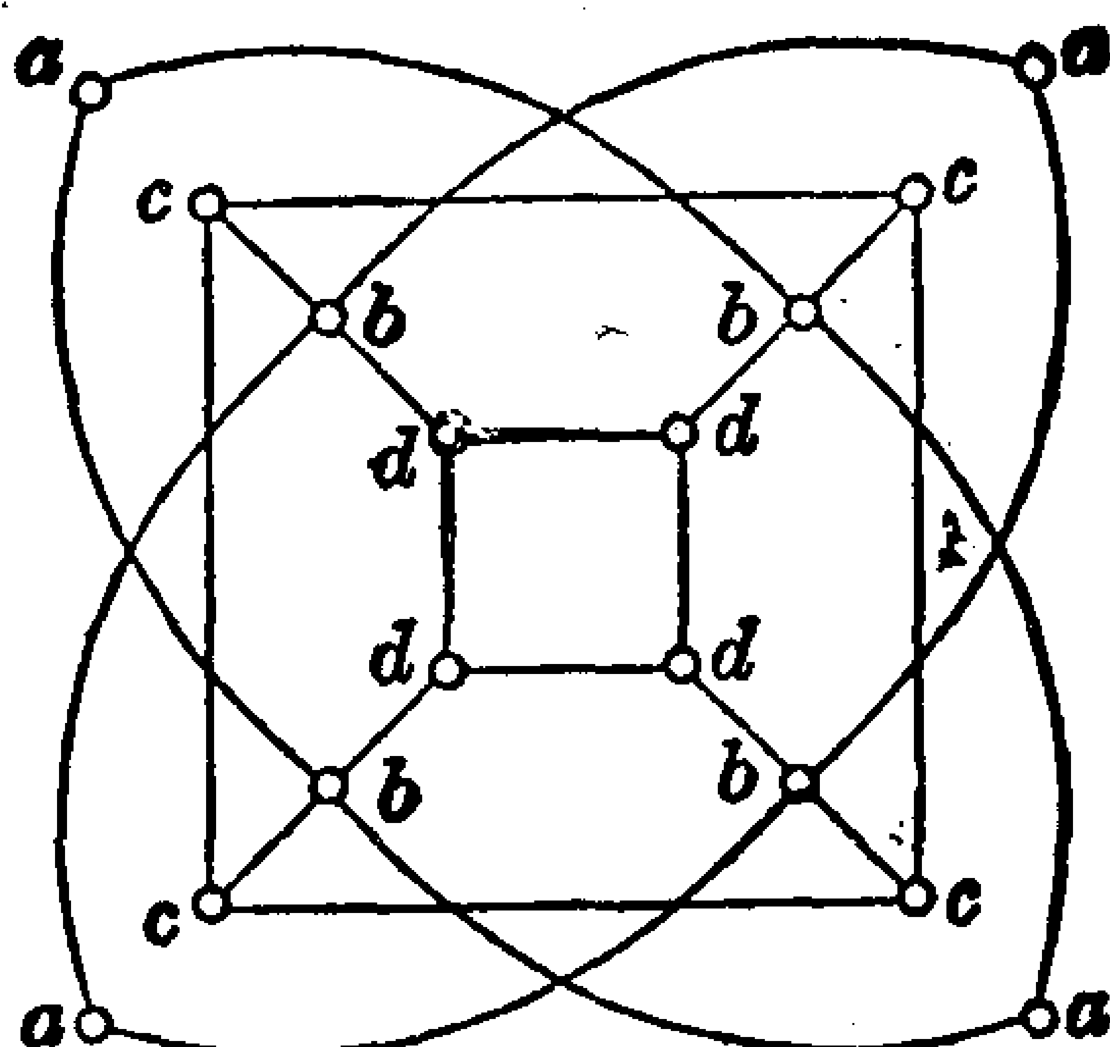
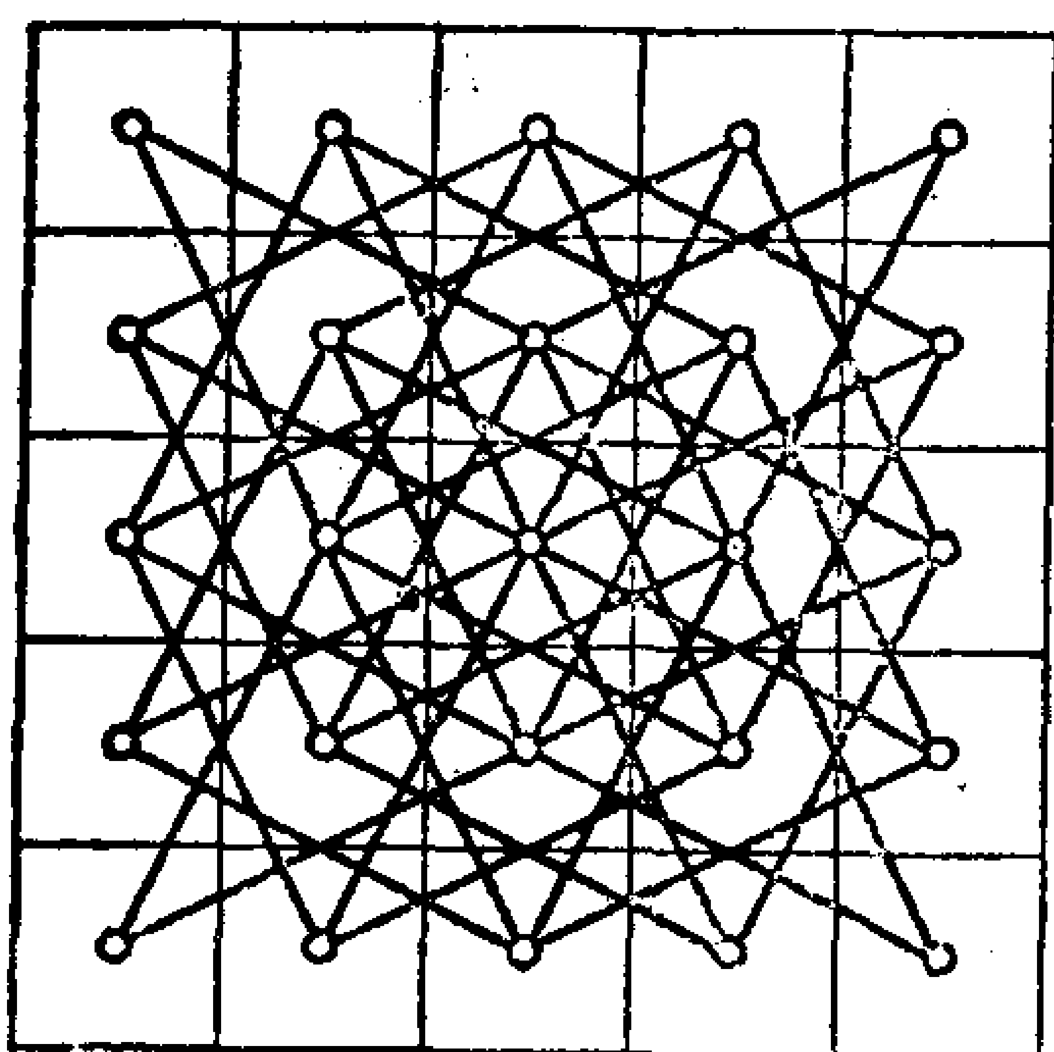


图 93

有 6 个分支的图：两个不同的回路(分别以 c 与 d 为顶点)以及 4 个标号为 a 的顶点. 于是，据问题 3，G 没有哈密尔顿回路，也没有哈密尔顿路. 所以，图 85 的棋盘不能象问题 4 规定的那样为一马所跳遍.

为了解问题 5，须找图 94的图 G 的一哈密尔顿路. 此时一种新的较清楚的图的构造仍将是有益的. 以 a 与 b 分别记次数为 2 的顶点(角)及它们的邻点. 图 95 只表示出关联于顶点 a 的那些边，


图 94

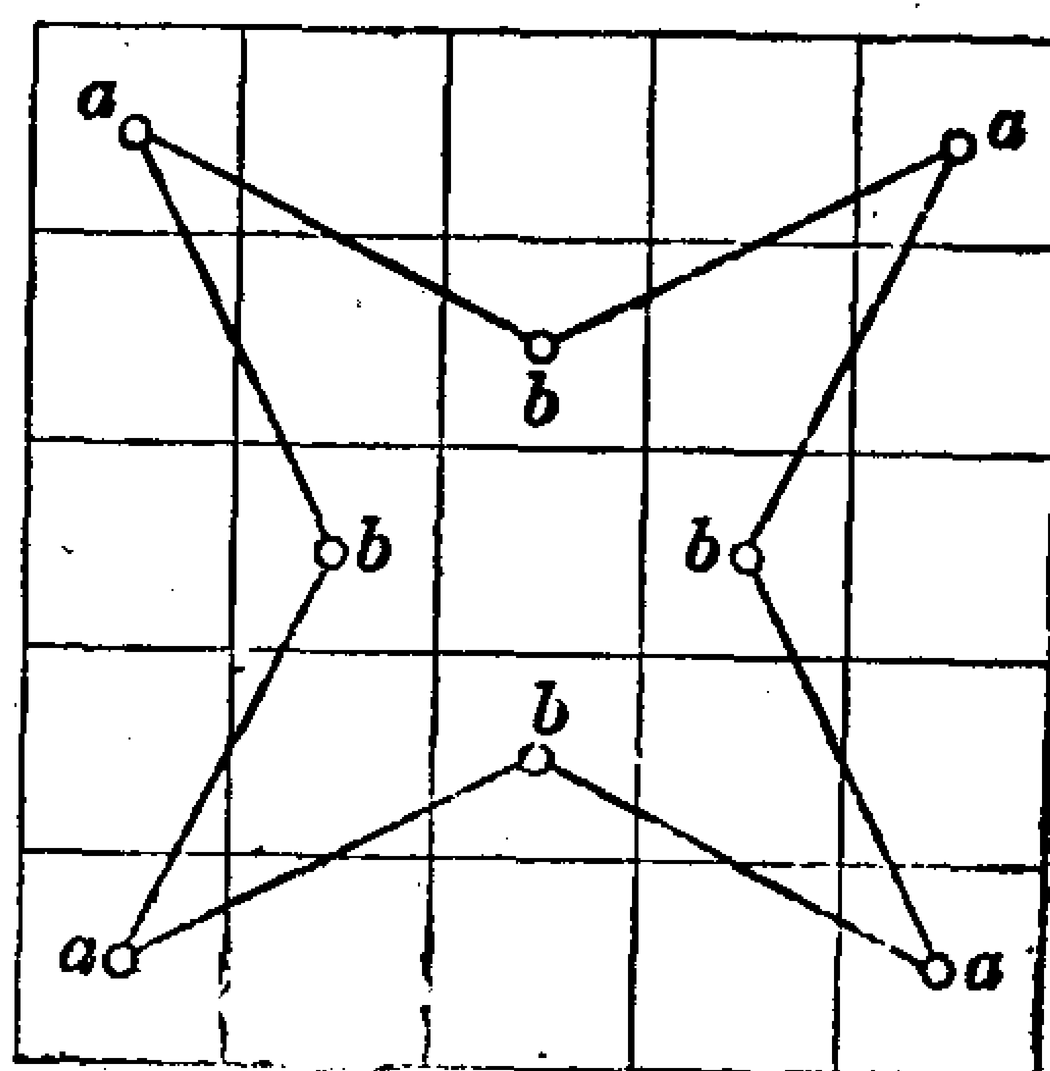


图 95

这 8 条边构成一个G的回路，它不能全属于图的一哈密尔顿回路或哈密尔顿路，所以，G 不能有哈密尔顿回路，因为，哈密尔顿回路必

须包含关联于次数为2的顶点的全部边. 又若G有一哈密尔顿路, 其端点中必有一顶点a, 因为路不能含有关联于a的8条边, 而删去这些边中的任一条, 就产生一个次数为1的顶点a. 从图94的图中删去全部的顶点a与b得到图96的图. 若顶点c也被删去, 就只剩下一个长为16的回路K. 沿着回路K, 每隔一个顶

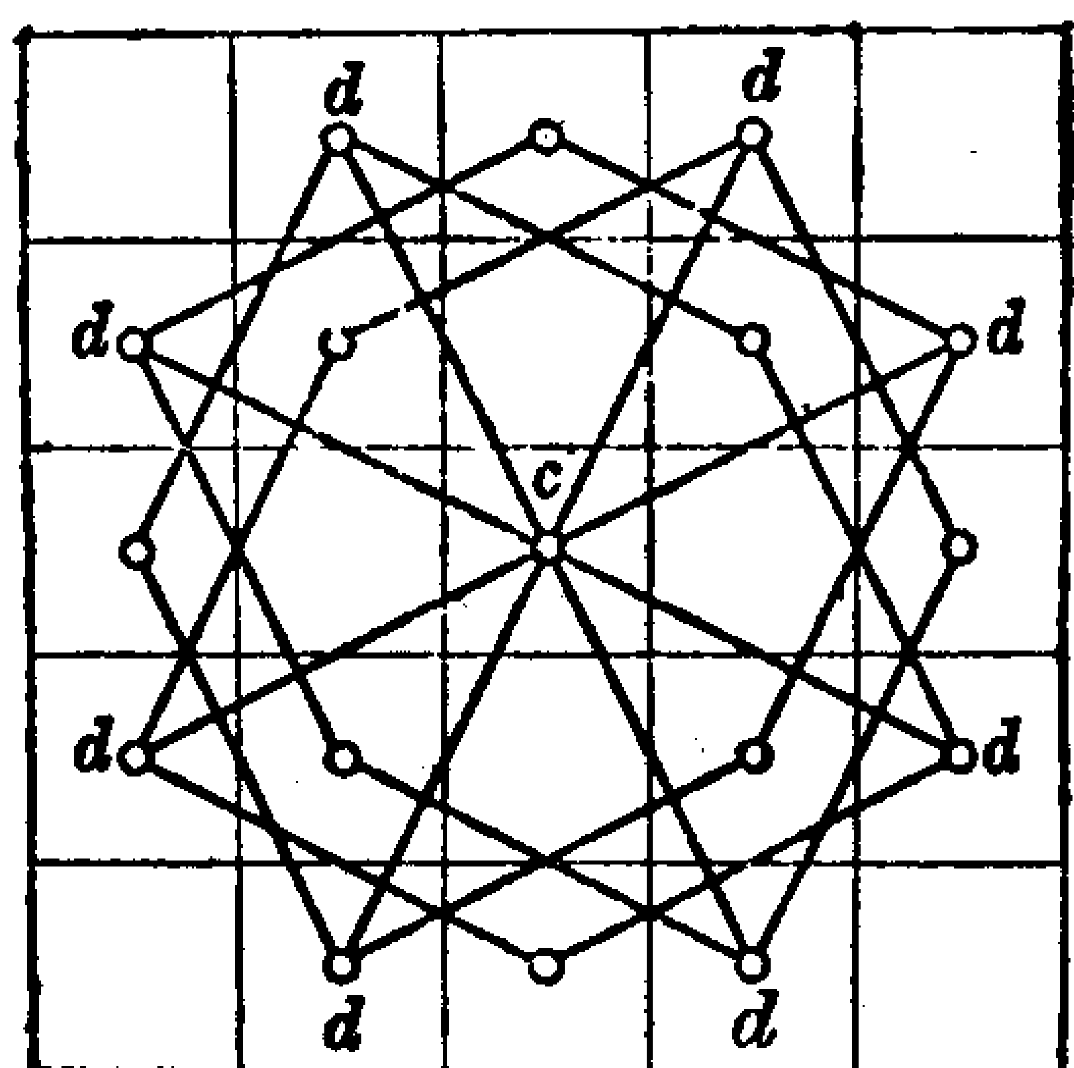


图 96

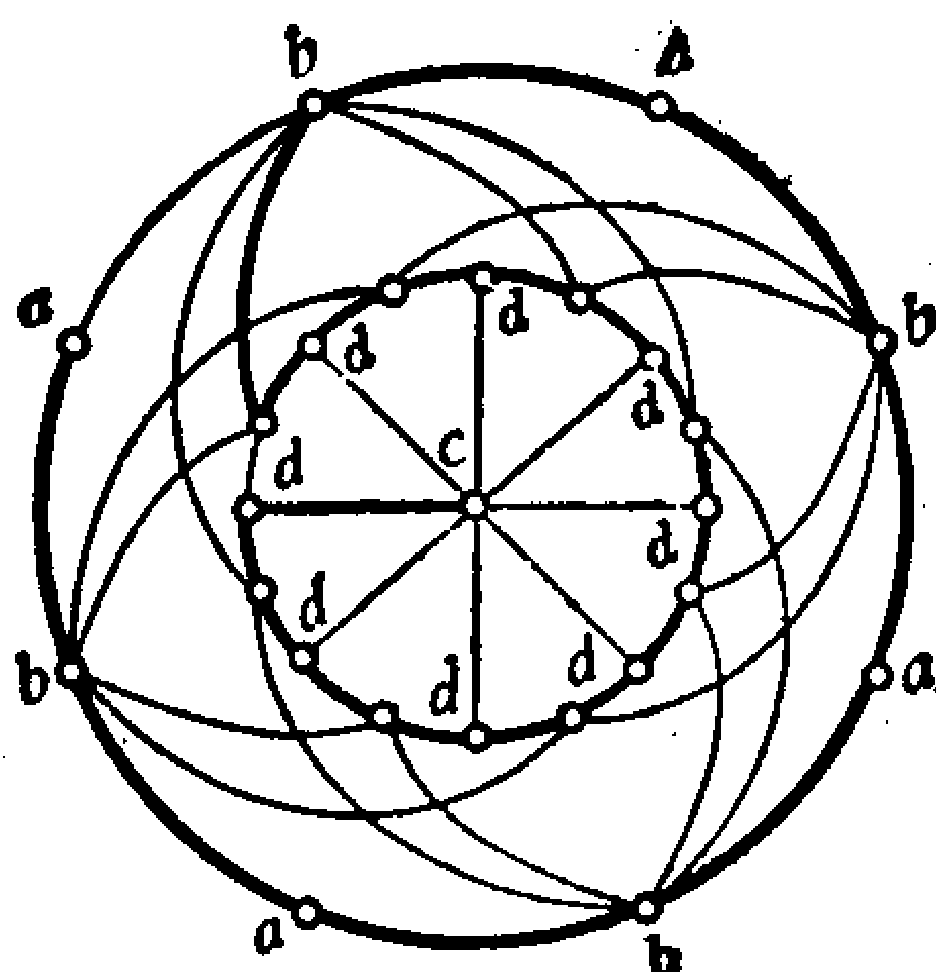


图 97

点记以d; 它们都与c邻接. 图97表示同一个图G, 只是使得K的顶点落在一个圆上. 现在, 我们的图是更清楚了, 其中有着许多哈密尔顿路, 这些哈密尔顿路之一在图97中用粗线标出. 在"棋盘"上, 对应于马跳法如图98所示.

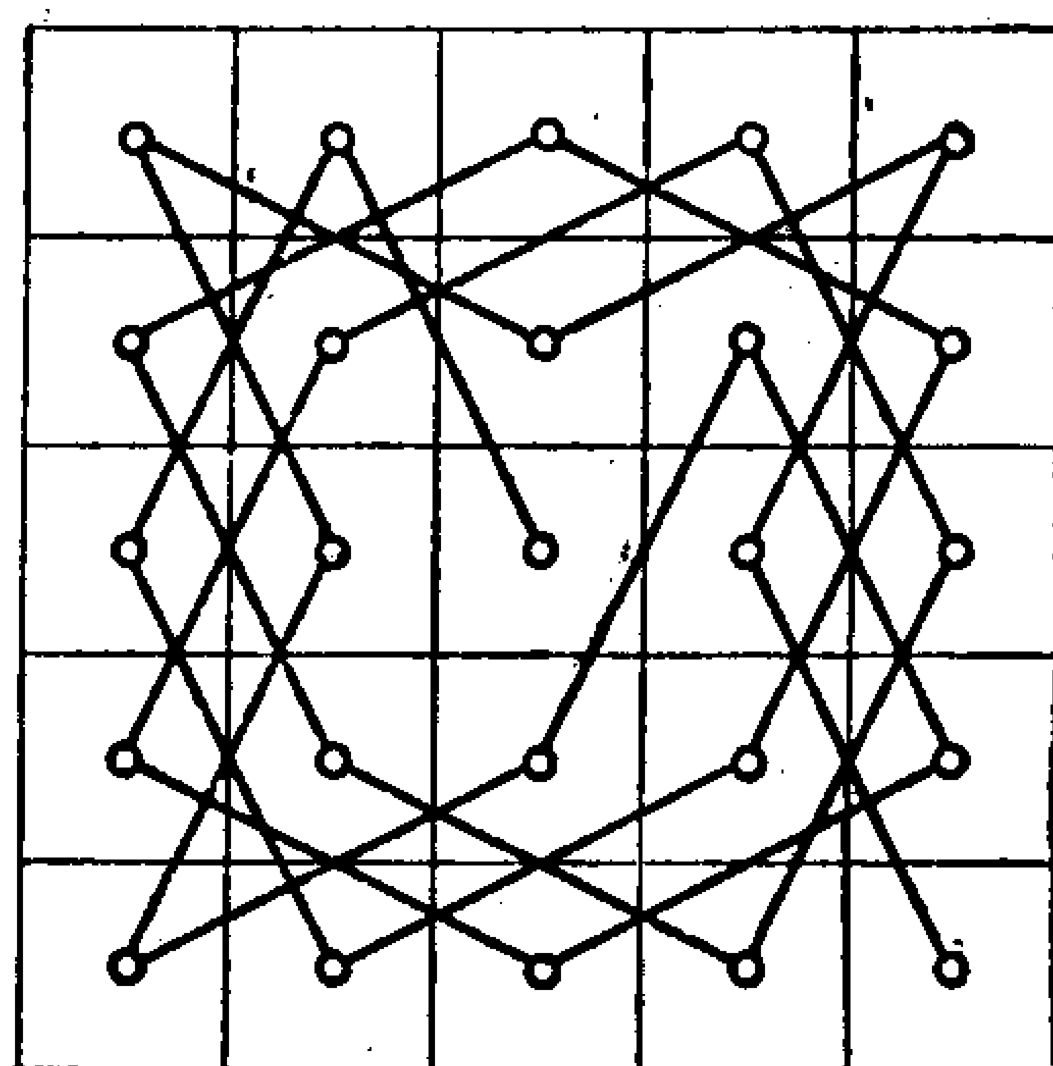
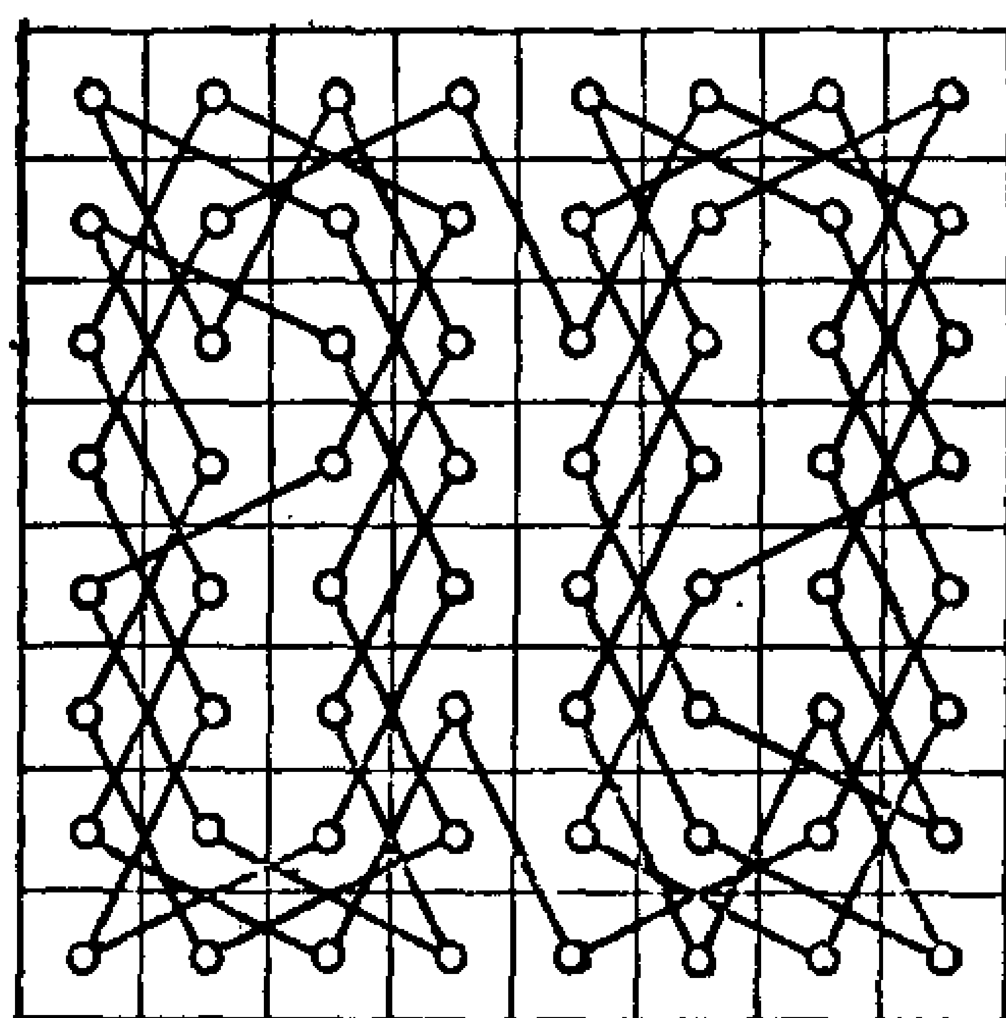


图 98

我们必须强调4或9格的"棋盘"不能由一马的跳动所完全覆盖. 在第一种棋盘上, 马根本不能跳, 而第二种"棋盘"的中央的一格, 不能由一马从其余的任一格所到达. 另一方面, "真正的"棋盘(有64格的)能被单独一马所全部覆盖, 即使是加上条件: 在棋盘的最先与最后一格间的距离恰

相当于马的一步跳动. 就是，在棋盘上用所述方式画出的图是一哈密尔顿回路. 有着大量已知的解,问题已经过长期的研究. 然而,未经尝试和失败要找出解来还是相当困难的. 图 99 所表示的哈密尔顿回路是这些解中的一个; 另一解如图 100 所示，其中马的跳动顺序是用数字给出的. 这后一解的奥妙在于任一行或列的和是 260. 还有一些类似的解(组成所谓幻方).


图 99

50	11	24	63	14	37	26	35
23	62	51	12	25	34	15	38
10	49	64	21	40	13	36	27
61	22	9	52	33	28	39	16
48	7	60	1	20	41	54	29
59	4	45	8	53	32	17	42
6	47	2	57	44	19	30	55
3	58	5	46	31	56	43	18

图 100

上一章讨论了沿着图的边的路线，经过每边恰一次. 只有当图具有一条闭的或开的欧拉线时，这才是可能的. 一个一般的定理刻画出图有闭的或开的欧拉线的特征（第三章的命题 **6** 与 **7**)，并且给出了寻求应当经过的边的顺序的方法（紧接着第三章问题 **5** 的第二解之后). 本章处理的是类似的问题: 若我们沿着图的某些边走，它的全部顶点都需经到过恰恰一次. 当图有哈密尔顿回路或哈密尔顿路时,此要求是能兑现的. 不过,既还没有一般的命题来刻画一个图具有哈密尔顿回路或哈密尔顿路的特征，也未得到一种寻求这样的路线的做法.（倒存在一些表明图有哈密尔顿回路或哈密尔顿路的充分条件，但这些条件都不是必要的. 本章稍后将介绍其中的几个. ）所以说,在一个图中寻求哈密尔顿回路比寻求欧拉线要困难得多. 问题的解,在实用上也许是重要的. 例如,某一旅行者必须访问某些城市,他就必得考虑由公路或铁路

的网络所对应的图，他应当沿图的哈密尔顿回路或哈密尔顿路走，若于此图中存在哈密尔顿回路或路．一种经济的路线意味着只需最低的费用．这一著名的问题（"旅行推销员问题"或货郎担问题）仍未获解决．

回到问题，十二面体游戏之进一步的研究，也导致问题 6 的解决．按照游戏的规则，插塞子的顺序，可由沿图 84 中图的对应边走而得来——有如练习 1 的解一样．图的平面表示的每个顶点次数为 3；因此，来到一个顶点（插入一个塞子）后，我们必须作左或右的拐弯，分别记为 l 与 r．于是，在固定第一个顶点与第一条边以后，路线可由字母 l 与 r 的一个序列表示出来．比如，在图 101 中，以 p 与 e 分别表示第一个顶点与第一条边，则由粗线标出的哈密尔顿回路，便可由如下的序列表示出来：

$$rrrlrlrlllrrrlrlrlll.$$

这序列由 20 项组成，每项表示我们沿一新边所作的拐弯；最

图 101

图 102

后的字母 l 表示通向边 e 的一次拐弯．由任一顶点出发，能找到同一条道路．若顺时针地环绕一圆周写上这些字母，则从任一点出发，如果我们顺时针方向走，就得到同一哈密尔顿回路（见图 102）．若路线沿着此哈密尔顿回路转换方向，则来到一个顶点以

后，我们必须分别以右(或左)转代替左(或右)转. 即序列的项的字母 r 与 l 分别改写为 l 与 r, 沿着序列, 仍按顺时针方向，就得到换向后的同一哈密尔顿回路. 结果相同于图 102 关于图形中以一实线表示的轴的反射. 图 102 还有值得注意的另一性质. 若我们从 x 出发, 顺时针地把对立的字母(l 与 r 换成 r 与 l)写出，所得的字母序列相同于从 y 出发, 按反时针方向, 但不交换字母. 所得到的序列. 因此, 图 102 表示了沿此哈密尔顿回路, 从任一点开始, 按顺时针与反时针方向走, 所得的全部可能的路线.

设图 86 的哈密尔顿回路(练习 1 的解)以此方式来表示, 以水平底边为第一边, 其左端为出发点, 则所得序列为

$$rlrlrlllrrrlrlrlllrr,$$

它也能以下列方式得到: 在图 102 中，从 z 点出发，按顺时针方向, 读出字母. 一般地，我们可以证明沿图 84 的一哈密尔顿回路的任一路线可类似地得到，即可从图 102 读出. 这就是十二面体游戏的任一解能由图 102 读出的合适的字母序列表示出来.

在游戏的图 G 中，出发点 p 与第一边 e 可加以固定而不失一般性, 因为可以认为游戏中使用的实际的十二面体是对称的, 它的边是没有区别的.

也将应用下列法则:

I. 一个回路的真子集绝不能是回路.

II. G 的每个顶点在 G 内的次数是 3, 但在 G 的任一哈密尔顿回路内是 2.. 由此可见, 若 q 与 r 是关联于边 f 的两顶点, 且另有关联于 q 的两边属于 G 的一哈密尔顿回路 H, 则 f 不属于 H, 但 H 包含关联于 r 的另两边(见图 103).

因此, 若字母 r 与 l 的某个序列表示游戏的一个解, 又若把它写到一圆周上(如图 102 那样)则有下列性质:

(1) 序列不能由字母 r 与 l 交错地组成; 甚至 7 个字母组成

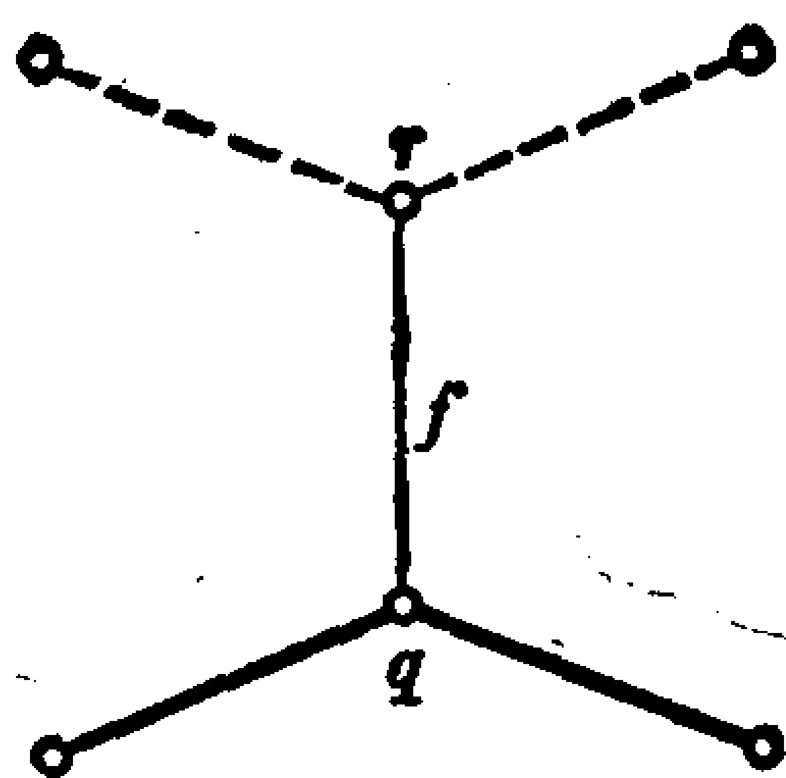


图 103

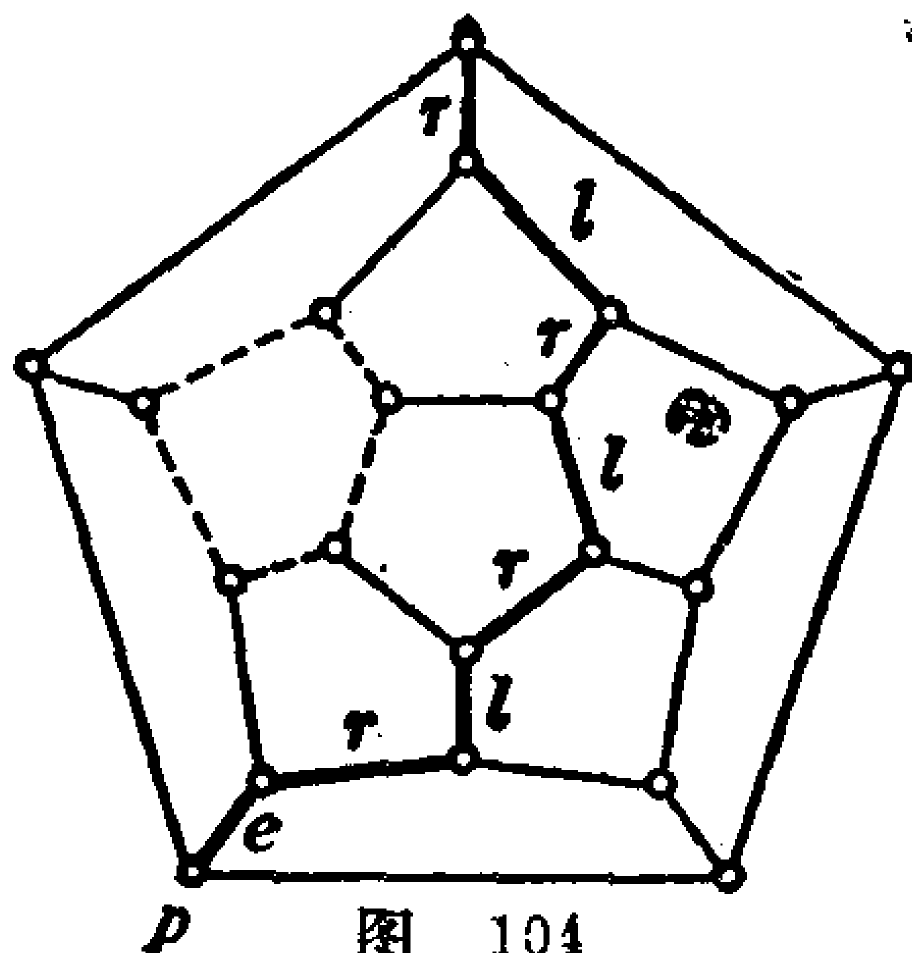


图 104

的交错的序列也不能有．为了表明这一点，从字母 r 出发的一个序列的一个片断，在图 104 中用粗线表示它．此时，法则 II 表明由虚线表示的边出现在同一哈密尔顿回路中，这是矛盾于法则 I 的．类似地，象 $lrlrlrl$ 的序列的片断也是不能有的，因为，同一哈密尔顿回路，按相反方向走就会得到这样的片断．

(2) 同一字母（l 或 r）必须至少相继地出现两次．并且第三个同类的字母也必跟随它们；即，象 $lrrl$（或 $rllr$）的序列的片断不能出现．图 105 的粗线表示情形 $lrrl$．若把法则 II 应用于“实芯”顶点则一方面虚线必须出现，同时，另一方面虚线又必须不出现（在任何含“粗”边的哈密尔顿回路中）．于是，得到了问题 **6** 的一个解，即只须沿图形的粗边放置 6 个塞子．

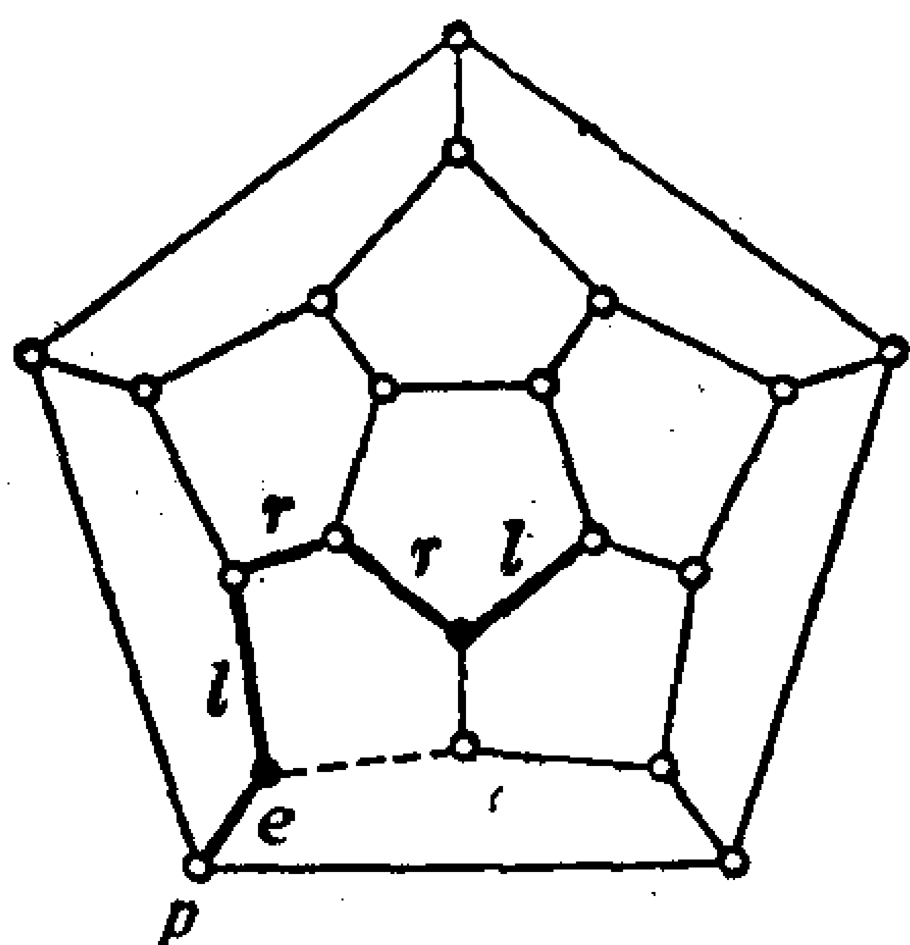


图 105

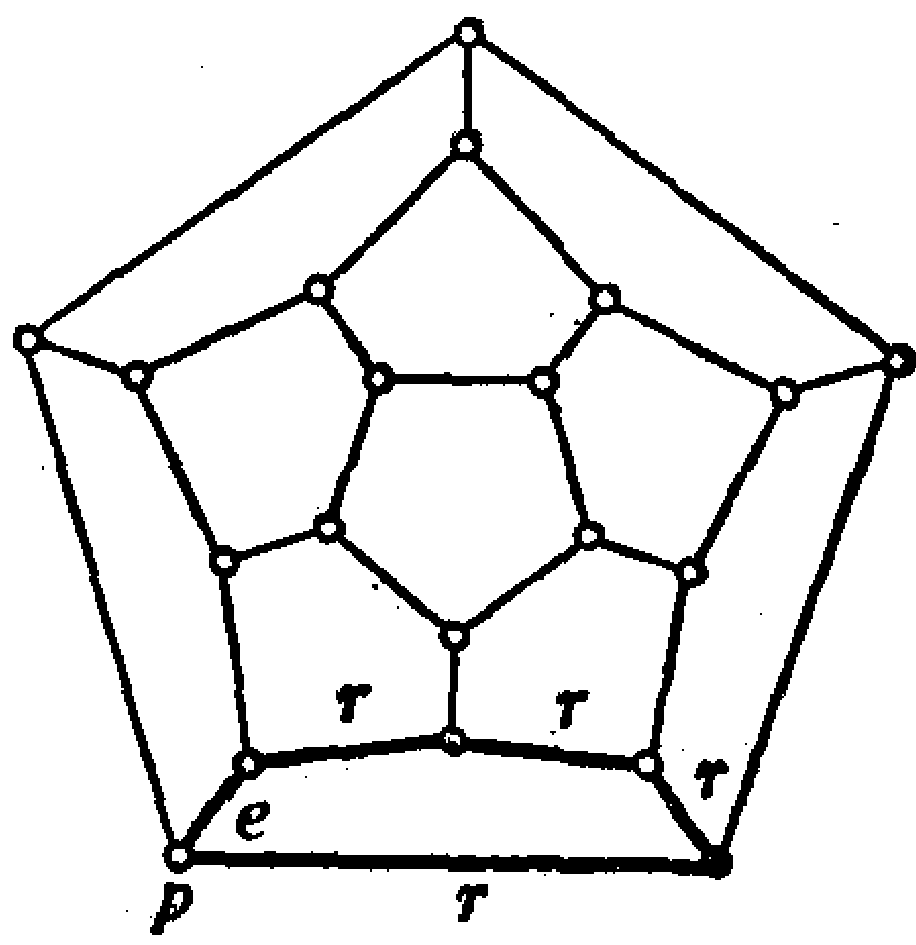


图 106

(3) 然而，同一字母也不能连着出现 4 次，因为一个序列 $rrrr$（或 $llll$）将与法则 I 相抵触（见图 106）．

于是,序列必包含同一字母(比如 r)相继 3 次,并且,由(3)可知有字母 l 作为其先行与后继的项,一个序列 $lrrrl$ 理论上能跟随 l 或 r,但我们将证明哈密尔顿回路的余下部分已经被这些字母所唯一地决定.第一种变形用图 107 中的粗线所表示,这些边意味着同一哈密尔顿回路必须含有虚线所表示的边(据法则 II),同时,类似地,又因为有虚边还须含点的边.粗线必定先由 l 所继续(法则 I),然后是 r(法则 II).于是它接上了点线.类似地,点线又随之以虚线而到达了出发点 p.于是就得到了,由图 108 内的粗线所表示的哈密尔顿回路,即

$$lrrrlrlrlllrrrlrlrll.$$

此序列也含于图 102 内,只须从一个合适的字母出发,按顺时针方向即可念出它.

图 107

图 108

类似地,如果一序列的片断是 $lrrrll$,则哈密尔顿回路在图 110 内由粗线标出,它是能由此序列决定的唯一的一个.(也可参看图 109,它对应于图 101)所以,整个的序列是

$$lrrrlllrlrlrrrlllrlr,$$

它也含于图 102 内,沿反时针方向读出.

显然,替换字母,以 $rlllr$ 开头,不提供新解.因此,若长度为

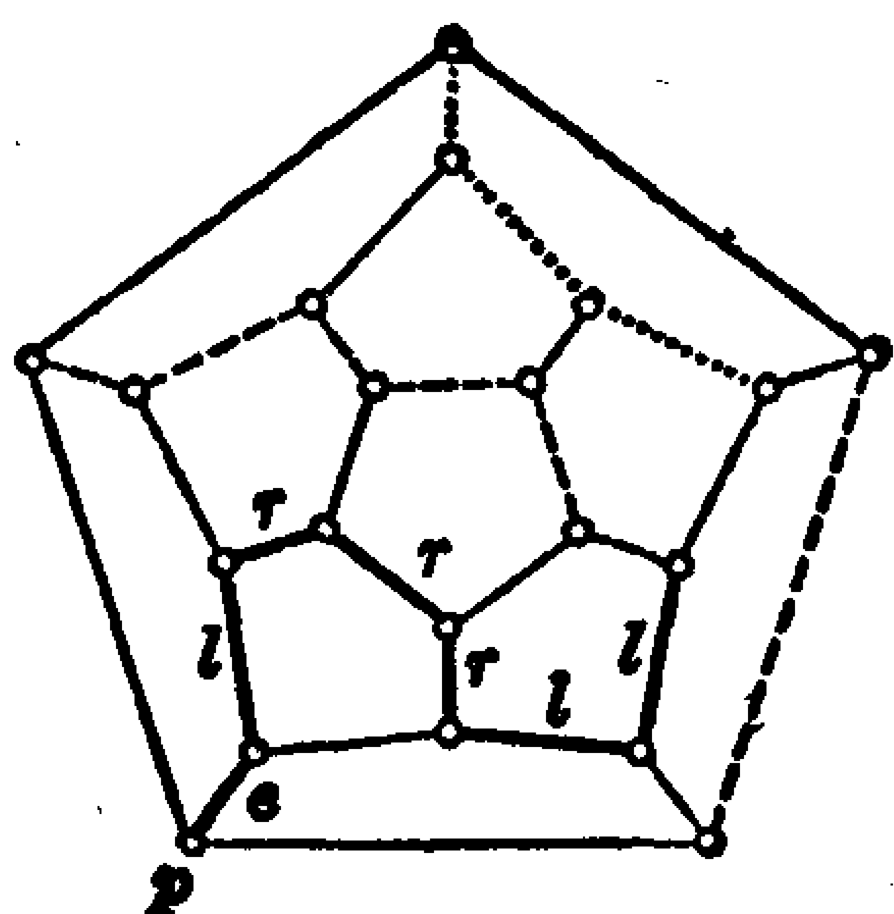


图 109

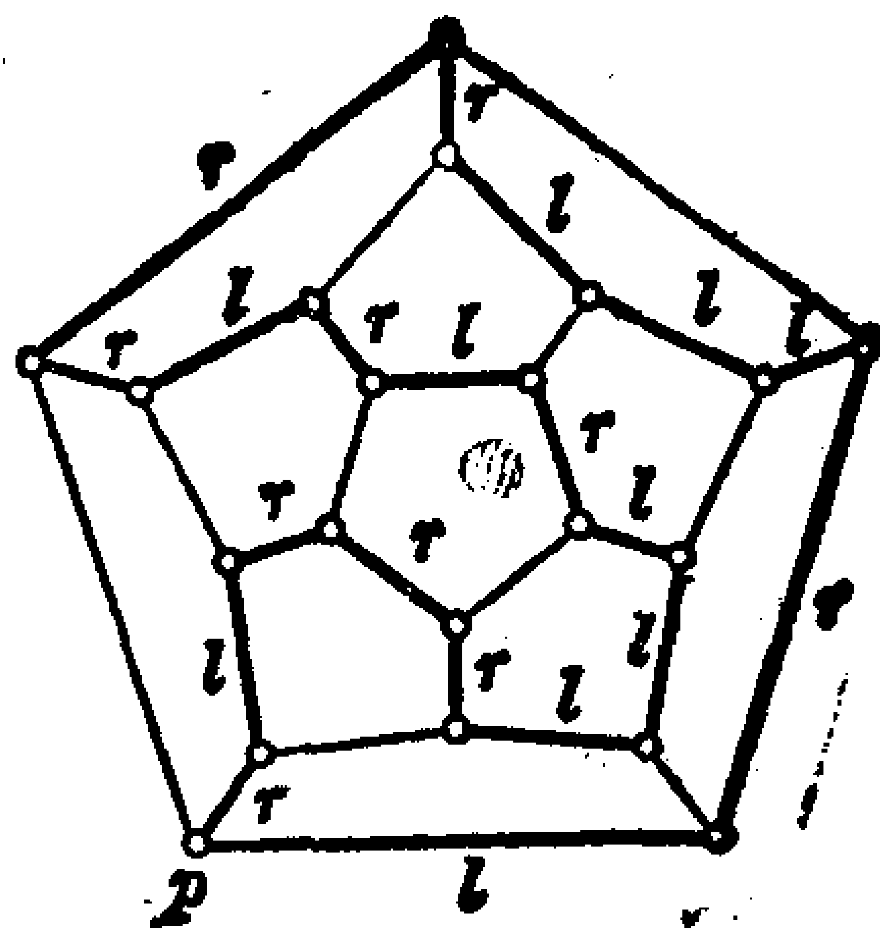


图 110

20 的字母 r 与 l 的序列对应于一个 G 的哈密尔顿回路，则此序列含于图 102 内．这就证明了本命题．

为了解问题 7，我们首先注意到图 102 是关于圆心反射对称的；环绕圆周读出字母，前 10 个字母会被重复．因此，在固定了出发点 p 与始边 e 以后．我们能从任一点出发，按任方向读出序列．但是，十二面体游戏的成功的解的数目按每个方向说都不是 20 而仅仅是 10．在插入第一个与第二个塞子后能以 20 种不同的方法成功地继续游戏．若仅仅固定出发点 p，则所求的数目为 60，因为关联于 p 的三边之任一边可作为始边，而选定其中之一便有 20 个解．

关于哈密尔顿回路的研究总可限于简单图，因为，若一个图不具有哈密尔顿路，则即使把其中的某边改为多重边也仍然不能有哈密尔顿路，类似地，哈密尔顿路或哈密尔顿回路都不含环（除非图仅含一单独的顶点）．

问　题

8．求证：若一个组的每名组员，至少认识 k 名组内其余的组

员，对于某个整数 $k(k>1)$，则其中至少有 $k+1$ 名组员可以围桌而坐，使其中的每名组员都与他的邻座是认识的．假定认识是相互的．

9. 在上一问题中，设 $k=3$，并设组员共为 6 名．求证全体组员能按上一问题的要求围桌而坐．

10. 设 $n>3$．求证：若对任一正整数 $k<(n-1)/2$，具有 n 个顶点的简单图所含次数不大于 k 的顶点数小于 k，则图是连通的．

11. 若删去连通图中回路 K 的任一边，就得一最长路，求证：回路 K 是图的一哈密尔顿回路．

12. 设在 n 个顶点的简单图内最长路端点的次数和不小于 n．求证图中存在一最长路，其端点是邻接的．

为了解问题 8，按通常方式画出与组对应的图（即人与人相互间的认识关系分别对应于顶点与边）；必须证长为 $k+1$ 或更长的回路是存在的，因为人（对应于该回路的顶点）按相同的顺序环绕桌子的坐法是一合适的解．因此，我们来证：

13. 若一简单图中，每个顶点的次数至少是 k $(k>1)$，则此图含一长至少为 $k+1$ 的回路．

应用第一章内讨论过的"最长路方法"．以 L 表示图中的一个最长路，其中每个顶点的次数至少是 k．现在，我们沿 L 走，L 的顶点是 $a_1, a_2, \cdots$，等等（见图 111）．

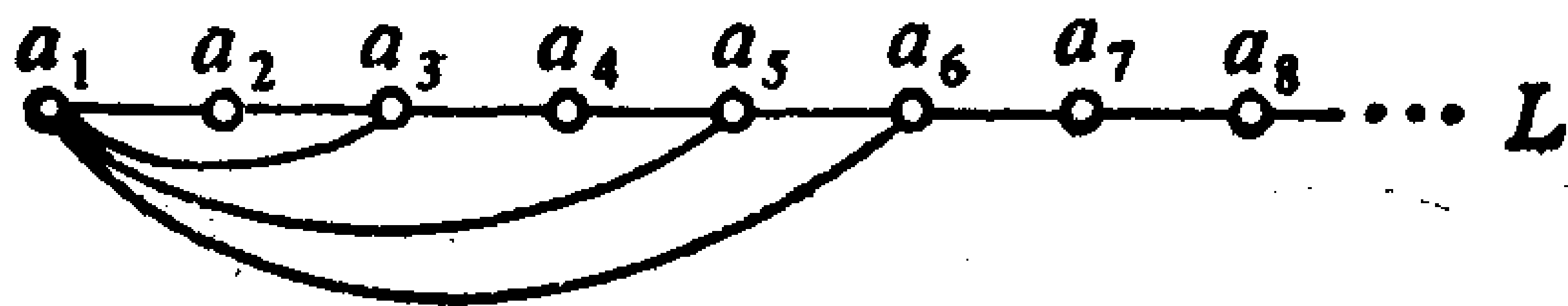


图 111

显然，所有邻接于 a_1 的顶点是属于 L 的．因为 a_1 至少有 k 个邻接顶点，其中存在顶点 a_j，这里 $j\geq k+1$．但 L 在 a_1 与 a_j 间的部

分与边$\{a_i, a_j\}$一起构成长度大于 k 的一个回路.

条件并不表明更长回路的存在, 即使图是连通的. 为了说清楚这一点, 我们考虑一个由一些完全图联接而成的图, 其中的每个完全图都有 $k+1$ 个顶点, 且它们间仅有一顶点公共. 例如, 图 88 的图就有此性质, 它有两个部分, 且 $k=3$.

为了解问题 **9**, 须证下列命题: 一个具有 6 个顶点的简单图, 若其每个顶点的次数至少是 3, 则此图 G 有一哈密尔顿回路.

假设不然, G 没有哈密尔顿回路. 此时, 据问题 **13**, 存在长为 4 或 5 的一回路 K. 我们先假定 K 的长是 5. 则不属于 K 顶点 p, 至少邻接于 3 个属于 K 的顶点. 于是, 存在 K 的一边$\{a, b\}$使 a 与 b 邻接于 p (见图 112). 现在若以边$\{a, p\}$及$\{b, p\}$去替换$\{a, b\}$, K 就演变为图的一个哈密尔顿回路, 这是一个矛盾. 现在再假定

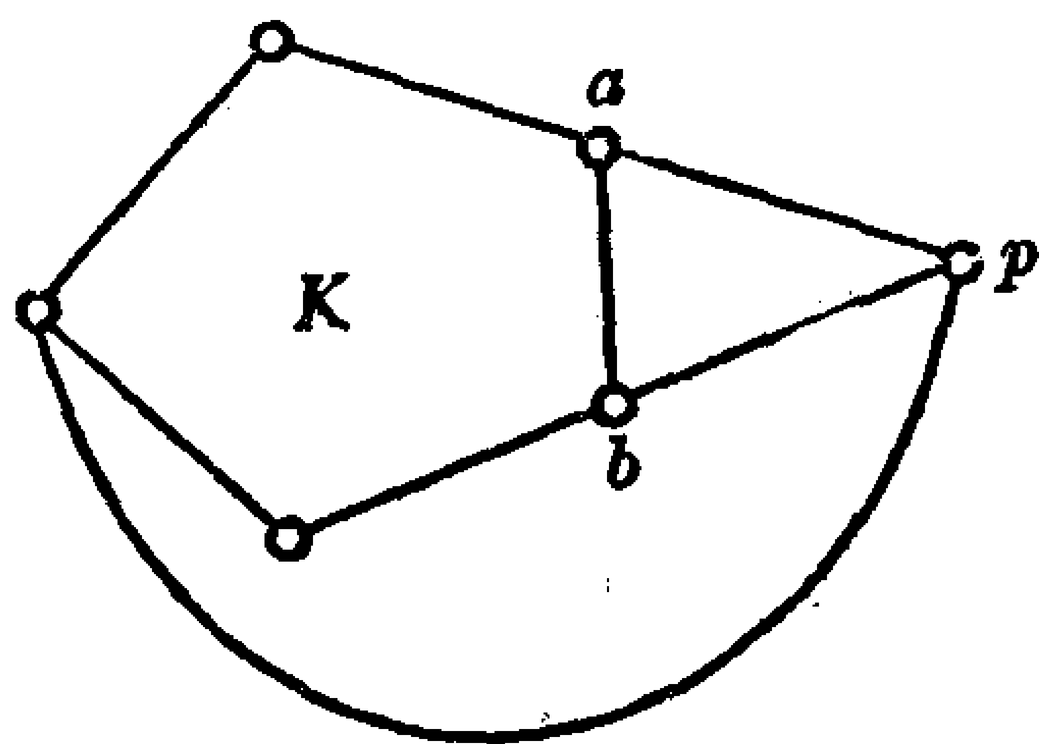


图 112

K 的长度为 4. 设 p 与 q 是 G 的顶点而不属于 K. 若其中之一在 K 中有多于两个的邻接点. 应用上述的方法, 可得出一个长为 5 的回路. 但是, 由于 p, q 的次数均不小于 3, p 与 q 就必须是邻接的, 存在两个属于 K 的顶点, 比如说是 a 与 b, 使得 p 与 q 分别邻接于 a 与 b. 不妨把 K 看作是 a 与 b 间两条路的组合, 此两路中得有一条其长不大于 2, 沿着边$\{a, p\}$, $\{p, q\}$及$\{q, b\}$而不沿着该路走. 就使 K 演变为一更长的回路, 这就又一次地矛盾于假设. 于是, 问题 **9** 得证.

把上一命题中的 n 及 $n/2$ 去替换 6 及 3, 命题仍将是正确的, 即有:

14. 若 n 个顶点的简单图中, 每个顶点的次数不小于 $n/2$ ($n \geq 3$), 则图有一哈密尔顿回路.

为证此命题，我们设简单图G有n个顶点，并具有所述的性质．应用第三章给出的"从最大出发"的原理．以K记G的回路，其长为k，是最长者．命题13表明$k \geqq n/2+1$．可以证明K就是G的一个哈密尔顿回路．假设不然，即$k<n$．G是连通的，G中存在一条路，具有一个端点属于K，但另一端点不属于K这个性质，这些事实可分别依据第一章的命题21与25推出．以L表示这样的最长路，其长为l，其顶点如图113所示．因为$k \geqq n/2+1$，显然，$l<n/2$．

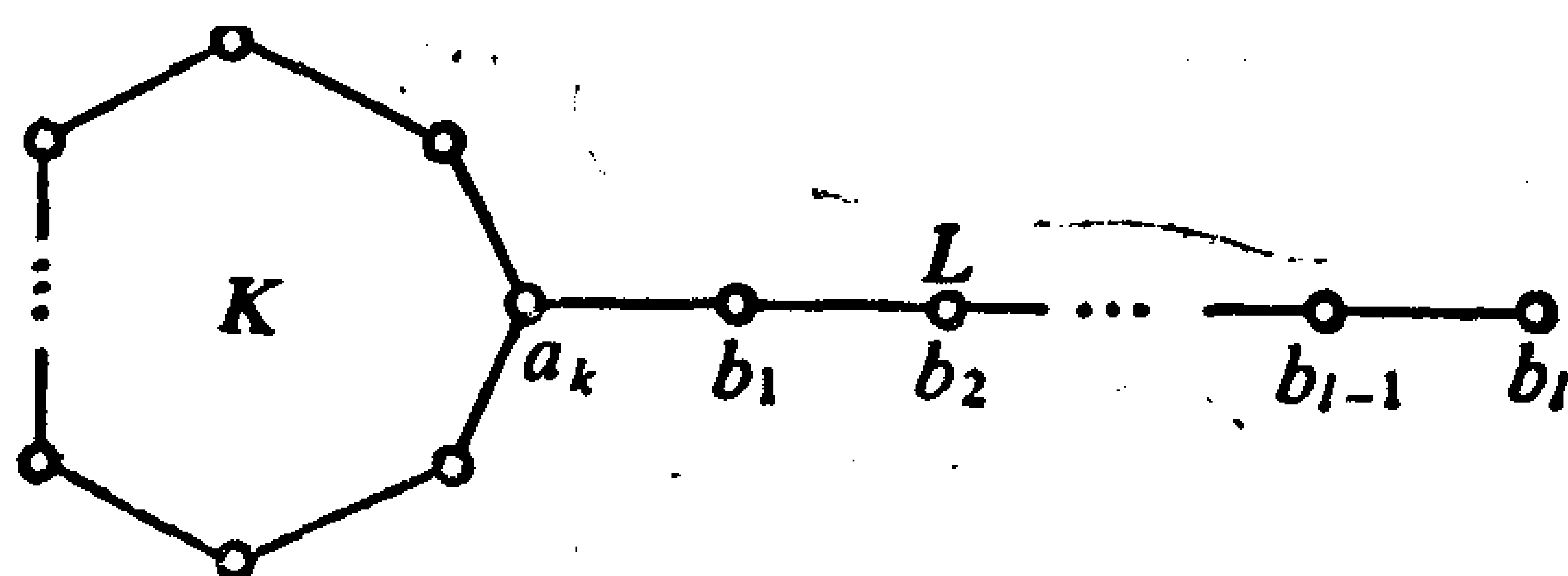


图 113

由于L的极大性，路L的端点b_l只能在L与K中有邻接点．因为在L中它不能有多于l个邻接顶点，又$\varphi(b_l) \geqq n/2$，b_l必至少有$n/2-l$(所以，至少有一)个K中的邻接顶点，它们异于a_k．在图114中a_m表示这些顶点之一．K可以看作是a_k与a_m之间两路之组合；这些路中有一条其长至少为$k/2$．但象这样的一条路，与边$\{b_l, a_m\}$及路L一起构成在G中长至少为$k/2+l+1$的一个回路．由于K是一最大回路，有

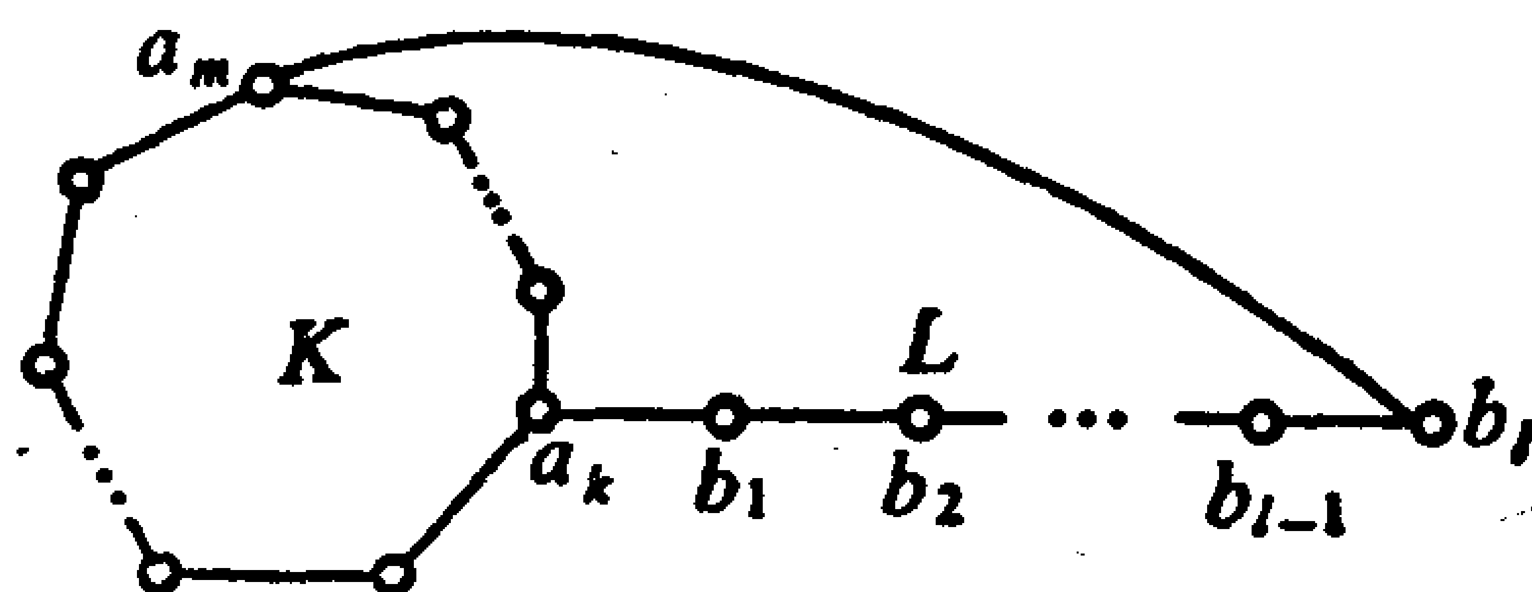


图 114

$$k \geq k/2 + l + 1;$$

即

$$k - l \geq l + 2,$$

或

$$k - l > l + 1.$$

所以，K 的顶点如图 115 所示，这里把K看作是被顶点 a_l, a_{k-l}, a_k 分离而得的三条两两边不相重的路的组合。设 K_1，K_2 及 K_3 是分别以 a_k 及 a_l，a_l 及 a_{k-l}，a_{k-l} 及 a_k 为端点的路。若形为$\{a_i, b_l\}$的一边 e，a_i 是顶点 $a_1, a_2, \cdots, a_l$ 中的一个，则长度大于k 的一个回路能得到，只须把 K_1 内 a_k 与 a_i 间的路换成由L及 e 构成的路（因为 K_1 内 a_k 与 a_i 间路的长不大于 l，而L及 e 所成路的长度为 $l+1$）。但长大于k 的一个回路的存在与K的极大性是矛盾的。类似地，可证明任顶点 a_i 不能属于 K_3。但若 a_j 与 a_{j+1} 都是 K_2 的内点，则 b_l 不能邻接于 a_j 与 a_{j+1}，因为，若能邻接，就能得到一个长为 $k+1$ 的回路，这只要以边$\{a_j, b_l\}$与$\{b_l, a_{j+1}\}$去替换边$\{a_j, a_{j+1}\}$ 即可。全部较早提到过的 b_l 的 $n/2-l$ 个邻接的顶点必是 K_2 的内点，但，即使在此情况下，它们中没有一对是邻接的。因为 K_2 的长是 $k-2l$，它不能含有多于 $(k-2l)/2$ 个 b_l 的邻接顶点。因此

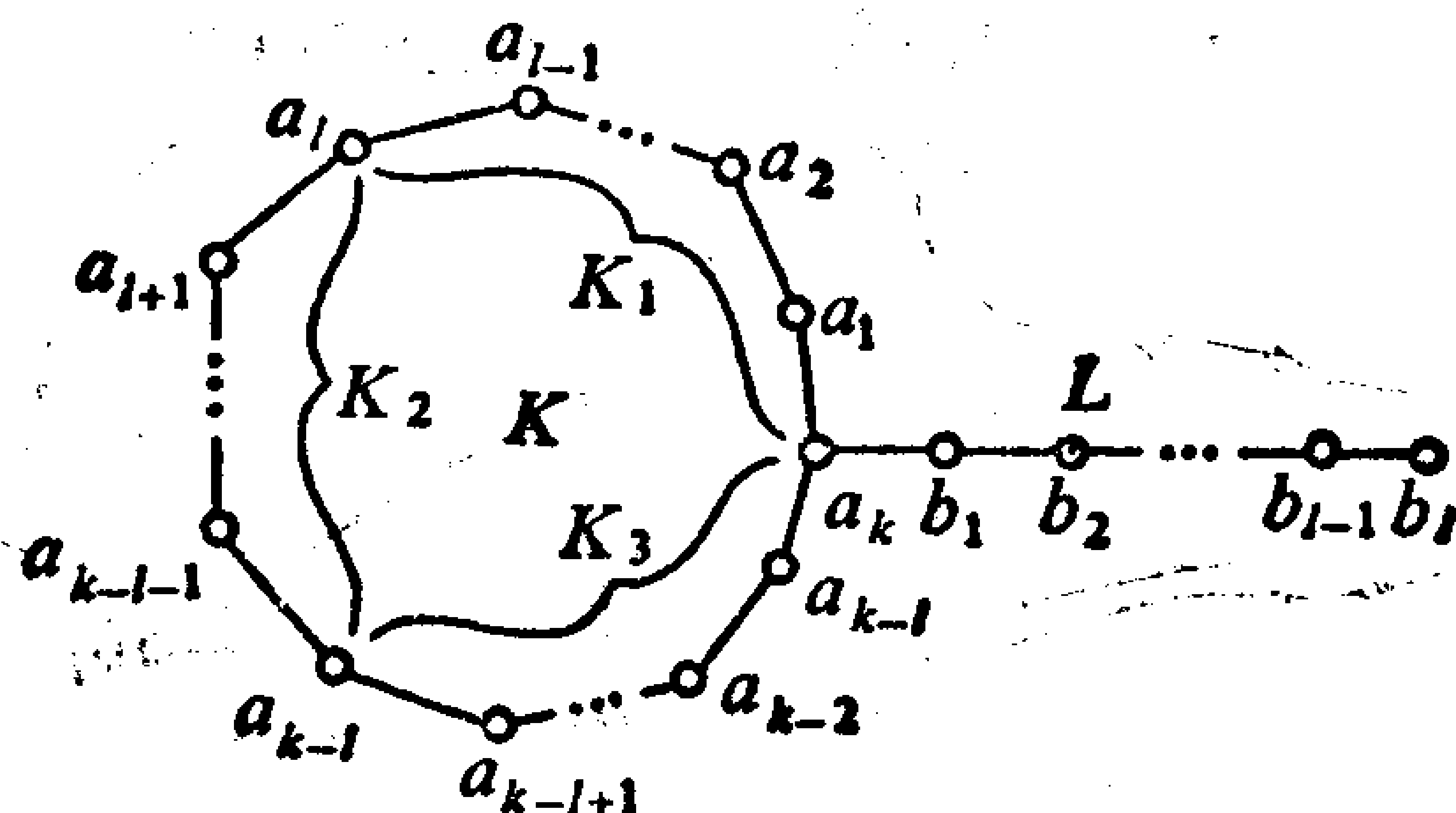


图 115

$$n/2-l\leqq(k-2l)/2,$$

所以

$$n\leqq k;$$

但这事实矛盾于假设：$k<n$. 所以，K是G的一个哈密尔顿回路，命题14得证.

为证问题10的命题，假定一个具有n个顶点的简单图G满足所说的条件. 若G的一个分支含有m个顶点，则分支的每个顶点的次数$\leqq m-1$，即在G中存在多于$m-1$个顶点，其中每个的次数不大于$m-1$. 因此，由条件$m-1\geqq(n-1)/2$，即$m\geqq(n+1)/2$，或$m>n/2$，表明每个分支所含的顶点数大于$n/2$；由此G只能有一个分支，即G是连通的.

为解问题11，假定连通图G的一个回路K有下列性质：删去K的一边，就产生长为l的一条路，它是G中最长路之一. 若K不包含G的全部顶点，第一章的命题25表明存在G的一边$e=\{p, q\}$，使得p属于K但q不属于K. 若删去K中关联于p的一边，而添加上边e，就得到长为$l+1$的一条路，与长为l的路是最长路的假设相矛盾. 因此，K是G的一个哈密尔顿回路，问题11得证.

为了解问题12，我们以L表示有n个顶点的简单图的最长路，沿着L走，设其顶点依次为

$$a_1, a_2, \cdots, a_l.$$

a_1与a_l的每个邻接顶点属于L. 假定

$$\varphi(a_1)+\varphi(a_l)\geqq n.$$

即

$$\varphi(a_l)\geqq n-\varphi(a_1).$$

因此，至多有G的$\varphi(a_1)$个顶点与a_l不邻接，顶点a_l也在其内. 考虑a_1的全部邻接点，总共有$\varphi(a_1)$个，对其中每一个顶点都有一个先行点(在它的前面)，全部这些先行点构成一集合A，A中含有$\varphi(a_1)$个点，显然a_l不在其内. 因此必有一顶点a_i在A内，它邻

接于a_l(见图 116). 最后,考虑以边$\{a_1, a_{i+1}\}$去替换$\{a_i, a_{i+1}\}$,我们得到G的另一最长路,它有互相邻接的端点,于是问题 **12** 得解.

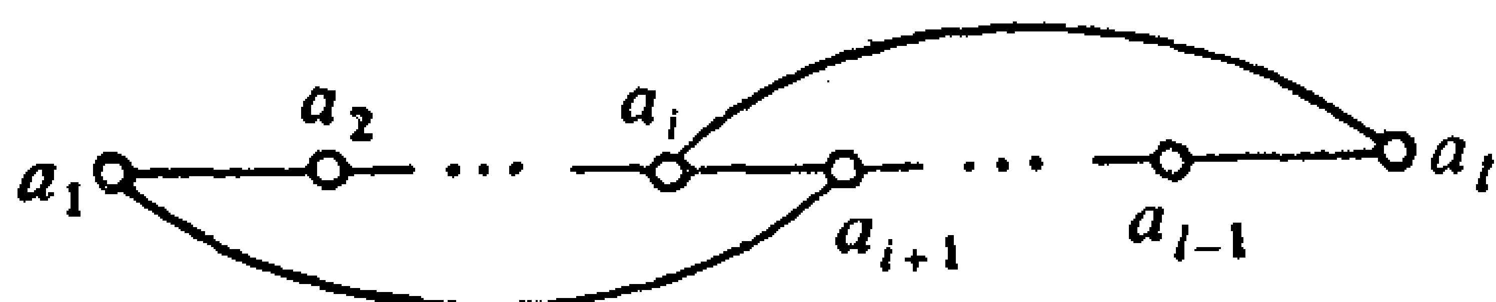


图 116

应用问题 **11** 与 **12** 的结果,命题 **14** 也能证明如下. 若n个顶点的简单图满足命题 **14** 的条件,则G中任两顶点的次数和至少为n,因此,问题 **12** 表明G中存在这样的最长路, 它有邻接的端点. 所以,能找到G的一个回路K,若删去其中的一条边, 就产生G中的一条最长的路. 又由(第一章的)命题 **21** 知道此时G是连通的. 据问题 **11**, K是G的一个哈密尔顿回路.

应当注意,具有n个顶点的简单图,其每个顶点的次数不小于$(n-1)/2$, 此条件不足以保证哈密尔顿回路的存在. 下述的图G是一个反例, 设图G是两个完全子图的组合, 其中的每个子图有$k+1$个顶点,两子图恰有一顶点公共(见图 88, 此时$k=3$). 由此及命题 **14**, 一个简单图中,若其每个顶点的次数"足够大", 则可以说,它会有一个哈密尔顿回路. 又若有 "充分多" 的顶点有"足够大"的次数,则图也会有哈密尔顿回路,见下述命题:

15. 设$n>2$, n是偶数,G是具有n个顶点的简单图. 若对于每个小于$(n-1)/2$的正整数k, 次数小于或等于k的顶点数小于k,则图有一哈密尔顿回路.

设n个顶点的简单图G满足条件, L是其最长路之一,使其端点的次数和也达到最大,可证此和至少为n.

设当我们沿着L走时,它的顶点依次是

$$a_1, a_2, \cdots, a_l.$$

有如问题 **12** 的解,这序列含有$\varphi(a_1)$个顶点(它们全属于L),

它们是 a_1 邻接点的前面的顶点；设 a_i 为其中之一(见图 117)．在 L 中删去边$\{a_i, a_{i+1}\}$，而添加上$\{a_l, a_{i+1}\}$，则得到 G 的一条最长的路，它以 a_i 及 a_l 为端点．由于 L 的端点的次数和的最大性，有

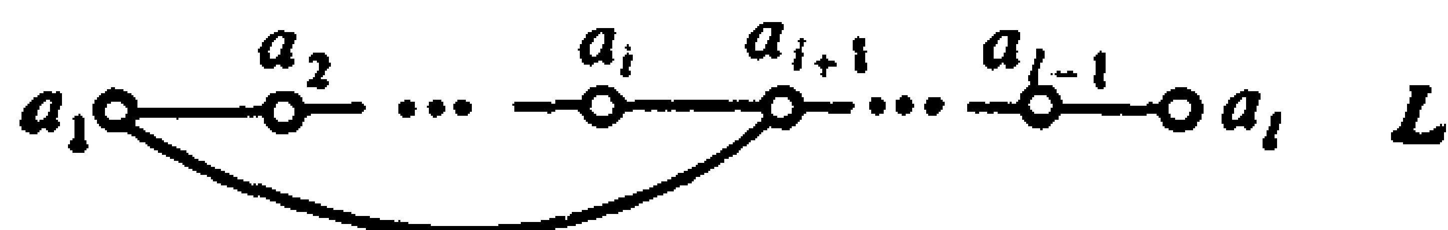


图　117

$$\varphi(a_i) \leqq \varphi(a_1).$$

由此可知，G 中有 $\varphi(a_1)$ 个顶点，其次数小于或等于 $\varphi(a_1)$．于是，我们的命题的条件表明

$$\varphi(a_1) \geqq (n-1)/2;$$

事实上，

$$\varphi(a_1) > (n-1)/2,$$

因为，n 是偶数，等式是不可能成立的．类似地，对于 L 的另端，进行同样的讨论，有

$$\varphi(a_l) > (n-1)/2;$$

所以，
$$\varphi(a_1) + \varphi(a_l) > n-1.$$

这表明，L 的端点的次数和其实至少为 n．

因此，命题 12 保证了 G 的一个回路的存在，它有性质：删去其中之一边即得 G 的一最长路．由于命题 10 的条件为 G 所满足，它还是连通图，所以，由问题 11，就知道存在哈密尔顿回路．命题 15 得证．

如果添加下面的条件，则命题 15 中，n 是偶数，并非必要．若 n 是奇数，则次数小于或等于 $(n-1)/2$ 的顶点数须小于或等于 $(n-1)/2$．可以用类似的方法证明这一命题．证明留给读者去完成．

如果一个图满足命题 14 的条件，那么加上恰当的注意，便也满足命题 15 的条件．因此，命题 14 可由命题 15 得到．

若把命题 15 的条件稍作放宽，则哈密尔顿回路就会不存在。先设 $1\leq k<(n-1)/2$，并考虑分别具有 $k+1$ 个与 $n-k$ 个顶点的两完全图的组合，它们恰有一公共顶点。(第二个完全图的顶点的次数大于 k，因为若 $n-k-1\leq k$ 即有 $k\geq(n-1)/2$)。在所得的图中，次数为 k 的顶点数是 k。此时，命题 15 的条件"几乎"得到满足，但此图不能有哈密尔顿回路，因为它含一割点(关节点)(参阅本章问题 3 解后的注)。若 n 是奇数，考虑一个具有 n 个顶点的简单图，有 $(n+1)/2$ 个"白"顶点与 $(n-1)/2$ 个"黑"顶点。于其中，设有两个同色的顶点是不相邻接的；每个白顶点与每个黑顶点邻接(见图 118，此时 $n=7$)。在此图中次数为 $(n-1)/2$的顶点数是 $(n+1)/2$。(即比 $(n-1)/2$ 恰多 1)，图不能有哈密尔顿回路，有如问题 3 (黑顶点被删去)。

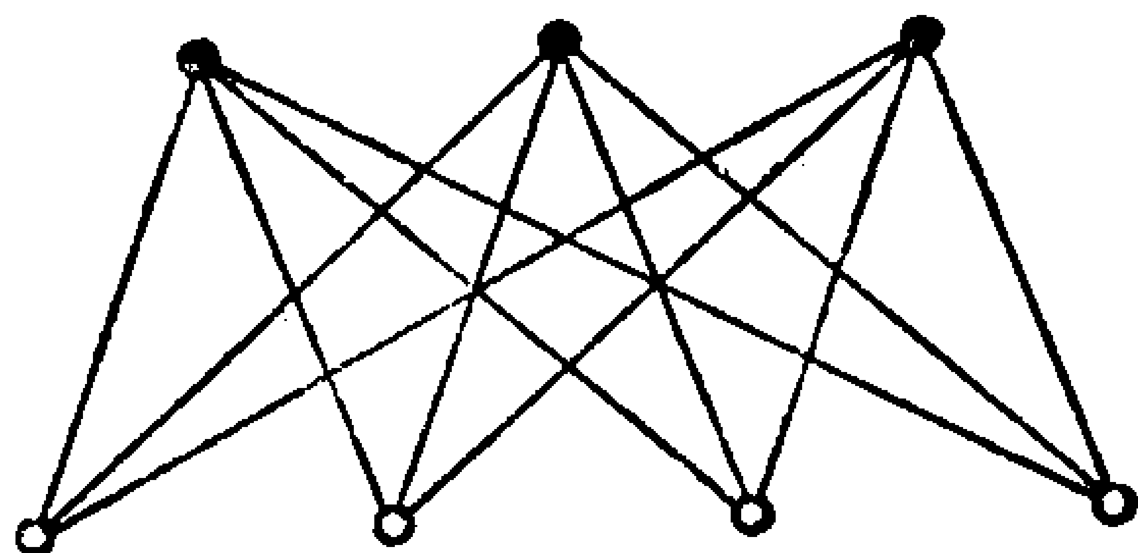


图 118

下面的命题给出哈密尔顿路存在的又一充分条件。其条件与命题 15 的相类似，证明方法也类似。

16. 设 $n>2$，G 是具有 n 个顶点的简单图，使得对每个小于 $(n-1)/2$ 的正整数 k，次数小于或等于 k 的顶点数至多为 k，则 G 具有一哈密尔顿路。

一个图没有哈密尔顿路，但"几乎"符合命题 16 的条件。它由三个完全图组合而成，它们的顶点数分别为 $k+1$，$k+2$ 与 2，恰有一顶点是公共的(见图 90，$k=2$)。这样的一个图有 n 个顶点，其中，$(n-1)/2=k+1$，次数至多为 k 的顶点数恰比 k 多 1。

如上所述，已得到了一些充分条件：使具有这样的条件的图必有哈密尔顿路或哈密尔顿回路。上面讨论的定理，有共同的特征：它们中的每个都要求有相当多的顶点必须是次数充分大的。也已

得到了具有其它类型特征的充分条件．一个多面体（由一些多边形界定的空间的一部分）对应于一个图，若把它的顶点与棱看作图的顶点与边．一个图有哈密尔顿回路，若它对应的多面体 P 满足下列三条件：

（1）P 的每一界面多边形是一三角形．

（2）图的任一三角形来自一界面多边形．（比如，图 119 所示的情形并非如此，它表示两个四面体以一公共面粘连而构成的一个多面体．三条用粗线表示的边构成的三角形，不属于一界面多边形．）

（3）P 的表面象是用橡皮制的（理论上允许作任意数量的扩展）能膨胀为一球面．（图 120 所示不是这样的，它表示一个类似

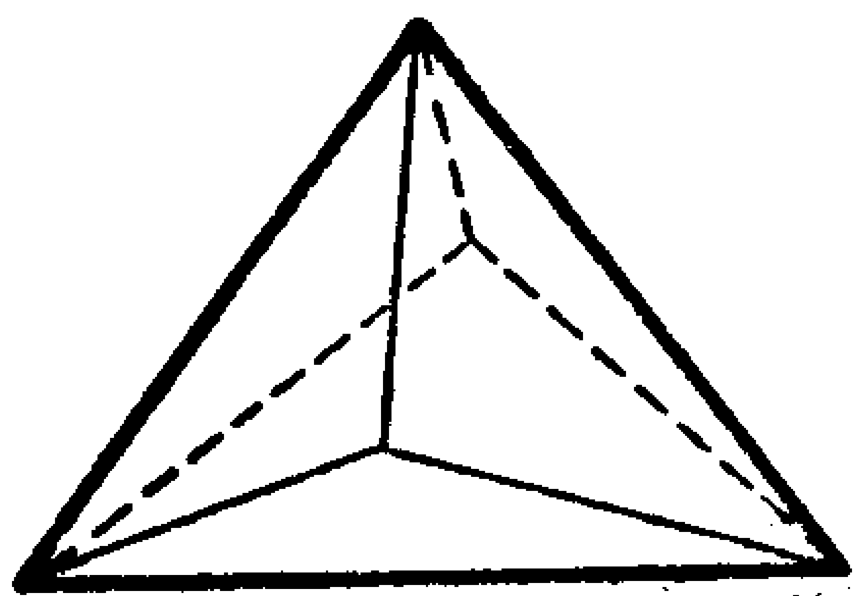


图 119

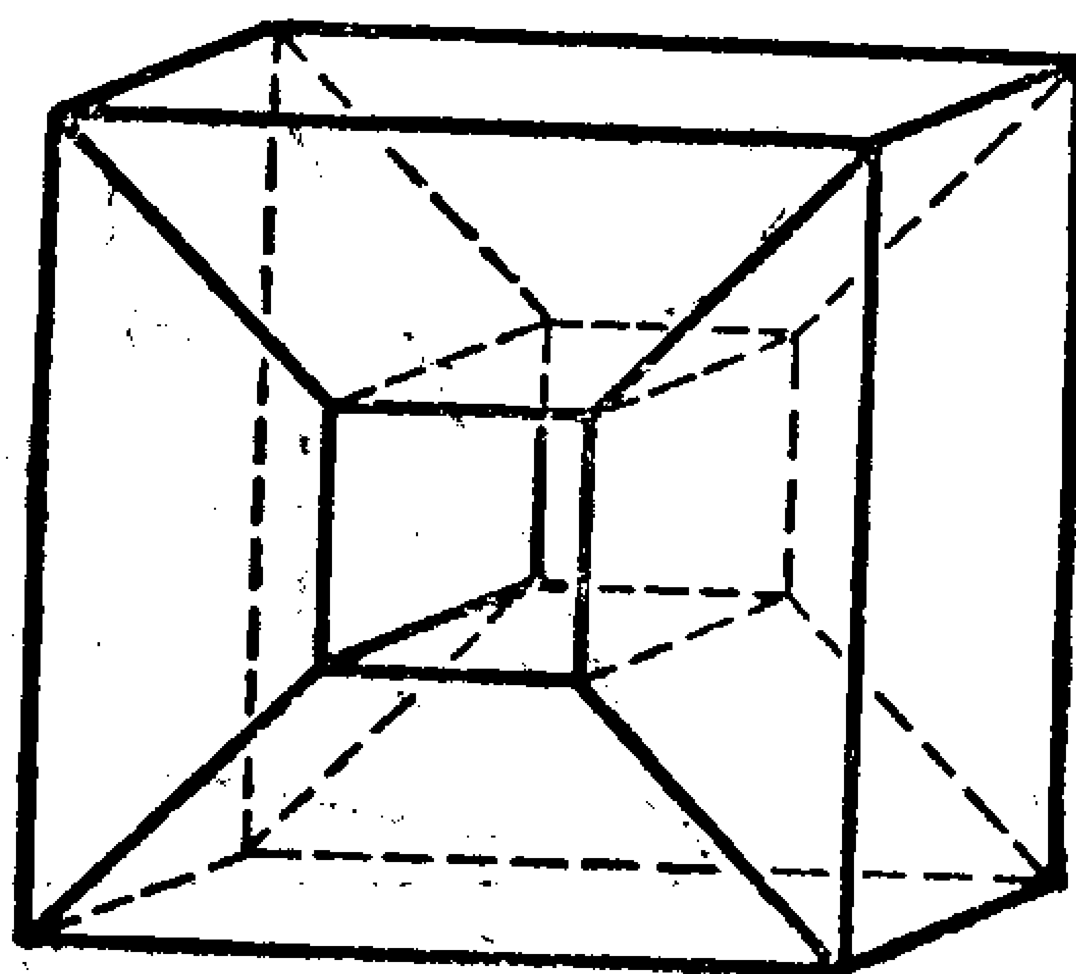
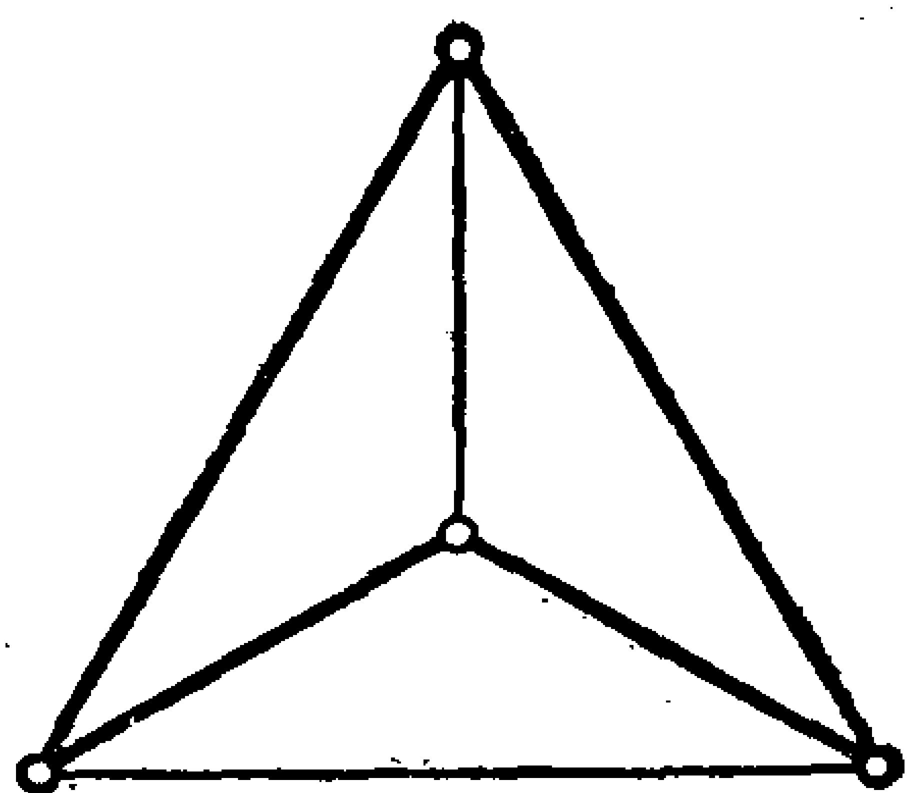


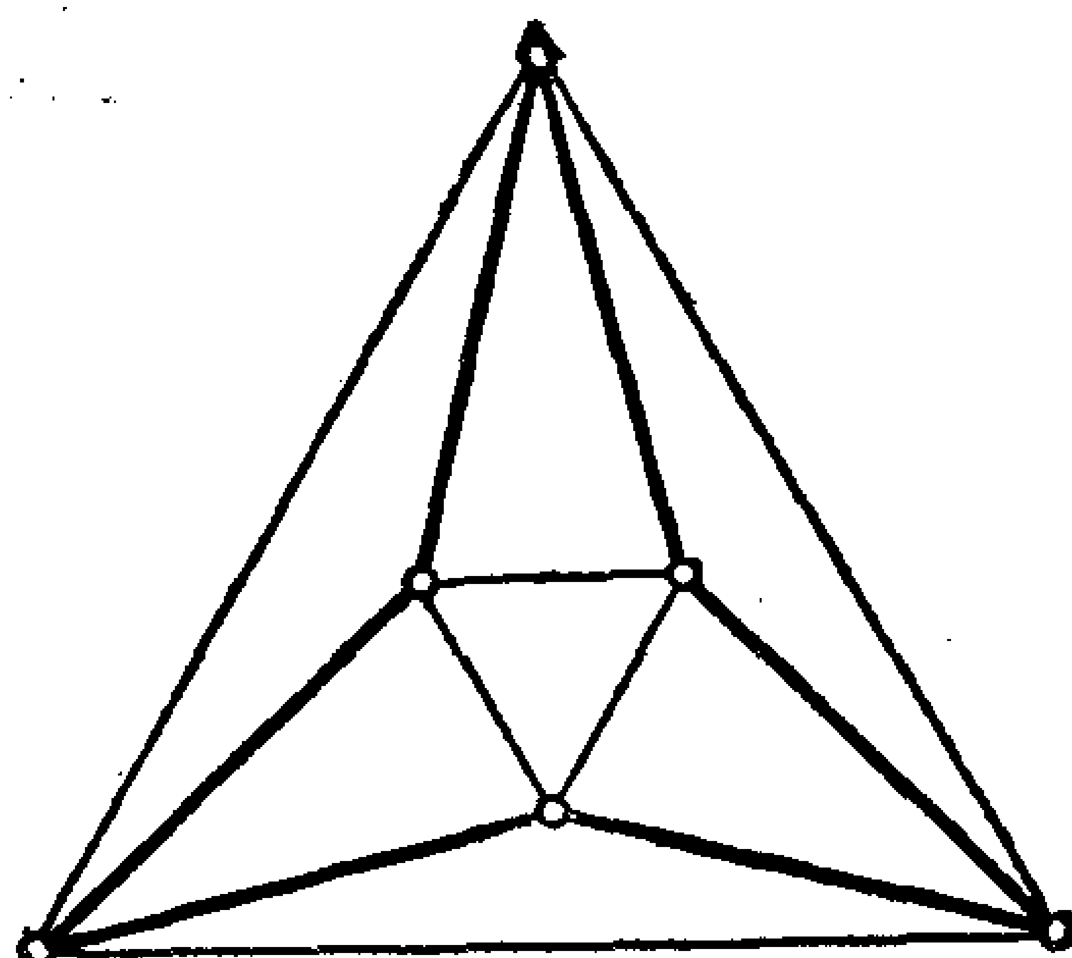
图 120

于画框的结构．）

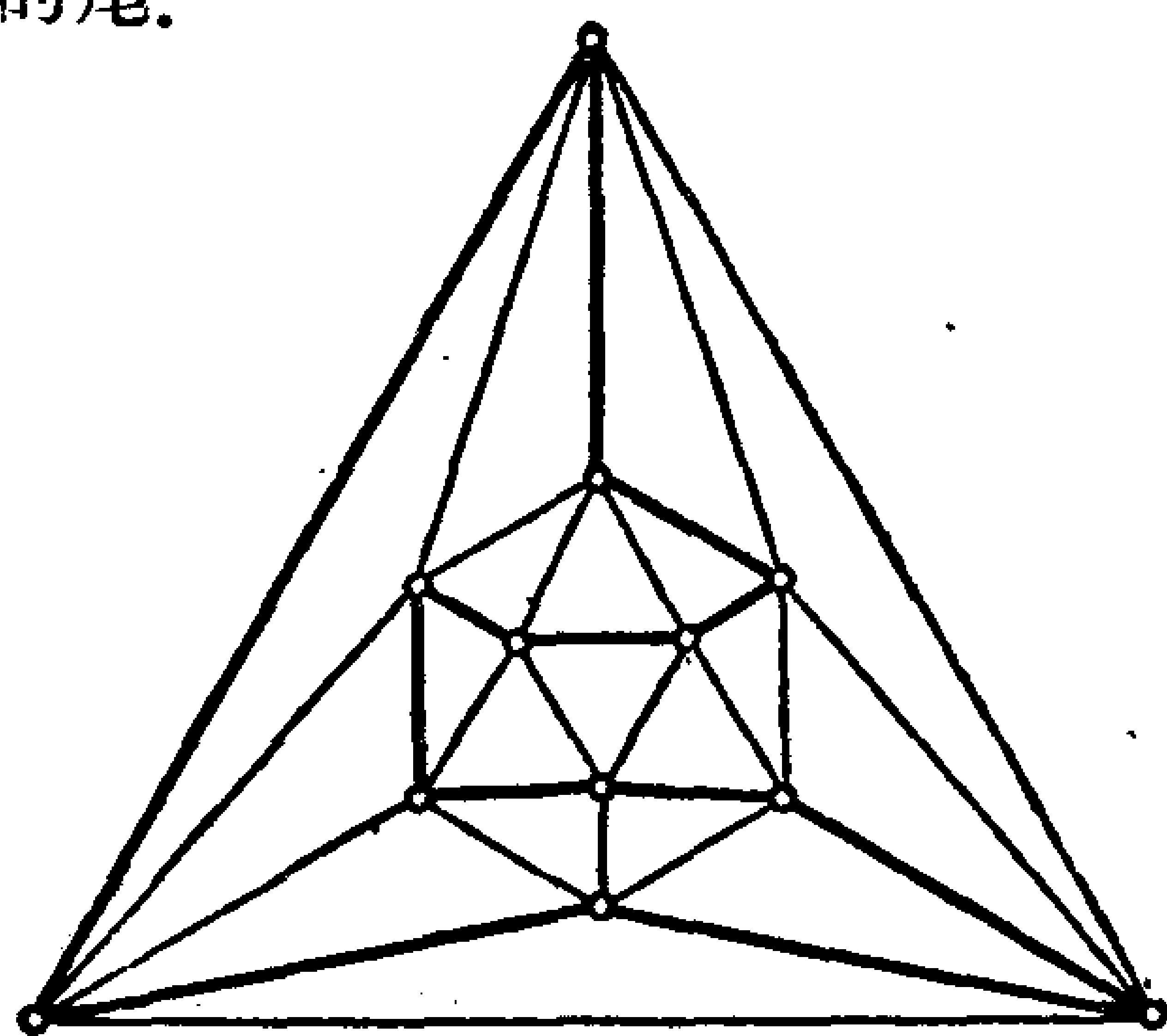
上述条件作为哈密尔顿回路存在的充分条件的证明是相当困难的，因此从略．只有三种正多面体满足这些条件；即四、八与二十面体；其每一个的一个哈密尔顿回路由图 121—123 中的粗线标明．

有向哈密尔顿路与有向哈密尔顿回路分别是一有向图中包含图中全部顶点的一有向路与一有向回路．称一个有向图是简单的，若它不含环，也不包含有相同的头与尾的两条边．不过，一个简单


图 121


图 122

图可能包含长为 2 的一个有向回路，即这样的两边，其中一边的头重合于另一边的尾.


图 123

问　题

17. 在某项竞赛中，每个局中人与所有别的局中人恰赛过一局. 不存在和局. 求证全部局中人可按这样的顺序排出：使每名局中人总输给排列中的后一名.

为了解此问题，设局中人与赛局对应于一有向图的顶点与边，使得一条边的头与尾分别对应于赛局的输者与赢者. 此问题就要

求证明图中存在一有向哈密尔顿路. 因为列举局中人就等价于沿有向哈密尔顿路历数顶点. 一个完全图(在任一顶点对间恰有一边),若被定了向,也叫做一个竞赛图,所以,我们必须证明:

18. 至少含有两顶点的竞赛图恒有一有向哈密尔顿路.

为了证此命题,以 $\vec{L}$ 表示有 $n(n\geqq 2)$ 个顶点的有向图 $\vec{G}$ 的最长有向路之一. 设沿有向路 $\vec{L}$ 的顶点为

$$p_1, p_2, \cdots, p_m.$$

假定 $m<n$, 即存在 $\vec{G}$ 中的一顶点 q, 它异于所给出的顶点. $\vec{L}$ 的极大性表明(q, p_1)与(p_m, q)都不能于 $\vec{G}$ 内出现. 所以, 边(p_1, q)与(q, p_m)都属于 $\vec{G}$. 必存在最小下标 i 使(q, p_i) 属于 $\vec{G}$. 因此,(p_{i-1}, q)也是 $\vec{G}$ 的边(见图 124). 最后,拿边(p_{i-1}, q)和(q, p_i)去替换(p_{i-1}, p_i). 得到了一个新的有向路, 它比 $\vec{L}$ 更长, 这是一个矛盾. 所以,$\vec{G}$ 的每个最长有向路必然是哈密尔顿路,命题 18 得证.

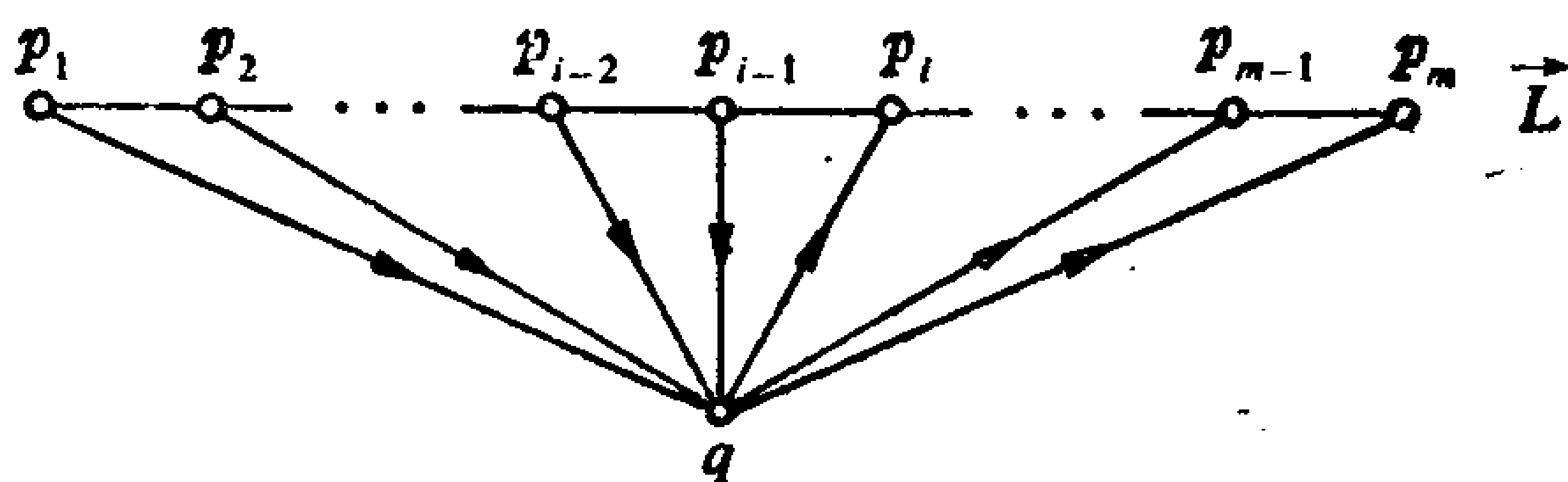


图 124

称一个简单有向图是**对称的**,若每条边(a, b)的存在表明(b, a)也是图的一边. 若我们给一简单图 G_0 的边以定向(以任一方式),在原有每边的一侧依其反方向添画上一边,显然地,我们就得到了一个简单对称有向图 $\vec{G}$. 若 G_0 有一哈密尔顿回路, 则 $\vec{G}$ 显然有一有向哈密尔顿回路. 且反之也对($\vec{G}$ 中有向哈密尔顿回路的存在表明 G_0 中存在哈密尔顿回路). 进一步地,若 G_0 中一顶点 p 有次数为 k, 则在 $\vec{G}$ 中, $\varphi_{\text{out}}(p)=\varphi_{\text{in}}(p)=k$, 反之也对. 所以,下列命题等价于命题 14:

19. 若 $\vec{G}$ 是一个具有 n 个顶点的简单对称有向图，且 $\vec{G}$ 中每个顶点的入次数与出次数都至少为 $n/2$，则 $\vec{G}$ 具有一个有向哈密尔顿回路.

不受对称性的限制，命题照样成立.

20. 一个具有 n 个顶点的简单有向图中，若其每个顶点的入次数与出次数至少为 $n/2$，则图具有一个有向哈密尔顿回路.

命题 20 的证明较冗长，从略. 此命题的进一步推广如下述命题，也述而不证.

21. 若具有 n 个顶点的强连通简单有向图中每个顶点的出次数与入次数的和至少为 n，则此图具有一个有向哈密尔顿回路.

值得注意的是，在一个有向图中存在有向哈密尔顿回路，就必有图的强连通性. 因为对于任一顶点沿着有向哈密尔顿回路，可以到达任一别的顶点. 另一方面，单有强连通性却不足以保证一有向哈密尔顿回路的存在. 作为一个反例，我们可以举出两个有向回路的组合，它们恰有一公共顶点.

现在，我们以 $\vec{G}$ 来表示一个具有 n 个顶点的简单有向图，每个顶点的出次数和入次数的和至少为 $n-1$. 以 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 表示 $\vec{G}$ 的顶点. 把一个新顶点 q 以及所有形如 (p_i, q) 及 (q, p_i) 的边，对每个 i，添加到 $\vec{G}$ 中去，则具有 $n+1$ 个顶点的新有向图 $\vec{G}'$ 满足命题 21 的条件（显然，n 换成了 $n+1$）；于是，$\vec{G}$ 有一有向哈密尔顿回路，但考虑 $\vec{G}'$ 的任一有向哈密尔顿回路，其属于 $\vec{G}$ 的部分构成一个有向哈密尔顿路. 这样，我们就有了命题 21 的推论:

22. 若一有 n 个顶点的简单有向图 $(n \geq 2)$，其每个顶点的出次数与入次数的和至少为 $n-1$，则图含一有向哈密尔顿路.

另一方面，若给一个具有 $n(n \geq 2)$ 个顶点的完全图的边以任意的定向，就得到一个简单有向图，使得其中每个顶点的出次数与入次数的和是 $n-1$. 据命题 22，这有向图有一哈密尔顿路，所

以，命题 18 可由命题 22 推出.

所有这些都表明命题 21 以一有趣的方式指出了命题 14 与18间的一种联系.

无限图的哈密尔顿路与回路，在此不拟作详细介绍. 只提一下“无穷方格”图(也可参看上一章). 对哈密尔顿路与哈密尔顿回路概念的推扩，使我们能说此图含有“单向无限”及双向无限”的哈密尔顿路. 每种情况有如图 125 与 126 所示的例子.

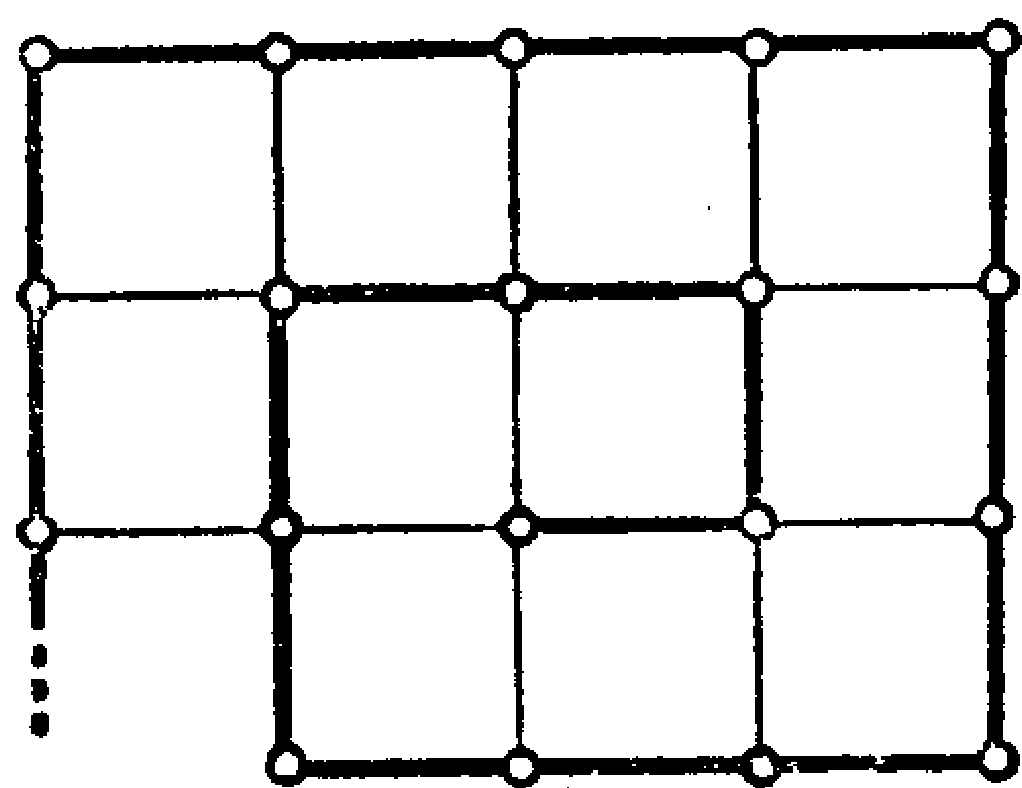


图 125

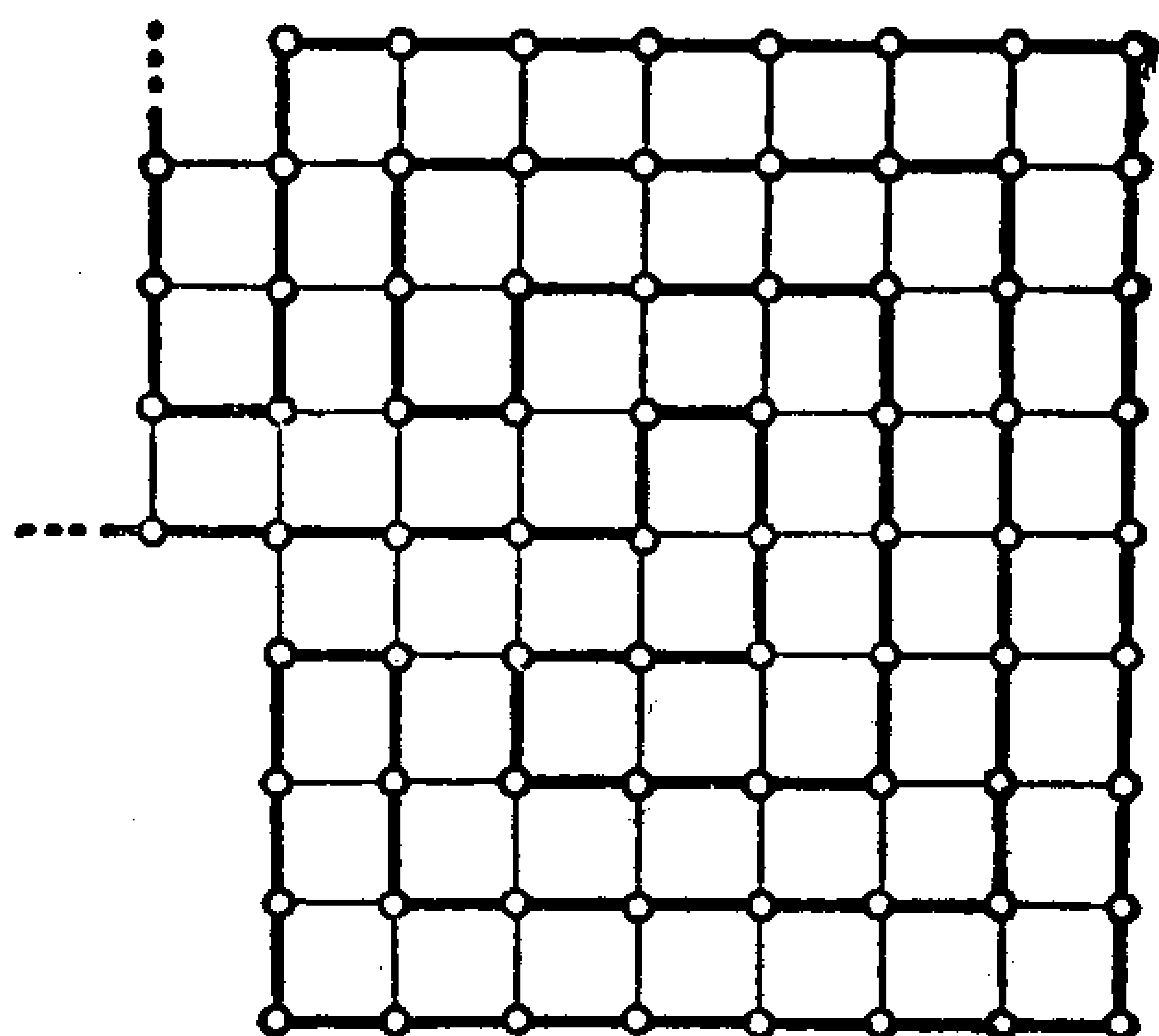


图 126

练　习

23. 一个十二面体游戏的前 5 个塞子已按图 127 的顺序插入，试继续这一游戏直至得到一个成功的结果.

24. 请以单独一个马的跳步覆盖一个有 36 格的“棋盘”的全部方格，使每个方格恰接触到一次，并使第一个与最后一个方格间刚好有马跳一步的距离.

25. 画出有6个顶点与 11 条边而无哈密尔顿回路的一个简单图.

26. 试规定一 5 顶点完全图的边的方向，使所得的有向图无

有向哈密尔顿回路.

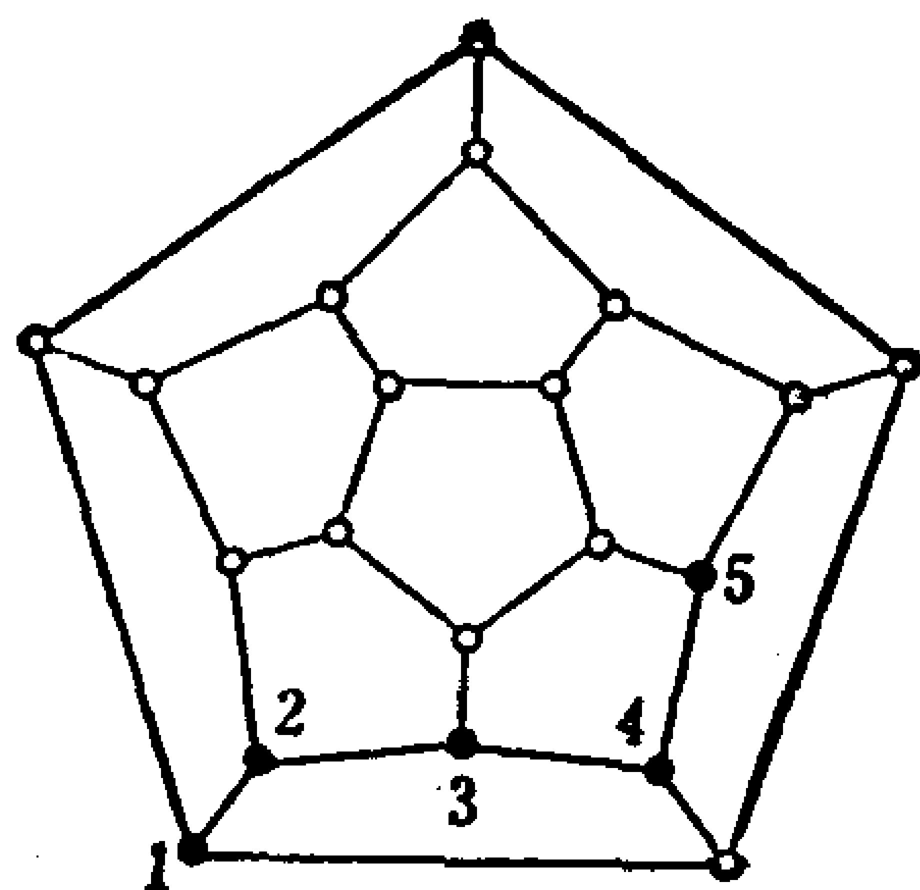


图 127

问　　题

27. 求证：对于 n^2 个方格的"棋盘"，若 n 是奇数，不能按练习 24 所指的方式加以覆盖.

28. 在一八面体的每一面上，放上一四面体，使面完全地重合，求证对应于此多面体的图既无哈密尔顿回路也无哈密尔顿路.

29. 分别确定对应于四面体与六面体的图的哈密尔顿回路数.

30. 在一特定的十二面体游戏中，已插好 3(4 或5) 个塞子. 要成功地继续此游戏能有多少种不同的方法?

31. 一个二十面体是用一张纸制成的. 能否把这张纸剪成两份，使剪子剪每个面为两部分，而不通过二十面体的顶点?

32. 一个简单连通图中，每个顶点的次数至少为 $k(k>1)$，且此图的顶点数至多是 $2k$. 求证此图无割点(参看问题 3 解后割点的定义).

33. 求证：图 128 中的图无哈密尔顿回路.

34. 一个具有 $n(n\geq3)$ 个顶点的简单图中，任两个不邻接的

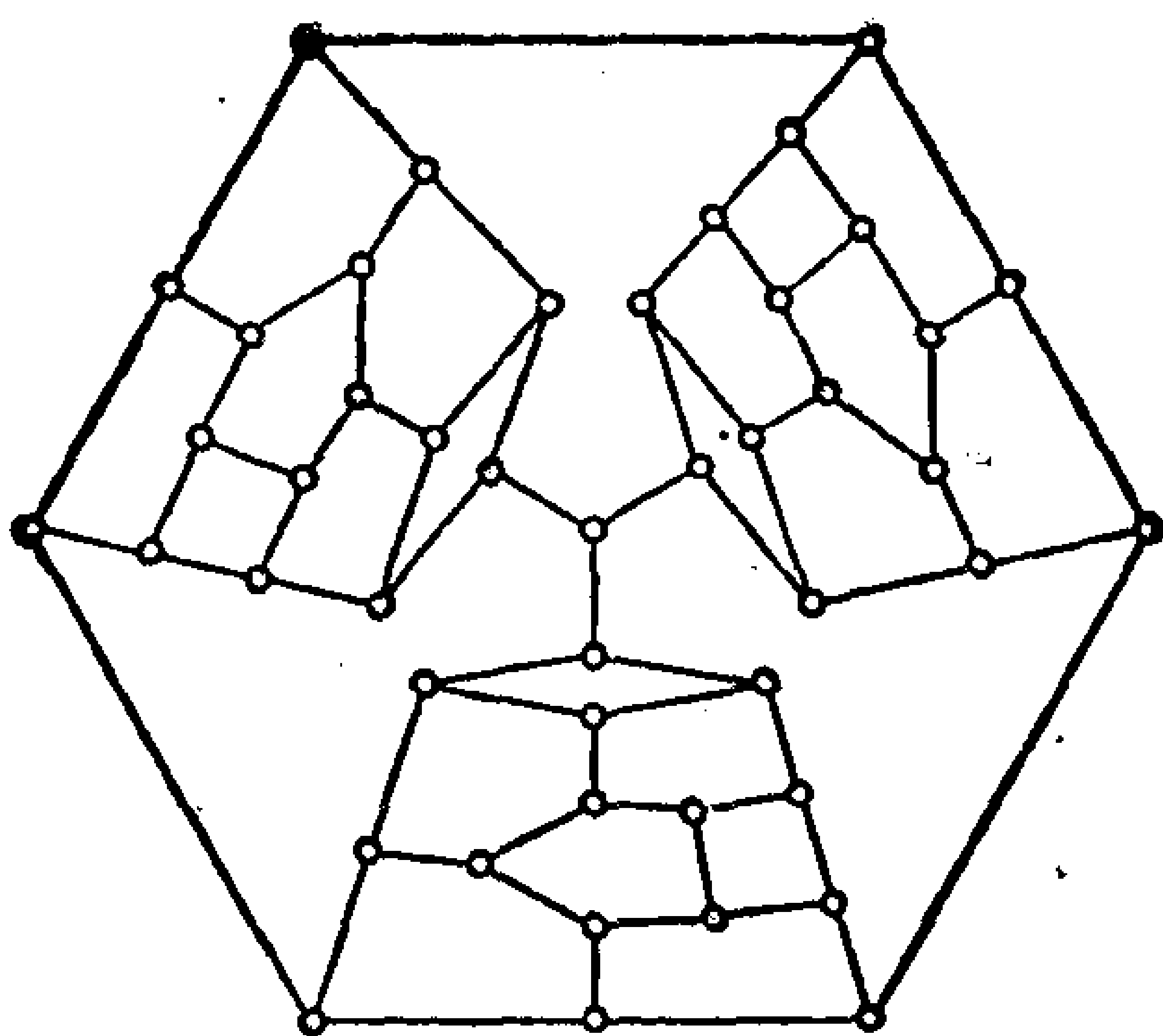


图 128

顶点的次数和不小于 n. 求证此图有哈密尔顿回路.

35. n 个顶点的简单图,若它的边数至少是 $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2$,证明它必有一哈密尔顿回路.

36. 从一至少有两个顶点的完全图删去一边得到一个新图. 求证能给此新图的边以定向,使它无有向哈密尔顿路.

37. 若至少含两顶点的一竞赛图 $\vec{G}$ 有哈密尔顿回路,则它是强连通图. 求证 $\vec{G}$ 的强连通性也表明有向哈密尔顿回路的存在.

38. 解问题 26 时我们看到,若有向图 $\vec{G}$ 有有向哈密尔顿回路,则把 $\vec{G}$ 的顶点集分成两部分,比如说是 A 与 B,存在 $\vec{G}$ 的一边,其头在 B 内而尾在 A 内,还存在另一边,其尾在 B 内而头在 A 内. 求证其逆:若把竞赛图的顶点集分为两部分,我们总能找到具有上述性质的两条边,则竞赛图有一有向哈密尔顿回路.

第五章　匹配问题，因子

组织一项循环赛

有些运动锦标赛采用循环赛的形式，其中每一队与其余各队都比赛，例如，一项足球锦标赛，其中每个队于每星期六参加一场比赛，若干场这样的比赛组成一项循环赛，而每个队，比如说，一星期赛一场．提出下列问题：怎样来挑选每周对阵的队呢？在n个队间的整个循环赛是否总能在$n-1$周的时间内完成？

第二个问题是容易回答的．为了在$n-1$周内安排好n个队间的全部各场比赛，每个队需参加每周的比赛，若n是奇数，这就不可能．我们可以证明若n是偶数则循环赛总能安排在$n-1$周内，而当n是奇数时，则需在n周内．显然，在此情况下，已是极小周数．若n是奇数，每星期六有一个队轮空．

只需证明n是偶数时的命题．若n是奇数，不妨引进一个“想象”的队，被选来与此队对阵的，其实并不真参加比赛．

解此图论问题，用到一点几何知识．（相反的情形也将出现于本书．）

以$a_1, a_2, \cdots, a_n$表示各运动队，设n是偶数．同时，正$n-1$边形的顶点也用字母$a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$来标记，并以$a_n$表示$n-1$边形的中心．考虑$n-1$边形的对称轴之一．它必须是$n-1$边形中某边的垂直平分线，它通过此边所对的顶点(因为$n-1$是奇数)．现在我们把每个顶点(轴上的那个顶点除外)与它的轴对称点联结起来．(这表明对角线被画成与垂直于轴的边相平行．)现在我们再把那单个的顶点沿轴与中心联结(即删去轴的其余部分)，$n=8$时

的情况，如图 129 所示.

如果画在图形上的线确定了每两队间的第一周的赛局，则所有的队将参加这些赛局. 其余 $n-2$ 个赛局的集合，可由转动 $n-1$ 边形而使不同的边依次与定轴垂直来确定. 没有两个队会两次地互相对抗，因为易于证明一个有奇数顶点的正多边形的每一对角线恰好平行于多边形的一条边.

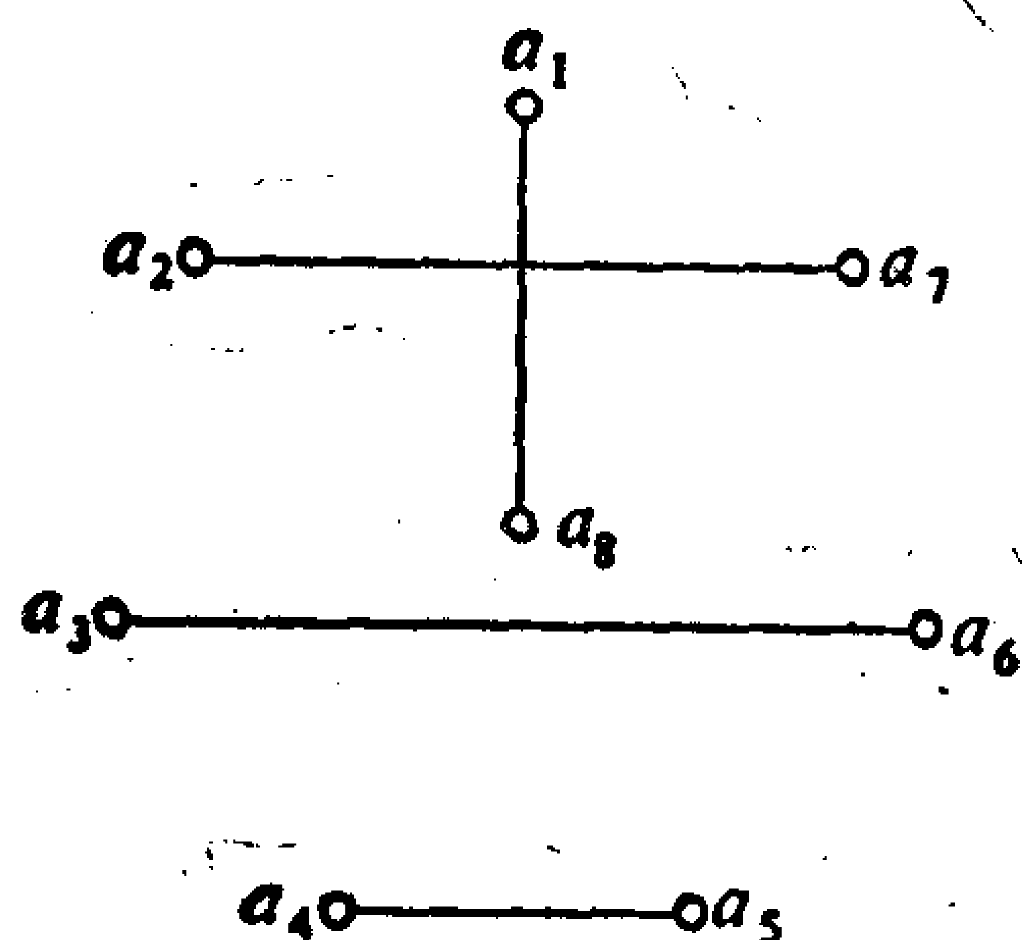


图 129

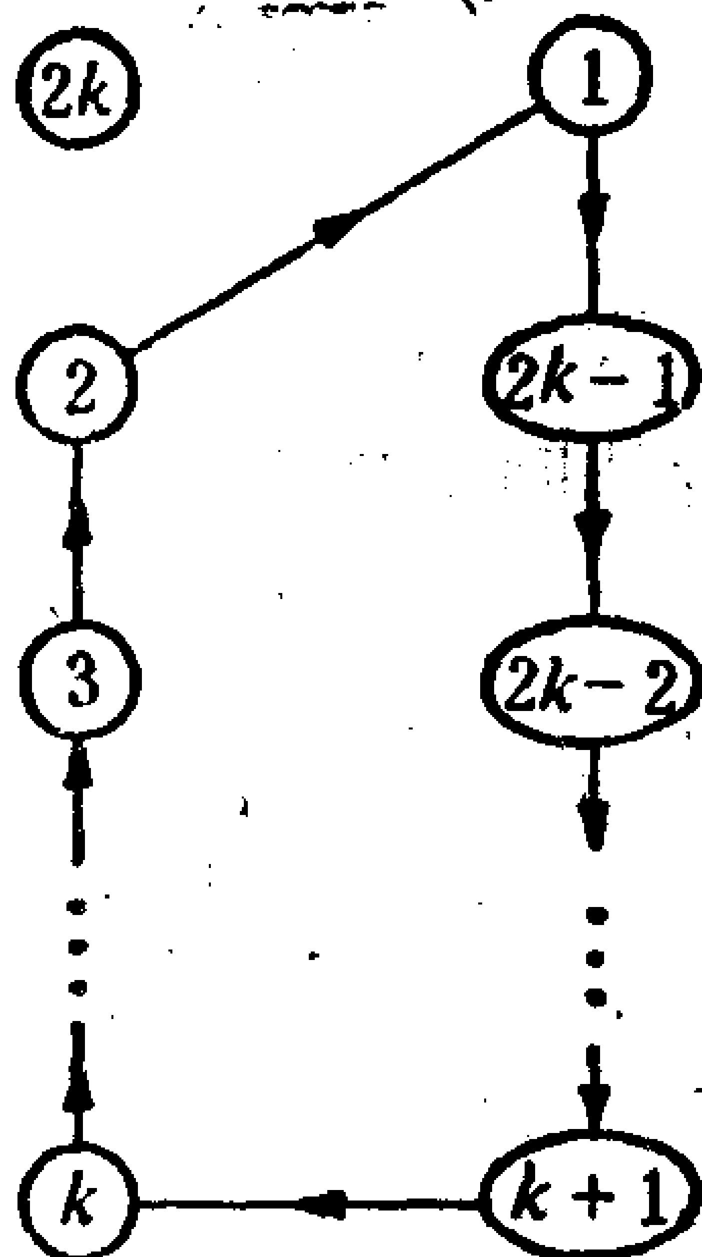


图 130

若 $n=2k$，对于每一赛局的对阵，也能用另一方法来确定. 运动队以数字来标记，在图 130 中，除 $2k$ 外，它们中的每一个数，按箭头的方向移动一个位置；在每个位置中，同一行的两队互相对抗.

此间题可用图论的语言叙述而下：以具有 n 个顶点的完全图 G 表示 $n=2k$ 个队间的比赛. 以一些子图来表示循环赛的赛局集合中各队间的对阵. 由此，需要 G 的 $n-1$ 个子图，每个子图有下列四个性质:

(1) 每个子图含有 G 的每个顶点.

(2) 每个子图的每个顶点的次数是 1.

(3) 没有一对子图有一边是公共的.

(4) G 的每条边含于一个子图中.

G 的一个子图，具有性质(1)与(2)时，叫做 G 的一个 **1-因子**. 若存在 G 的子图，满足条件(1)—(4)，就说 G 是**1-因子的积**(或 G 能分解为 1-因子的积).

由此，已证明了下列命题：

1. 有 $2k$ 个顶点的完全图是 $2k-1$ 个 1-因子的积.

上一章我们讨论了一个图的哈密尔顿回路. 图的一个哈密尔顿回路是包含图的全部顶点，且每个顶点的次数为 2 的子图，我们也称它为图的一个 2-因子.

一般地，若图 G 的子图 G' 包含 G 的全部顶点，G' 的每个顶点的次数是同一数 $k(k\geq 1)$，就把 G' 叫做 G 的一个 **k-因子**. (它可能重合于 G.)因此，一个图的连通 2-因子就是图的一个哈密尔顿回路(见第一章的问题 36). 若 $G_1, G_2, \cdots, G_m$ 分别是图 G 的 k_1-因子，k_2-因子，$\cdots$，k_m-因子，且其中没有一对有一条公共边，又若 G 的每一边含于其中之一，就说 G 是这 m 个因子的积(或 G 能分解为这 m 个因子的积).

采用名词"因子"与"积"的原因，可解释如下，G 的每个顶点的次数是 $k_1+k_2+\cdots+k_m$，相似于多项式的积的次数等于因子的次数之和，此相似性说明代数与图论间有着很强的联系.

一个图称为是正则的，如果它的全部顶点都有相同的次数. 若这次数是 k，就称此图是 k-正则的或次数为 k 的正则图. 若从一个 k-正则图 G 删去一个 l-因子的边($l<k$)，则所得的图是 G 的一个 $(k-l)$-因子.

在图的一个 1-因子中，不能有一对边关联于同一顶点. 一般地，称一个图的某些边是**独立的**，如果其中无环，且其中无两边关联于同一顶点. 图的一个 1-因子的边是独立的，它包含图的全部顶点. 因此，若图有1-因子，则必有偶数个顶点.

图的独立边的一个集合，也叫做图的一个**独立边集**. 图的极

大独立边数是该图的包含着尽可能多的独立边的一个独立边集的边数. 若以 $ie_{max}(G)$ 表示图的极大独立边数, E 是含有 $ie_{max}(G)$ 条边的 G 的一个独立边集, 则称 E 是**一个极大独立边集**. 以下我们以 ie_{max} 代替 $ie_{max}(G)$, 因为所讨论的图往往是不言而喻的. (类似的缩写还将应用于其它场合.)

练　　习

2. 把图 89 中的图分解为 3 个 1-因子的积.

3. 把由八面体的边构成的图(见图 122)分解为两个 2-因子的积, 此图能分解为 1-因子的积吗?

4. 图 131 能否被多米诺骨牌所覆盖, 使得每张骨牌覆盖两个邻接的方格?

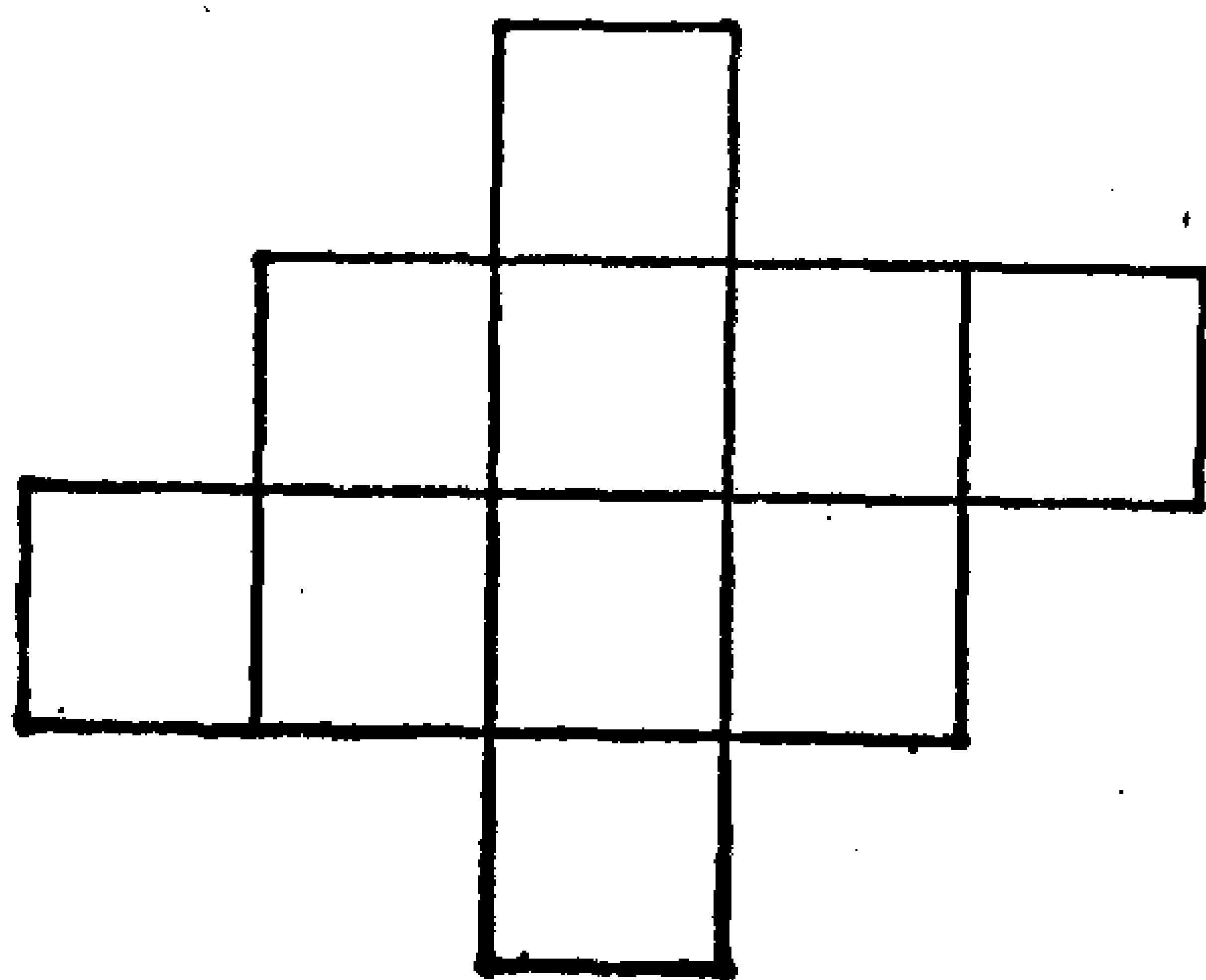


图 131

问　　题

5. 用图的因子的术语, 重述并重解第三章的问题 31.

6. 从棋盘上删去关于中心对称的两个方格. 试决定余下的

盘面能否被多米诺骨牌所覆盖，使得每张牌覆盖两个邻接的方格.

7. 设G是无环的图. 试证：若G的每条边可给以定向，使不存在长为2的有向路，则G的每个回路的长是偶数；反之，若G的每个回路的长是偶数，则能给它的边以定向使其中没有长为2的有向路.

8. 求证：一个次数为2的正则图是两个1-因子的积当且仅当图中每个回路的长是偶数.

9. 有8个问题出现于一科学期刊上，对于每个问题收到两个正确的解. 编辑发现16个解由8个人寄来，每人两解. 求证能对每个问题发表一个解，并使8个人中的每一个恰被提到一次.

图132表示练习2的一个可能的解，其中的粗线，细线与虚线都表示1-因子. 显然，任两个1-因子的积是图的2-因子. 但图不能有任何连通的2-因子(即任何的哈密尔顿回路，如第四章的问题3的一个应用中所证明的).

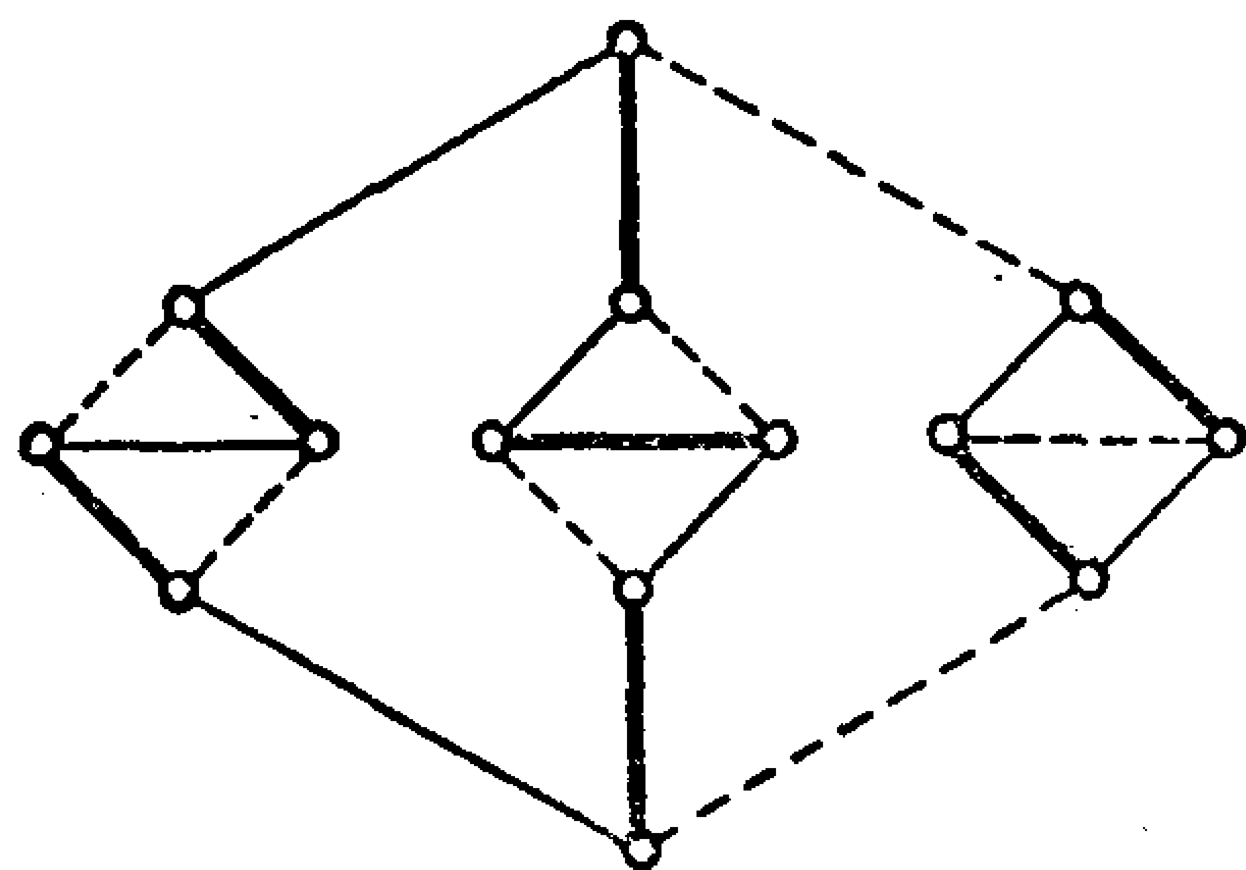


图 132

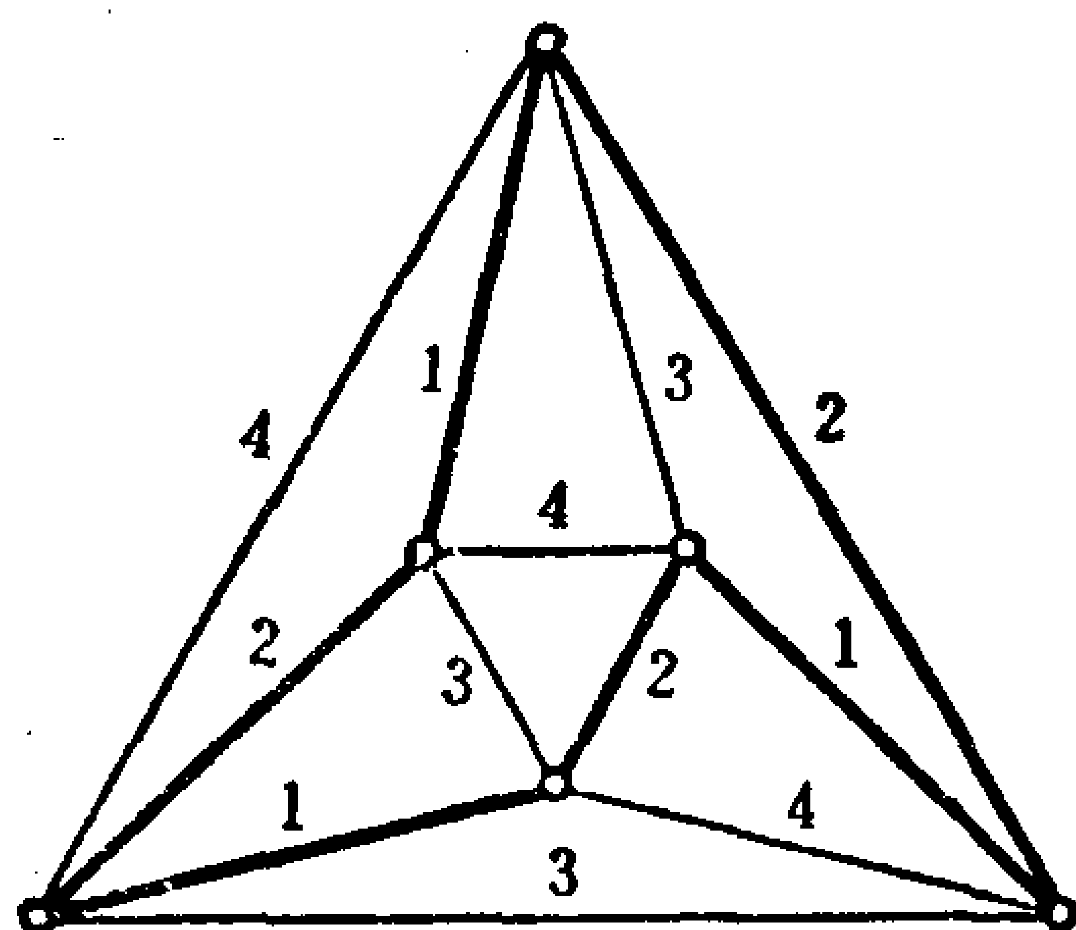


图 133

图122回答了练习3的第一部分. 以粗线与细线标出了图的两个2-因子. "细"线的2-因子不能分解为两个1-因子，因为它包含两个分支，每者有奇数个顶点. 不过，八面体的边的图能分解为连通的2-因子(见图133). 这些2-因子就能分解为1-因子；每

个 1-因子由相同数目的边构成.

很容易证明图 131 不能被多米诺骨牌以练习 4 所指定的方式所覆盖. 可以把图看作是黑白棋盘的一部分（见图 134）. 若覆盖是可能的，则每张骨牌恰覆盖一黑格与一白格. 因此，需要 3 张骨牌沿一对角线覆盖 3 黑格（或覆盖 3 对角白格）. 但这是不可能的，因为与此三方格相邻接的仅有两个相反颜色的方格.

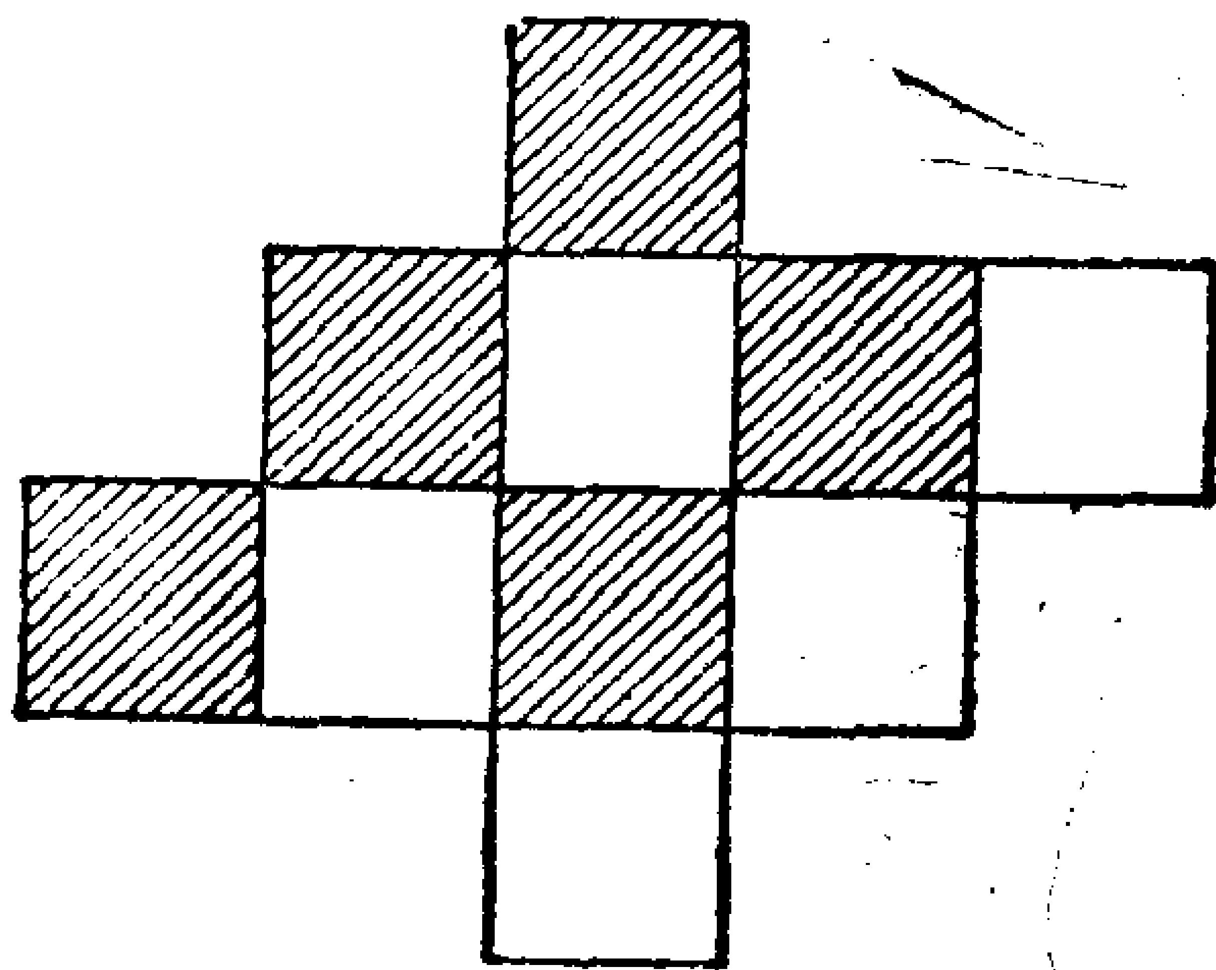


图 134

问题 5 与下列命题有关：若 G 是一个次数为 4 的正则图，则它的边能染以蓝与红色，使得每一顶点联结于两蓝边的端点及两红边的端点. 显然，由红边所构成的子图和由蓝边所构成的子图都是 G 的 2-因子. 所以

10. 任一4-正则图能分解为两个 2-因子.

设 G 中每个顶点的次数至多为 4，添加一些边，能产生一 4-正则图，因为在 G 内奇次顶点数是偶数（见第一章的命题 9），任一次数小于 4 的奇次顶点对能用一新边加以联结；也可以把新的环联结到次数小于 4 的偶次顶点上. 所得的4-正则图能被分解为两个 2-因子；因此，下述命题 10 的推广也是正确的.

11. 若一个图中，每个顶点的次数不大于 4，则可把图的边集分解为两个集合，使得对于图的任一顶点，此两集中的任一个中至多有两条边关联于它.

再来证它的进一步的推广.

12. 若一个图中，每个顶点的次数至多为 $2k$，则可把图的边集分解为 k 个集合，使得对于图的任一顶点，此 k 个集之任一集中至多有两条边关联于它.

当 k 的值固定时，对边数应用数学归纳法来证.

若边数为 0，命题显然成立：此时，k 个集合全是空的. 假设命题对于图的边数为 m 时成立，来证边数为 $m+1$ 时命题也成立. 设图 G 的边数为 $m+1$，其中每个顶点的次数至多为 $2k$. 我们删去 G 的任一边 $e=\{a, b\}$，则所得的图 G' 有边数为 m，据假设，命题对 G' 成立，即可把 G' 的边集按所述的方式分解为集合 $H_1, H_2, \cdots, H_k$. 由于

$$\varphi(a)\leqq 2k-1 \quad 及 \quad \varphi(b)\leqq 2k-1$$

对于 G' 成立. G' 是由 G 删去边 e 而得来的. 存在 H_i 及 H_j，使得 H_i(或 H_j)中至多有一边关联于 a(或 b). 若 $i=j$，则令 e 属于此集，命题即得证. 不然，令 H_{ij} 为 H_i 与 H_j 的并，再从 G' 删去全部不属于 H_{ij} 的边(但不删顶点). 把这新图记为 G_0. 对于 G_0，其每个顶点 p 有

$$\varphi(p)\leqq 4, \varphi(a)\leqq 3 \quad 及 \quad \varphi(b)\leqq 3.$$

所以 G_0 的边，与 e 一起，能以命题 11 所指的方式分解为两个集合 H_i' 及 H_j'. 最后，我们回到 k 个集的分解，以 H_i' 与 H_j' 分别代替 H_i 与 H_j. 于是，G 的边按命题 12 的要求分解为 k 个集合，命题得证.

若命题 12 的图 G 的顶点次数恰为 $2k$，则满足条件的 k 个边集中的任一边集的边恰有两端点联结于它. 另一方面，若 G 的每一顶点恰关联于边集之一的两边，则此边集是 G 的 2-因子边集. 因此，对于偶次正则图，据命题 12 可知有：

13. 若 $k\geqq 1$，任一 $2k$-正则图是 k 个 2-因子的积.

有 $2k+1$ 个顶点的完全图是 $2k$-正则的，按命题 13，它能分解为 k 个2-因子．注意，这就是说，能分解为 k 个哈密尔顿回路．这个分解可参考把有 $2k$ 个顶点的完全图分解为 1-因子的分解法而得到．图 135 表示 $k=4$的 情形之一．容易得到一般的情形：顶点

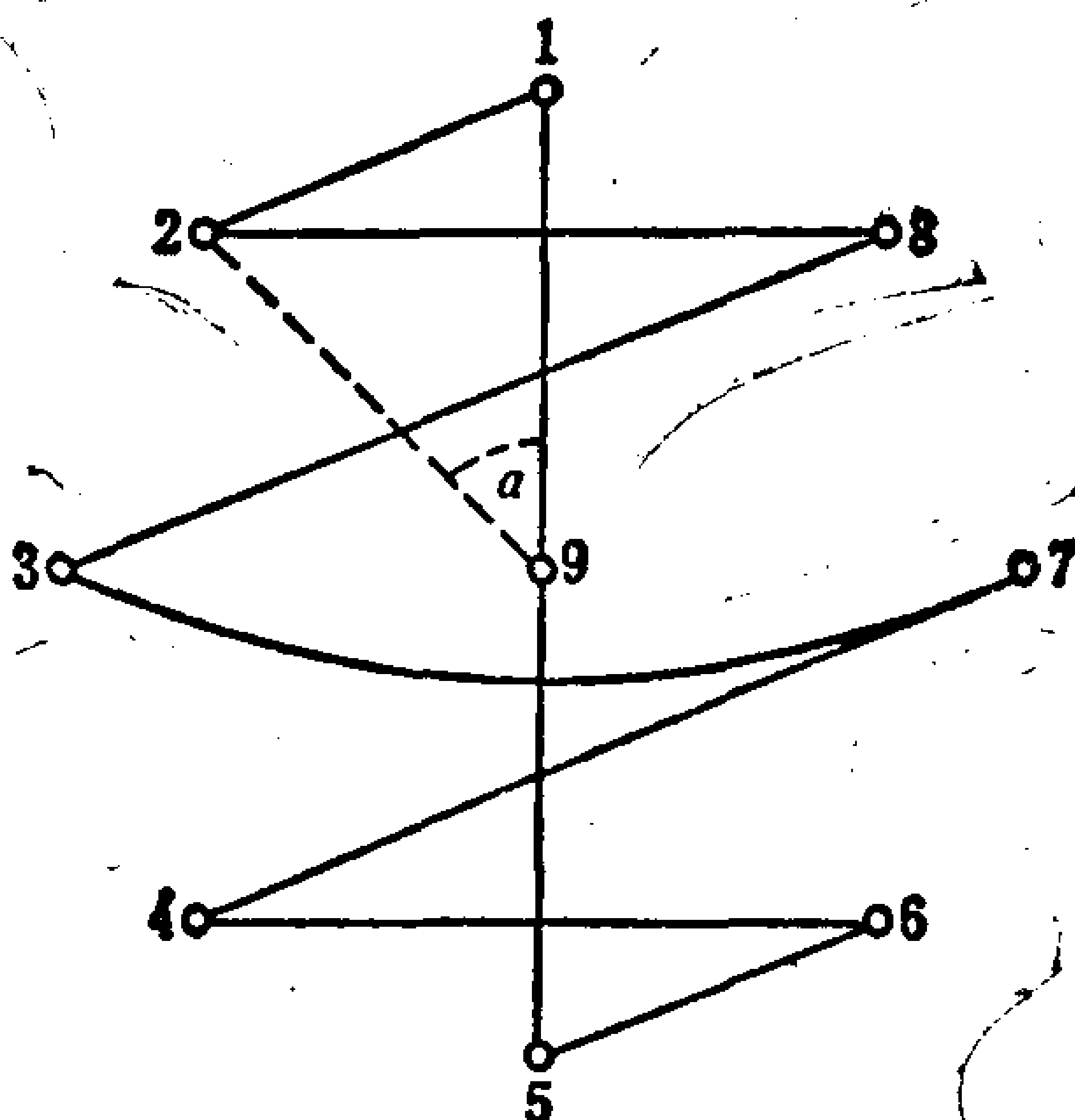


图 135

1, 2, …, 8 为正 8 边形的顶点，9 是中心．若长为 9 的图的回路绕中心按反时针方向转过 α, 2α, 3α, 4α 角，这里，$\alpha=360°/8$．则由简单的几何知识可证明没有两个这样的回路能有一条公共边．因此，在 9 个顶点的完全图中就找到了 4 个哈密尔顿回路，它们由 8 边形的边及从这些边由图形的旋转而得到．

要解问题 6(已知练习 4 的答案)，我们只需注意，棋盘上被删去的两方格有相同的颜色．而因原有的 64 格中，黑格与白格一样多，所以删去两格后，黑格与白格的数目就有了差别．又因每张多米诺骨牌必须恰好覆盖一黑格与一白格，因此棋盘不能依指定的方式被覆盖．

为了解问题 7 的第一部分，我们假定图 $\vec{G}$ 是无环的，不含长为 2 的有向路．在此情况下，$\vec{G}$ 的任顶点或者全是关联边的头或者全

是关联边的尾. 以A表示全是所关联边的尾的那些顶点的集合，而以B表示另一集合，考虑G的任一对邻接顶点，其中之一在$\vec{G}$内是尾，而另一是头. 于是，G的任一边把A的一顶点联结于B的一顶点. 由于A与B的顶点沿G的任一回路交错出现，所以其任一回路的长是偶数.

为了证明问题7的第二部分. 只需指出，若一个图只含长为偶数的回路，则其顶点可分解成两个集合，使得没有同一集合的两顶点是邻接的. 即，我们可以给每条边以定向，使前一集合的全部顶点是尾，而另一为头. 所以，此时不存在长为2的有向路.

一个图G叫作**双图**(二分图、二部图)，若其顶点可分解为两个集合，使得同一集合中无两顶点邻接. 若A与B表示两个集合，则$G(A, B)$常用来表示双图. 由于一棋盘邻接的方格必有不同的颜色，我们可以认为集合A与B的顶点分别是黑的与白的. 集合A或B可以是空的，此时图没有边.

于是，对于问题7的第二部分，只需证明：

14. 若图中无奇数长的回路，则它是双图.

我们注意，双图的每个分支是双图，反之，一个仅以双图为分支的图必为双图：把每个分支的白(或黑)顶点叫做图的白(或黑)顶点，则颜色的记号是合适的，即使任何分支的两色的作用互相替换时也适用.

我们对图的顶点数用归纳法来证命题14.

对于具有一个顶点的图，命题显然成立. 假设对具有n个顶点的图，命题成立，必须证明对具有$n+1$个顶点的图，命题也成立. 设G是具有$n+1$个顶点的图，不含奇数长回路. 我们删去G的一个任意的顶点p以及所有关联于它的边. 由此得到的图G'，有n个顶点，仍不含奇数长回路，所以，由归纳假设，它是双图. 现在我们以通常的方式给G'的顶点“染”以黑与白色. 我们来证明，

对 G 中邻接于 p 的全部顶点，若其中某些顶点在 G' 的同一分支 K 内，则有相同的颜色．设 q 与 r 是 G 的同一分支 K 中的顶点．假定 q 与 r 邻接于 p，且 q 是白的而 r 是黑的．由于 K 是连通图，在 q 与 r 间有一条路 L，L 的长必为奇数，这是因为 G' 的任两邻接顶点有不同的颜色，所以，L 的端点也如此．把边 $\{p, q\}$ 及 $\{p, r\}$ 与 L 放在一起，就产生 G 的一个奇数长回路，这是一个矛盾．按照命题 **14** 以后的那一段叙述，可于双图 G' 内选用两种颜色，使得 p 仅邻接于白顶点．如果把 p 染成黑色，我们得到给图 G 的顶点以适当的染色．于是命题 **14** 得证．

相似的推理可引出命题 **14** 的对于图的边数的归纳证明，这一证明留给读者自己去做．

在求解问题 **7** 的第一部分时，我们发现没有一个双图具有奇数长回路．这个结果，加上命题 **14**，得到下述命题：

15. 双图就是不含奇数长回路的图．

注意，由此，图的双图的性质恒同于图不含奇数长回路的性质，即其回路全是偶数长．

第四章里有不同格数的棋盘可用这样的图来表示，其边对应于马的跳步．若两方格间的距离恰为一马步，则此两方格的颜色是不同的．因此，这些图都是双图，并且全无奇数长回路．作为一个直接结果，一个对应于有 n^2 个方格的棋盘图，n 是奇数时，不能有哈密尔顿回路(参看第四章的问题 **27**)．

现在我们来解问题 **8**．易见2-正则图的任何分支是一回路(本质上，此命题已在第一章的问题 **36** 中得证)．若 G 是两个 1-因子的积，则此两因子的边交错地沿一回路出现；因此，回路的边必须是偶数，反之，假设 G 的每个回路的长为偶数，在此情况下，沿着每个回路我们在每一对边中，标出其第二边，标出的边与其余的边各构成 G 的 1-因子．G 可分解为两个因子的积．

有一个合适的图可用来说明问题 9，问题及其解题者间的联系必须加以强调. 我们以 8 个顶点对应于解题者并以 8 个顶点对应于问题，分别染以白与黑色. 边须对应于解，即：若某人对某问题有可供发表的解，则此人所对应的白顶点邻接于此问题所对应的黑顶点. 所得的图 G 是一个 2-正则的双图. 为了解问题 9，须证此图 G 有 1-因子. 但这在问题 8 的解中已得证. 问题的数目与解题者的数目可以是任意的，但此两数必须相等，下面将证明这一点.

对于一个 k-正则($k\geqq 1$)双图 $G(A, B)$，以 m 及 n 分别表示 A 与 B 中的顶点数. 于是，km 及 kn 都必须等于图的边数，由 $km=kn$ 又可知 $m=n$，所以我们有：

16. 若 $k\geqq 1$，则 k-正则双图 $G(A, B)$ 的集合 A 与 B 有相同的顶点数.

下列命题是问题 9 的进一步推广.

17. 若 $k\geqq 1$，则任一 k-正则双图有一个 1-因子.

设 $k\geqq 1$. G 是一 k-正则双图. 若我们把 G 的每条边双重化为两条边，则所得的图 G' 是一 $2k$-正则双图. G' 有一个 2-因子 F(见命题 13). F 也是一个双图，按问题 8，它能分解为两个 1-因子，设 F_1 是其中之一. F_1 产生 G' 的一个 1-因子. 若 F_1 的一边不属于 G，则它可以由关联于 G 中相同的两个顶点的对应边所替换，这就证明了本命题.

按照命题 17，问题 9 的推广可叙述如下：在一篇文章中发表了一些问题，每名解题者正好给出 $k\geqq 1$ 个解(同一问题可以有不同的解，每人提出 k 个解). 对每个问题恰给出了 k 个解. 编辑对每个问题恰可选出一个解使得每名解题者恰有一解被发表.

命题 17 的另一应用是下列命题：在一个舞会里，每位女士恰认识 k 名绅士，而每位绅士恰认识 k 名女士($k\geqq 1$). 他们可以在每对舞伴相互认识的情况下开始跳舞.

按照命题 17, 任一正则双图具有一个 1-因子. 若删去此 1-因子的边, 新图也是一个正则双图. 若确实有边, 则命题 17 表明它也有 1-因子. 重复这一删边的过程导出下列命题:

18. 若 $k \geqq 1$, 任一 k-正则双图可分解为 1-因子.

注意, 把问题 17 应用于舞伴问题时, 关键词"恰好"是重要的, 不能把它换成"至少"(那将表明每位女士不只认识 k 位绅士, 反之也然). 即, 若双图的每个顶点的次数至少为 k, 就不能说必定存在 1-因子. 对问题 6 的否定的答案也强调了这一点. 设对应问题的双图为 $G=G(A,B)$, 使得 A 与 B 分别表示棋盘(有两个方格被删去了的)的白与黑方格, 以边表示两个方格可以被同一张多米诺骨牌所覆盖. 易见, G 中每个顶点的次数至少为 1 (或甚至至少为 2, 若两个被删去的方格不邻接于角上的方格). 问题 6 提出的问题是 G 是否有 1-因子. 一个否定的答案是显然的, 因为在 A 中与在 B 中的顶点数是不同的. 但就算是顶点 A 与 B 的顶点数相同, 情形还是如此. 图 136 表示对应于图 134 的图. 图 G_1 的白顶点

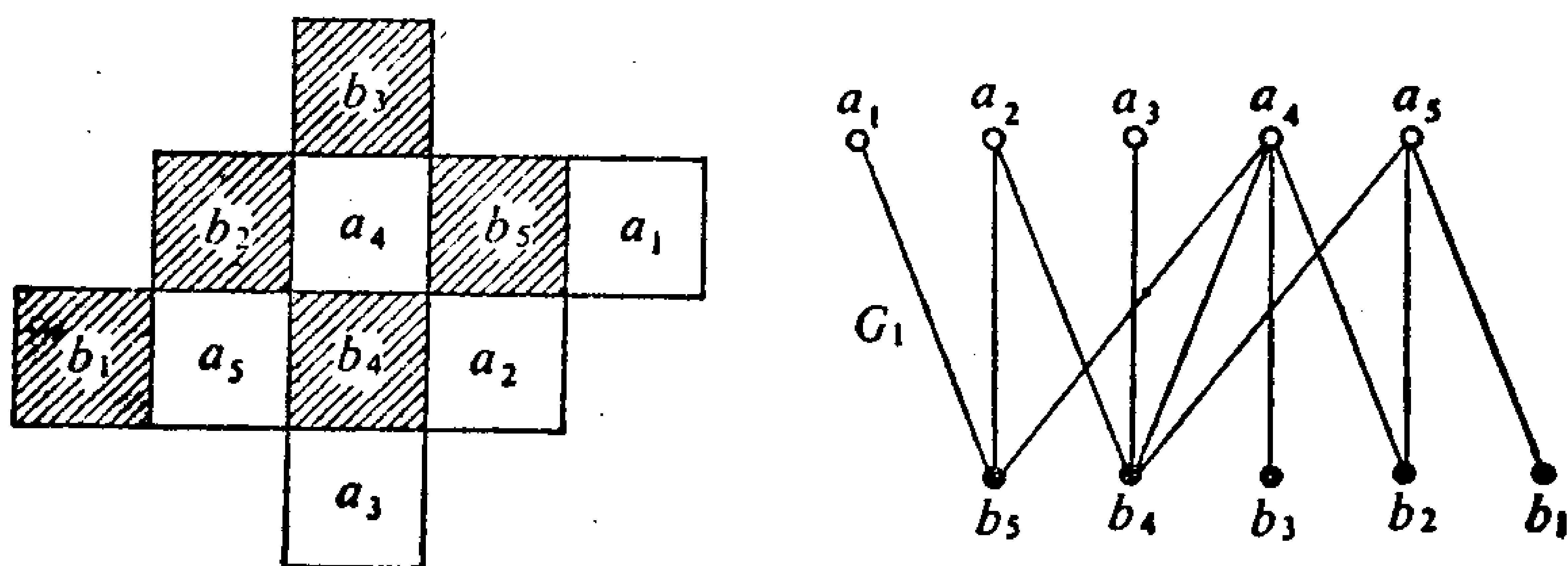


图 136

数与黑顶点数同样多. 每个顶点的次数至少为 1, 练习 4 的答案是否定的; 这个棋盘不能用指定的方式用多米诺骨牌来覆盖, 即 G_1 不能有 1-因子. 甚至 b_1, b_2 与 b_3 就不能同时被覆盖, 因为他们只邻接于 a_4 与 a_5 两个顶点.

设 G_1 的顶点 a_i 及 b_i 分别表示女孩与男孩, 设其边表示相互

认识的关系．要求以下列方式结婚，使每个男孩与早就认识的女孩结婚．若男孩 b_1, b_2, b_3 除了 G_1 所示者外不认识任何别的女孩，则按上述方式的结婚是不可能的．若相互认识是结婚的一个必要条件，则显然下列一般条件必定成立：任一组男孩(可由一名以至所有男孩组成)至少必须认识与本组人数一样多的女孩．可以证明此条件也是充分的．

我们用图来重述此问题．以 P 与 E 表示图中某些顶点的集合与某些边的集合，若 P 的每个顶点是 E 的至少一条边的端点，就说 E 是覆盖 P 的(或说 E 的边覆盖了 P)．用此概念，结婚问题就成为如下问题：在图 $G(A, B)$ 中是否有独立边，它们覆盖了 B (这里，B 的顶点对应于男孩)．找到了一个必要的条件：对一切 k，B 的任 k 个顶点，必须一共至少邻接于 k 个顶点．因此，下列命题很好地解答了结婚问题：

19. 我们考虑双图 $G(A, B)$，若对于一切 k，B 的任 k 个顶点共有 k 个邻接顶点，则图至少包含一个独立边集，它覆盖了 B．

用下述的一般方法来证此命题，即**交错路方法**．设 E 是图 G 中的一个独立边集．G 的一条路叫做是 E 中的一条交错路，若对于路的任意两条邻接的边，它们中恰有一条属于 E．若一条交错路含有不止一条的边，则沿着它的边走就有属于 E 的边与不属于 E 的边交错地出现．设图 G 的路 L 是在 E 内交错的，并设 L 路的两个端点没有一个与 E 的任何一个边相邻，则删去那些属于 L 的 E 的边，再加入那些不属于 E 的 L 的边，对 E 作的这一调整导出一个边集 E'，它同样地含着独立边(因任一顶点至多关联于 E' 的一条边)而其边数比 E 多 1．这就是交错路方法的基本思想．图 137 说明“边的交换”前后的一条交错路；属于 E 与 E' 的边用粗线表出．

为了证命题 19，假定对于双图 $G=G(A, B)$ 命题的条件成立，



图 137

我们必须证明覆盖B的独立边的集合是存在的.

应用"从极大开始"的方法. 以E表示G的极大独立边集. 可证E覆盖了B. 假设不然, 图 138 指明所述情形. 上一行的点对应于A的顶点,下一行则对应于B的,E的边由粗线表出, 细线表示其它的边.

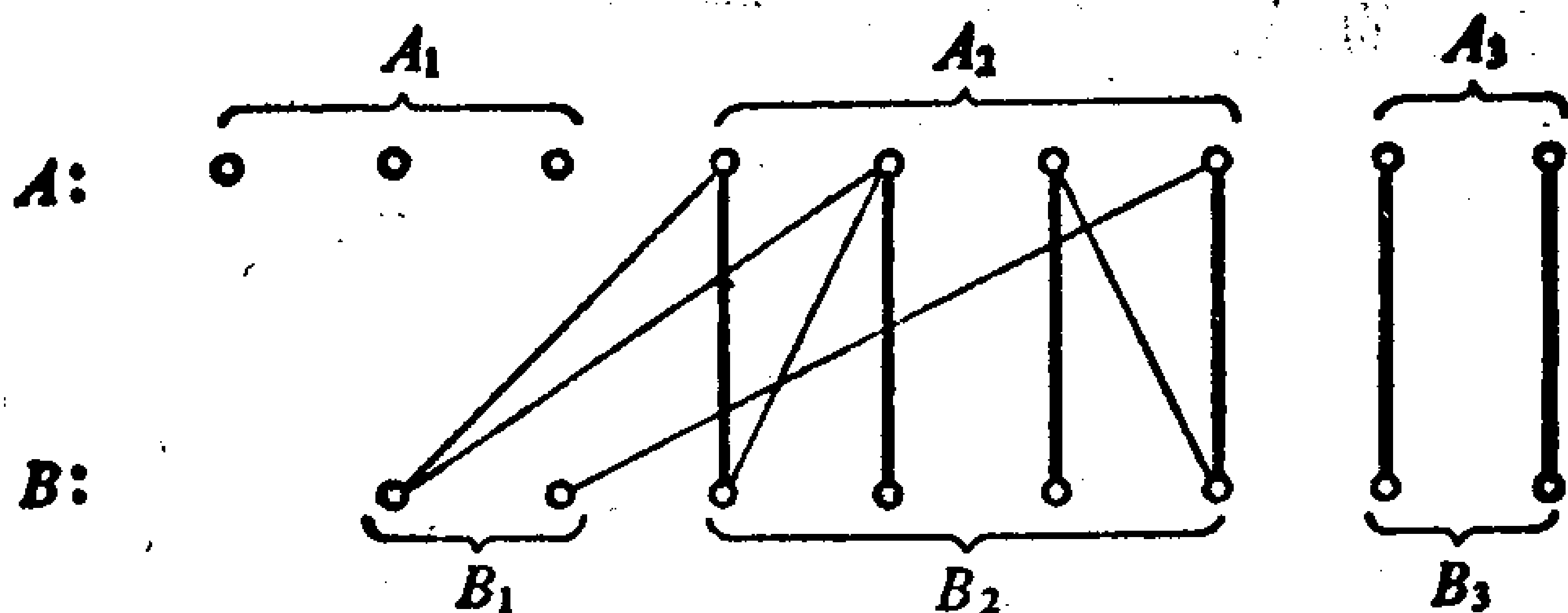


图 138

A_1与B_1表示这样的顶点集,它们不关联于粗边, 分别属于A与B.(由假设可推出集B_1不空.)B_1的顶点不能邻接于A_1的顶点, 因为这样的边都能并入E,而这是与E的极大性相矛盾的. 用B_2表示B的这样的顶点集, 它能由B_1的顶点沿交错路(当然, 在E内)所到达. 用A_2表示这样的顶点的集合,它们属于A,以"粗"边联结于B_2的顶点. 最后,设集A_3与B_3由A与B的这样的顶点构成,它们分别地不在A_1(或A_2)及B_1(或B_2)内.

我们已经看到B_1的邻点不在A_1内, 但它们也不能在A_3内, 因为,若它们在A_3内,则存在B_3的顶点,可由B_1的顶点沿一交错路所到达(见图 139); 而全部具有此性质的顶点都属于B_2.

因此, B_1的顶点只能与A_2的邻接. 关于B_2的顶点, 同样的命

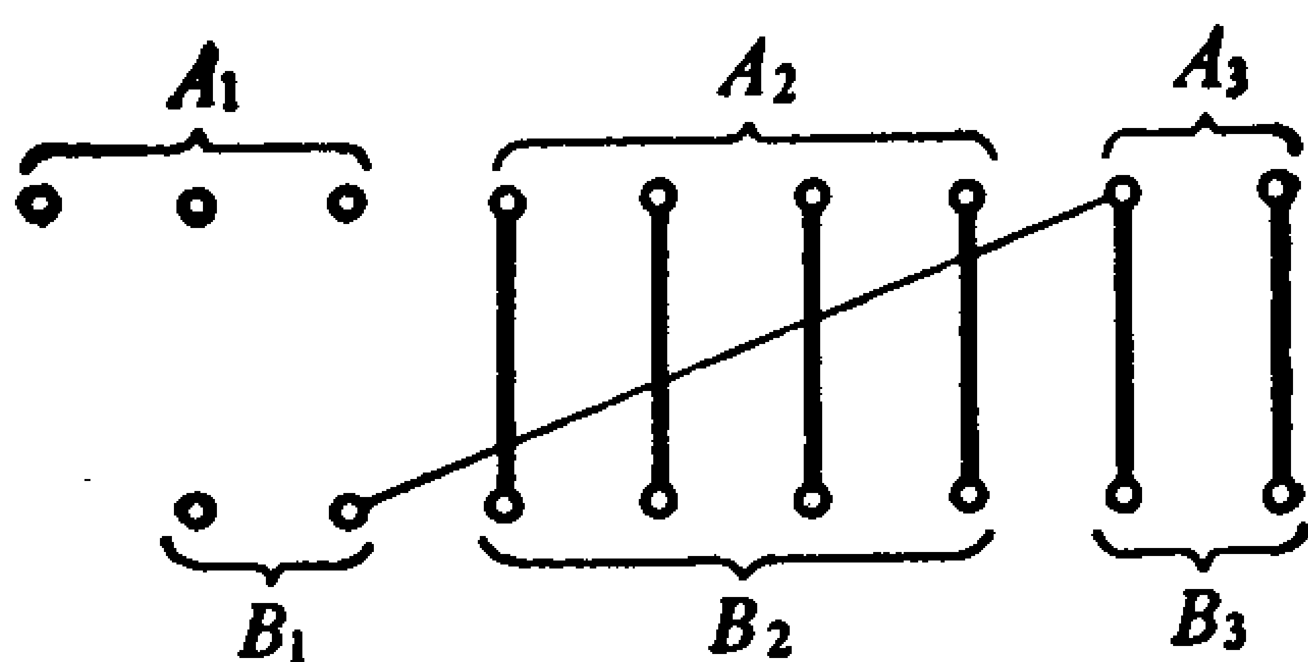


图 139

题也可得证．这就导出一个矛盾，因为 A_2 与 B_2 所含的顶点数相同；若 B_1 与 B_2 一起有 k 个顶点，则 B 的此 k 个顶点的邻点将少于 k 个，这矛盾于命题 **19** 的条件．

假定 B_2 的顶点 b_2 与 A_3 的顶点 a_3 是邻接的，b_2 可由 B_1 的一个顶点沿交错路所到达．若 L 含有一个属于 A_3 的顶点，则考虑一条关联于它的"粗"边，就会导出 B_3 的一个顶点将是沿一交错路可到达的．让我们把两条边加入 L，即边 $\{b_2, a_3\}$ 及关联于 a_3 的"粗"边（见图 140）．于是，B_3 的一顶点可由 B_1 的一顶点沿一交错路所到达，这是一个矛盾．

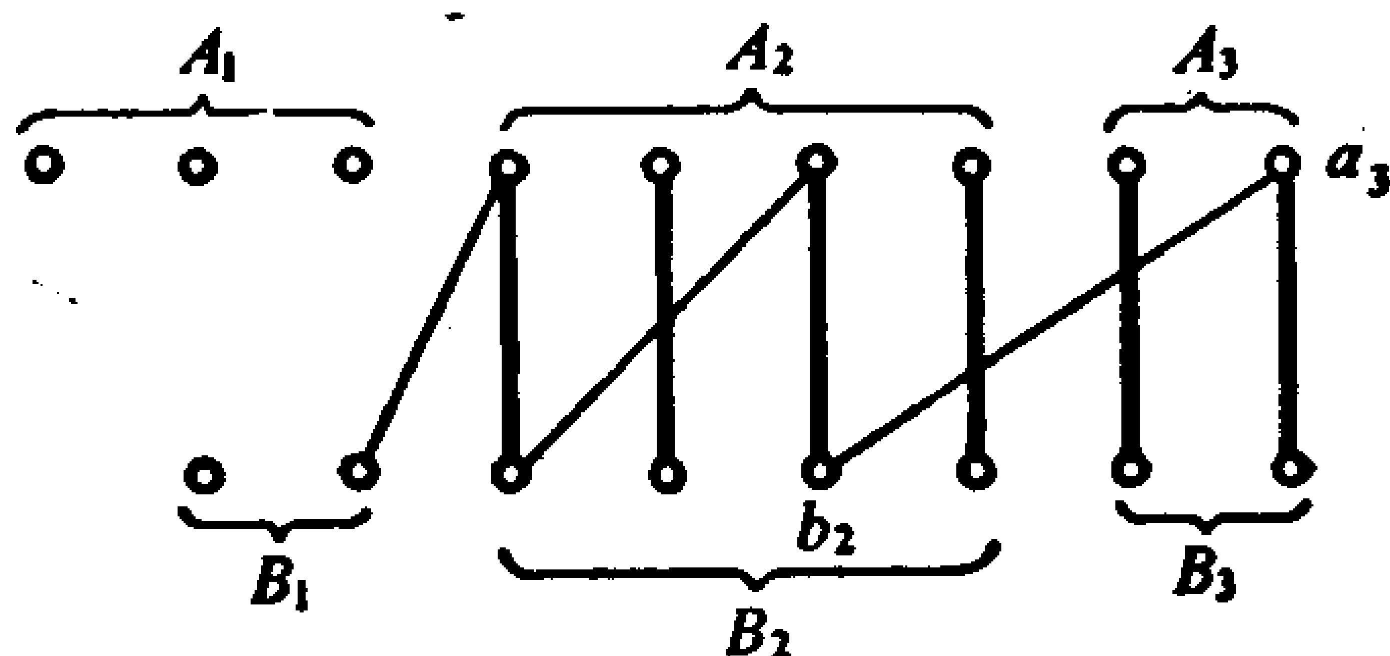


图 140

我们还需证没有 A_1 的顶点能与 b_2 邻接．我们先证 A_1 的顶点不能由 B_1 的顶点沿交错路所到达．如果可能，则此路始边与末边将是细线的，应用交错路方法将得到一条另外的"粗"边，这矛盾于 E 的极大性（见图 141）．现在假设 A_1 的顶点 a_1 邻接于 b_2，则据上述的推理，交错路 L（把 b_2 连通到 B_1 的一顶点）不能含有 a_1．若我们把边 $\{b_2, a_1\}$ 加到 L 上，在此情况下，我们有一交错路，它也

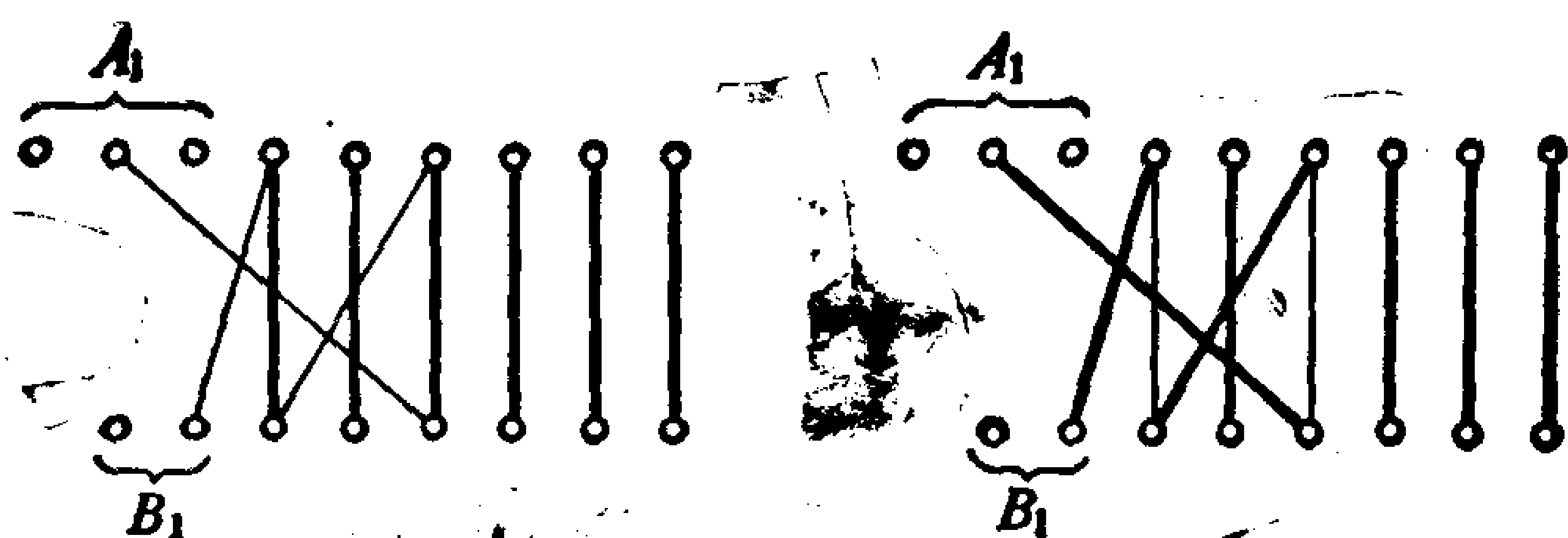


图 141

矛盾于上述的推理.

于是,命题 19 得证.

注意:若在命题 19 的图 $G=G(A, B)$ 内的 A 与 B 有相同的顶点数,则命题等价于 G 内存在 1-因子. 反之,若双图 $G=G(A,B)$ 有 1-因子,则 A 与 B 显然必须有相同数目的顶点,而 G 的任何 1-因子的边保证了命题 19 的条件得以满足.

现在来证明命题 17 可由命题 19 推出. 设 $r\geqq 1, G=G(A,B)$ 是一 r-正则双图. 由于 A 与 B 有相同的顶点数(据命题 16),只需证命题 19 的条件是得到满足的. B 的任 k 个顶点是关联于 G 的 kr 条边的. 由于 A 的任一顶点至多关联于其中的 r 条,所选的(B 的)顶点一共必至少有 k 个邻点,所以命题 19 的条件得以满足,从而存在 G 的边,它们是独立的且覆盖了 B. 这些边就构成了 G 的 1-因子.

命题 19 的一个应用见于下列问题.

在不同的学校间组织一些主题的智力竞赛. 分配到每一主题的是最合适的学生,每名学生不得参加多于一个主题的竞赛. 在什么条件下学校能对每个主题指派一名学生呢? 对应于此问题的双图 $G=G(A, B)$ 以下列方式建立: 集 A 与 B 的顶点分别对应于学生及主题,如果对应的学生参加对应的主题的竞赛则两顶点邻接. 显然,如果图内存在一个覆盖 B 的独立边集,则学校能给每个主题指派一名学生. 其条件可据命题 19 给出: 改述一下,它表明对于所

有可能的 k 的值，若选择了任何 k 个主题，则必得至少存在 k 名学生，他们合起来熟悉此 k 个主题.

相关于这一问题，我们可以问：使学校派得出学生的极大主题数是多少？所求的数显然就是 $G(A, B)$ 中极大独立边数. 怎样才能找出一个双图的极大独立边集呢？这样的一个过程(一个算法)可借交错路的应用加以详细说明. 此过程或其变形能被应用于实际场合，大量地见于运输问题. 在手算任务繁重的困难情况下它的优点最显著，此时易于在计算机上程序化.

在双图内寻求极大独立边集的算法. 考虑在一双图内的大量的独立边. 若 A 或 B 的全部顶点被这些边所覆盖. 则显然，有极大独立边集. 我们来考虑 A 与 B 都不是完全地被覆盖的情形时的图. 图138 正是这种情形. 所讨论的独立边用粗线标出. 我们不假定它们的集 E 具有极大性，不过，可以假定，A_1 的顶点不邻接于 B_1 的顶点，因为，否则，E 将不包含大量的独立边. B_2 的定义也以同样的方式表明，B_1 与 B_2 的顶点均不邻接于 A_3 的顶点. 我们只需研究是否有 A_1 的什么顶点邻接于 B_2 的什么顶点. 若存在这样的一顶点，则 E 象图 141 所表明的那样导出了独立边集 E'. 它比 E 多含有一条边. 我们对 E' 应用对 E 用过的同样的过程，并尽可能地重复应用它. 以 E_u 表示最后的独立“粗”边的集合，即它是不能再用此方式加以扩大的集合，设 e_u 是 E_u 中的“粗”边数. 此过程(用了所谓**匈牙利方法**的主要思想)找出的集合 E_u 是完全的，即在此图中不能用任何别的方法找出多于 e_u 条的独立边. 所以，现在我们证明：

20. 上述的算法必能在双图 $G(A, B)$ 中找出极大独立边集，即

$$ie_{\max}=e_u.$$

让我们假设 E_u 恰被图 138 的粗线所表示. 由于 B_1 与 B_2 的

顶点仅邻接于 A_2 的顶点，对于 $G(A, B)$ 的任一边，至少其端点之一或在 A_2 中或在 B_3 中(或换句话说，A_2 与 B_3 的顶点共同覆盖了图的全部的边). 因此选不出比此两集一起的顶点数更多的独立边. 由于 A_2 与 B_3 的顶点数一起恰为 e_u，命题 **20** 得证.

一般地，G 的一些顶点的集合 R 叫做图的**覆盖（表示）顶点集**，若 G 的每一边至少关联于 R 的一个顶点. **一个图的极小覆盖顶点数**是指这样的覆盖顶点集的顶点数，使得小于此数个顶点就不能覆盖图的全部的边. 若以 cv_{min} 表示 G 的极小覆盖顶点数，又若 R 是一个含有 cv_{min} 个顶点的覆盖顶点集，则称 R 为**极小覆盖顶点集**.

由于没有任何图的独立边对能被同一个顶点所"覆盖"，任一图的覆盖顶点集，至少必须含极大独立边数那么多的顶点. 因此，下列命题是正确的:

21. 对任一图，有

$$ie_{max} \leqq cv_{min}.$$

现在我们回到双图 $G(A, B)$. 在顶点的划分中，集 A_2 与 B_3 一起构成一个覆盖顶点集(含有 e_u 个顶点). 所以，在我们的图中下列不等式成立:

$$cv_{min} \leqq e_u.$$

把这结果与命题 **20** 与 **21** 作比较，对于图 $G(A, B)$，有

$$ie_{max} = cv_{min}.$$

导出这一结果的、关于双图的推理，并不十分一般，因为我们假定了 A 与 B 都不全被独立边的顶点(数值上为 e_u)所覆盖. 但 A 与 B 中的每一个覆盖了双图 $G(A, B)$，且若存在覆盖了 A 或 B 的独立边集则命题 **21** 将导出同一关系 $ie_{max} = cv_{min}$.

因此，下列对于双图的一般命题已被证明:

22. 对于任意的一个双图，有

$$ie_{\max}=cv_{\min}.$$

命题 22 的等式对于其它的图一般并不成立．例如，对于任意的一个三角形，有 $ie_{\max}=1$ 及 $cv_{\min}=2$．易见，对于长为 $2k+1$ 的一个回路，有

$$ie_{\max}=k \quad 与 \quad cv_{\min}=k+1.$$

命题 22 在图论的大量问题中已证明是有用的．关于此命题还有一些漂亮的证明，这里给出其中之一，对图的极小覆盖顶点数用归纳法来证明．

下列概念将在证明中并在本书的其它部分中用到．设 P 与 Q 都是顶点集，则它们的**和**（**或并**）指的是这样的顶点集：若一个顶点属于 P 或 Q 就属于它．设 P 是图 G 的某些顶点的集合，G' 是 G 的子图．称 G' 是由 P **导出的**，若它的顶点集是 P，且 G' 只含 G 的关联于 P 中顶点的一些边．并非任一子图都是导出子图，例如，一个长为 n 的回路具有一子图，它是长为 $n-1$ 的一条路，但此子图不能是一导出子图，因为长为 $n-1$ 的一条路含有全部 n 个顶点，而 n 个顶点一起导出了整个回路．

命题 22 对于双图在 $cv_{\min}=0$ 或 1 时显然成立．令 $k\geqq 2$，对于全部使 $cv_{\min}<k$ 的双图，我们假设命题 22 成立．最后，令 $G=G(A,B)$ 是一双图使 $cv_{\min}=k$，我们将证明 $ie_{\max}=k$．

我们区分两种情况，即，G 是否具有一个 k 覆盖顶点集，使得它既包含 A 中的又包含 B 中的顶点．

情况 I．用 R 表示 G 的一个极小覆盖顶点集，R 既包含 A 中的一些顶点也包含 B 中的一些顶点．以 A_1 与 B_1 分别表示在 A 与 B 中并且在 R 内的顶点．用 A_2 与 B_2 分别表示 A 与 B 中其余的顶点的集合．由于 R 是 G 的一个覆盖顶点集．A_2 的顶点不能邻接于 B_2 的顶点．用 $G_1=G_1(A_1,B_2)$ 及 $G_2=G_2(A_2,B_1)$ 表示 G 的分别由 A_1+B_2 及 A_2+B_1 导出的子图．G 的顶点的划分可借图 142

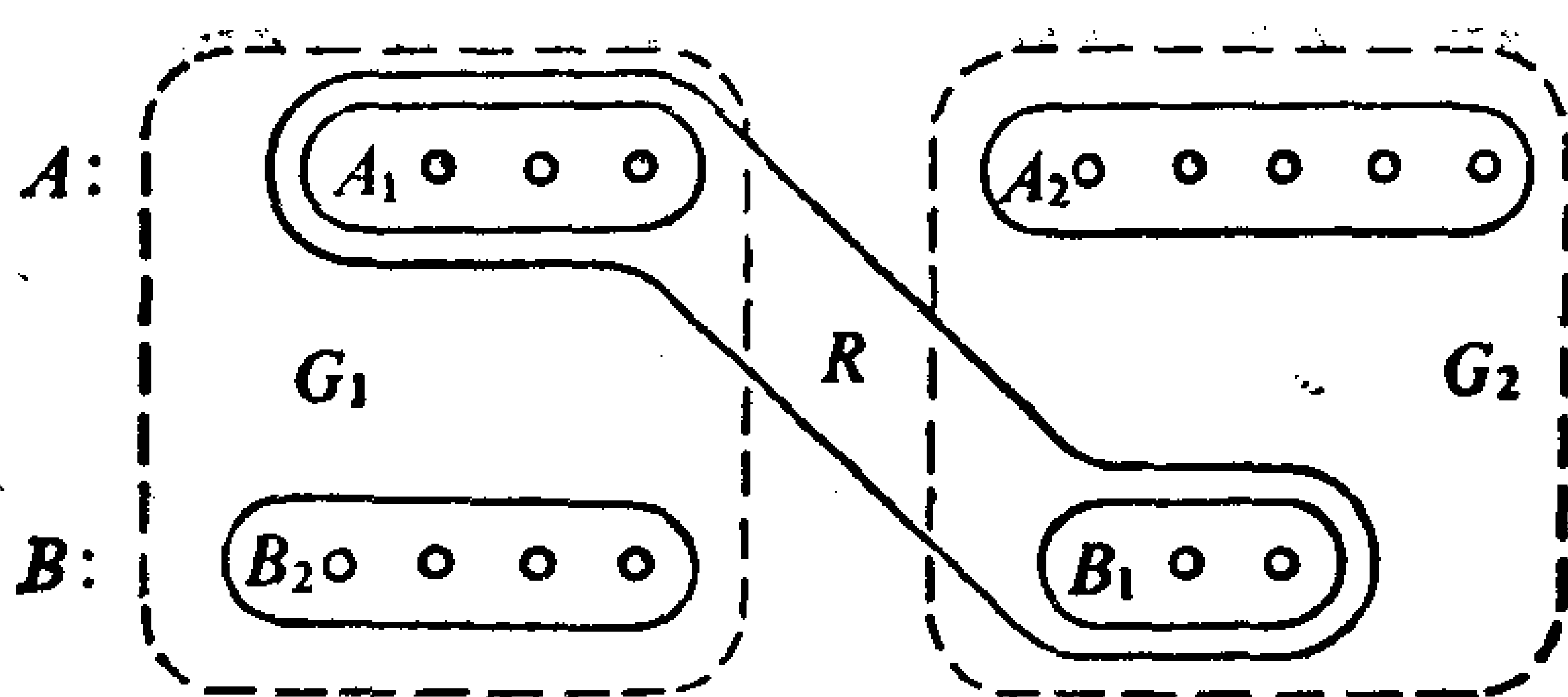


图 142

得到说明.

A_1 的顶点显然构成 G_1 的一个覆盖顶点集. 以 k_1 记 A_1 的顶点数. 由于 R 还含有 B_1 的顶点, 所以 $k_1<k$. 我们将证明 A_1 是 G_1 的一个极小覆盖顶点集. 若不然, 令 R_1 是 G_1 的一个覆盖顶点集, 所含的元素个数比 k_1 少. 在此情况下, R_1+B_1 就构成 G 的一个覆盖顶点集, 因为 G_1 的边被 R_1 所覆盖, 而 B_1 又覆盖了其余的边(由于 A_2 的顶点绝不能邻接于 B_2 的顶点). 但 B_1+R_1 所含的顶点个数少于 k, 这是一个矛盾. 因此, 对于 G_1 有 $cv_{min}=k_1<k$, 并由假设存在 G_1 内的一个 k_1 独立边集.

若 k_2 为在 B_1 内的顶点数, 则相似的推理可知存在 G_2 内的一个 k_2 独立边集. 由于在 G_1 与 G_2 内的独立边一起仍然是独立的, 又由于 $k_1+k_2=k$, 得到了 G 内的一个 k 独立边集. 又据命题 21, G 内的独立边数不超过 k, 所以, 对于 G, $ie_{max}=k$ 成立.

情况 II. G 的任一 k 覆盖顶点集, 仅包含 A 中的或仅包含 B 的顶点.

图 G 的一条边是**临界的**, 若从 G 删去它就产生一个图, 其中, $cv_{min}<k$. 若 G 不具有任何的临界边, 则从 G 删去适当的边产生一个图 G', 它有临界边. 只需证 G' 含有 k 条独立边; 由于 G 包含 G' 的每一条边, 对于 G 的命题也随之得证.

于是, 我们假定边 $e=\{a, b\}$ 在图 G 中是临界的(其中顶点 a

在 A 内，b 在 B 内)．设集合 A_3 与 B_3 是从 A 与 B 分别删去 a 与 b 得到的．令 $G_3=G_3(A_3, B_3)$ 是 G 的一个子图，它由 A_3+B_3 导出(见图 143)．显然，对于 G_3，$cv_{min}<k$．若 cv_{min} 小于 $k-1$，则 G_3 将包含一个 $k-2$ 覆盖顶点集 R_3．此时，若把 a, b 加入 R_3，我们将得到 G 内的一个 k 覆盖顶点集，它含有 A 中的也含有 B 中的顶点，这矛盾于情况 II 的原始命题．因此，对于 G_3，$cv_{min}=k-1$，由假设在 G_3 内能找到一个 $k-1$ 独立边集 E．把 e 加入 E 给出 G 内的一个 k 独立边集．应用命题 21，对于 G 得到 $ie_{max}=k$．

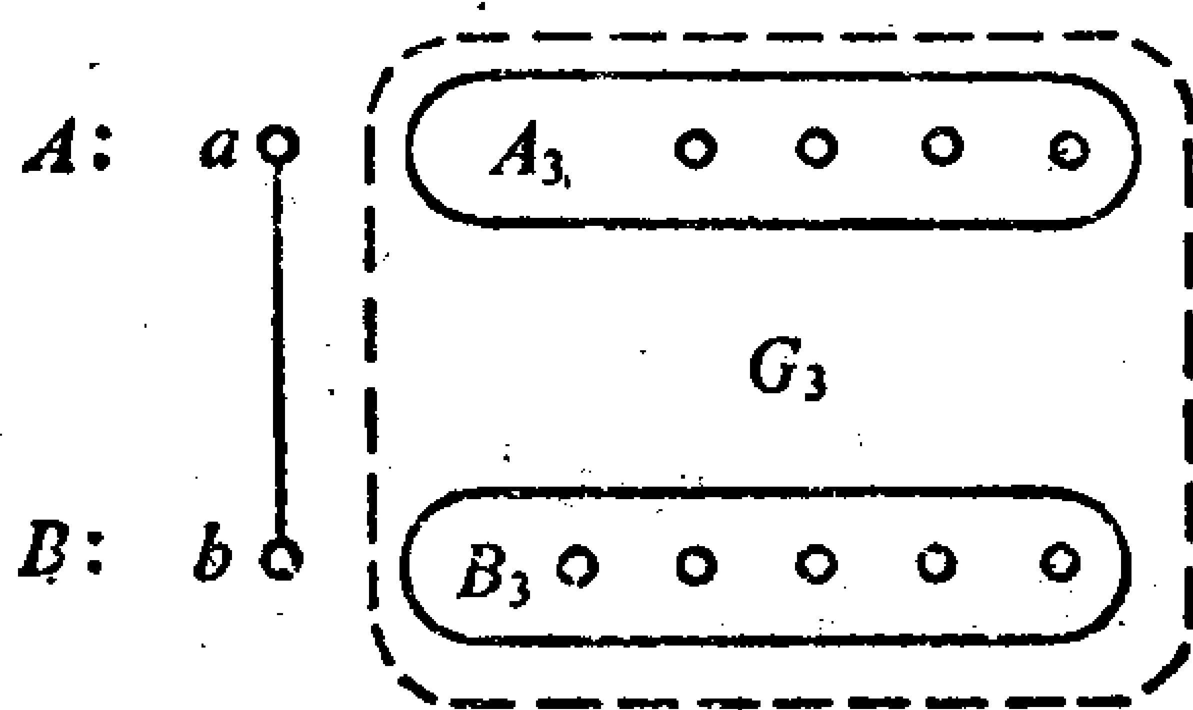


图 143

于是，命题 22 已用第二种方法证得．

前面我们已看到命题 17 可由命题 19 推出．现在我们将证明命题 19 可由命题 22 推出(因而命题 17 也能由此推出)．

假设双图 $G=G(A, B)$ 满足命题 19 的条件，即对于 k 的每一个可能取的值，B 的任 k 个顶点一共邻接于 A 的至少 k 个顶点，以 m 表示 G 的极小覆盖顶点数．B 至少含有 m 个顶点，因为 B(A 也如此)是一覆盖顶点集．若 B 恰含 m 个点，则 G 有 m 条独立边(据命题 22)，它们覆盖了 B．又若 B 含有不止 m 个点．以 R 表示 G 的一极小覆盖顶点集，设集合 A 与 B 如图 142 所示是一个分划．由于 B_2 的顶点不能邻接于 A_2 的顶点，它们只邻接于 A_1 的顶点．A_1+B_1 有 m 个顶点．但 B 即 B_1+B_2，含有不止 m 个的顶点，所以 A_1 中的顶点比 B_2 中的少．此关系矛盾于有关 B_2 的命题 19 的条件．

命题 22 也能由命题 19 推导得来，具体的推导留给读者去完

成.

现在我们考虑图的一个覆盖顶点集，从图中删去这个集合的顶点及其关联边，显然，留下的顶点中没有一对是邻接的.

一般地，图G的某些顶点所组成的集合F叫作图的一个**独立顶点集**，若G中没有边是联结F的两个顶点的，并且G中没有环关联于F的任一顶点. 图的**极大独立顶点数**是一个这样的独立顶点集的元素个数，使得一个具有更多的顶点的集合就不能是独立的. 若以iv_{max}记图G的极大独立顶点数，而F是恰有iv_{max}个独立顶点的集合，则F叫做G的一个**极大独立顶点集**.

前面已把一个图的极大独立边数与极小覆盖顶点数作了比较. 现在我们对比地定义一个"极小量"来表示极大独立顶点数.

若一个图的某些边的集合E有性质：图的每个顶点至少关联于E的一条边，则称E为图的一个**覆盖边集**. 一个图的**极小覆盖边数**是这样的一个覆盖边集的元素个数，使得更少的边就不能覆盖整个图. 以ce_{min}记这个量.

问　　题

23. 设F是图G的一个极大独立顶点集. 求证：G中不在F内的顶点构成一个极小覆盖顶点集；反之，若R是G的一个极小覆盖顶点集，则G中不在R内的顶点构成G的一个极大独立顶点集.

24. 我们假定图G没有孤立顶点. 求证：若m是极大独立顶点数，则G不能有边数小于m的覆盖边集.

25. 求证：若一个简单图，至少有6个顶点，每个顶点的次数至少是3，则图中有3条独立边.

26. 在一次舞会中，有3名男孩与3名女孩. 我们考虑任一男孩与任一女孩. 若他们互不认识，则她认识的男孩数与他认识的

女孩数总计不小于4．(假定认识是相互的.) 求证他们全体能组成一圆圈，使男孩与女孩沿着这圈交错地出现，其中每人都认识他(或她)两侧相邻的人.

27. 设F是双图的任一独立顶点集．F的顶点共计至少邻接于F的顶点数那么多顶点．求证图具有 1- 因子.

要解问题 **23**，我们只需证明，对于G的任一独立顶点集F，G中不在F内的那些顶点构成图G的一个覆盖顶点集；反之，对于G的任一覆盖顶点集R，不在R内的那些顶点构成G的一个独立顶点集．下列命题也由此推出：

28. 对于任一具有n个顶点的图，有

$$iv_{\max}+cv_{\min}=n.$$

命题 24 是显而易见的，因为一个图的两不邻接顶点不能被图的同一条边所覆盖，因此，我们得到：

29. 若一个图没有孤立顶点，则

$$iv_{\max}\leqq ce_{\min}.$$

对于每个不含孤立顶点的双图$G=G(A,\ B)$，我们将证明$iv_{\max}=ce_{\min}$．我们必须证G中有一个$iv_{\max}$条边的集合，它覆盖了每个顶点．让我们标出G内一极大独立边集的全部$ie_{\max}$条边，并以R表示一个极小覆盖顶点集．命题 **22** 表明R恰含有每个标出边的一个顶点，并且它不含有任何别的顶点．(看图 144，那里只画

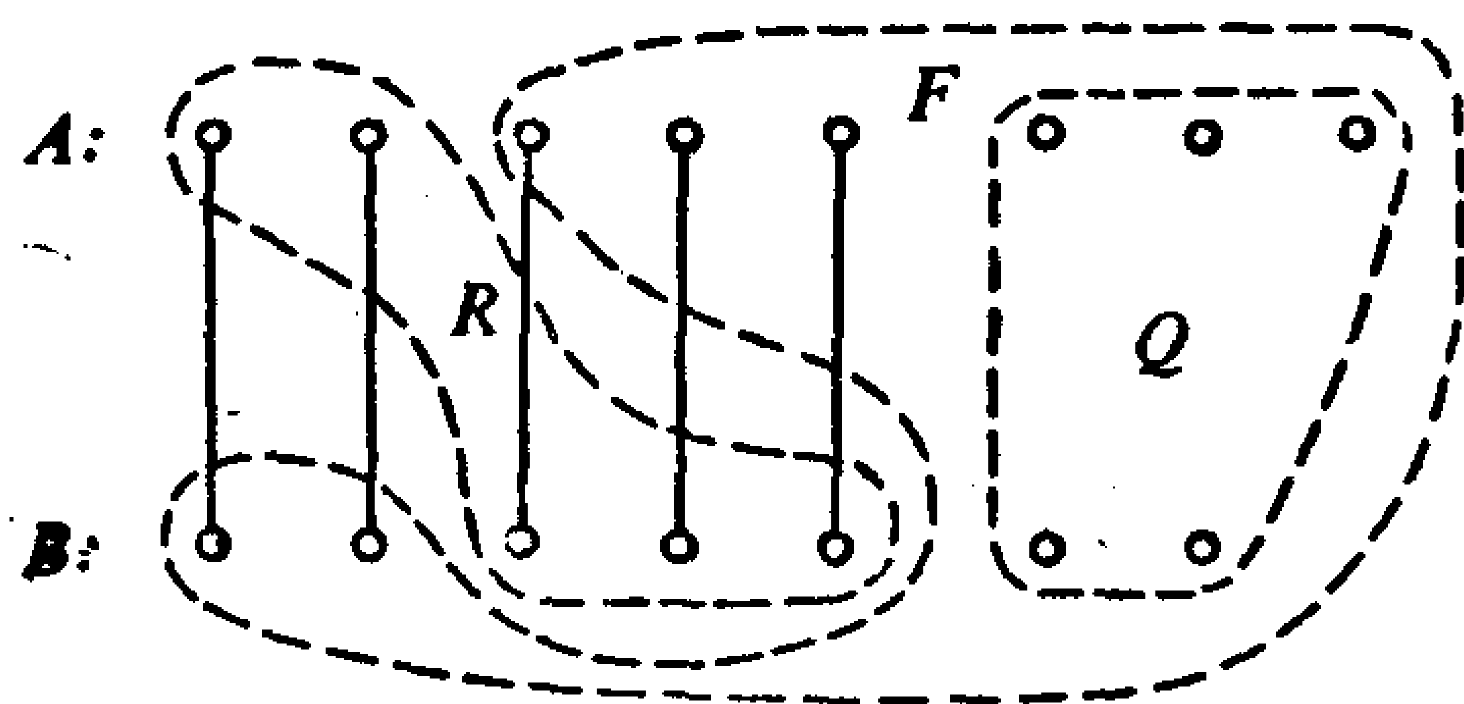


图 144

出标出的边.)以F表示G的不在R内的顶点的集合，并以Q表示F内删去标出边的端点后而得到的顶点的集合. 问题 **23** 的命题表明F是G的一个极大独立顶点集；因此，F的顶点数是iv_{max}. 由于任一标出边(边数是ie_{max})在F内恰有一个端点，Q的顶点数是$iv_{max}-ie_{max}$. Q能以这样的方式被覆盖，使每个顶点被一关联边所覆盖. G的其它顶点能被标出边所覆盖，边数是ie_{max}. 因此，

$$iv_{max}-ie_{max}+ie_{max}=iv_{max}$$

条边足以覆盖G的每个顶点.

所以，下列命题是正确的：

30. 对于无孤立顶点的任何一个双图，有

$$iv_{max}=ce_{min}.$$

代替问题 **25** 的证明，我们将证明它的一般化形式，如下：

31. 若至少有 $2k$ 个顶点的一个简单图，其每个顶点的次数至少是 k，则图至少包含 k 条独立边.

假定简单图G至少有 $2k$ 个顶点，且G中每个顶点的次数至少为k. 以 e 记G的极大独立独边数，又假定命题不成立，即$e\leq k-1$. 令E是G的一个极大独立边集，以Q表示E的端点集. 由于在Q内的顶点数是 $2e\leq 2k-2$，存在两个顶点，a 与 b，在G内而不在Q内. E的极大性表明这些顶点只能与Q的顶点邻接. 若存在E的一边，使其端点之一联结于 a 而另一边联结于 b，则应用交错路方法可知，这将矛盾于E的极大性(见图 145). 现在我们考虑 a 的 k 个

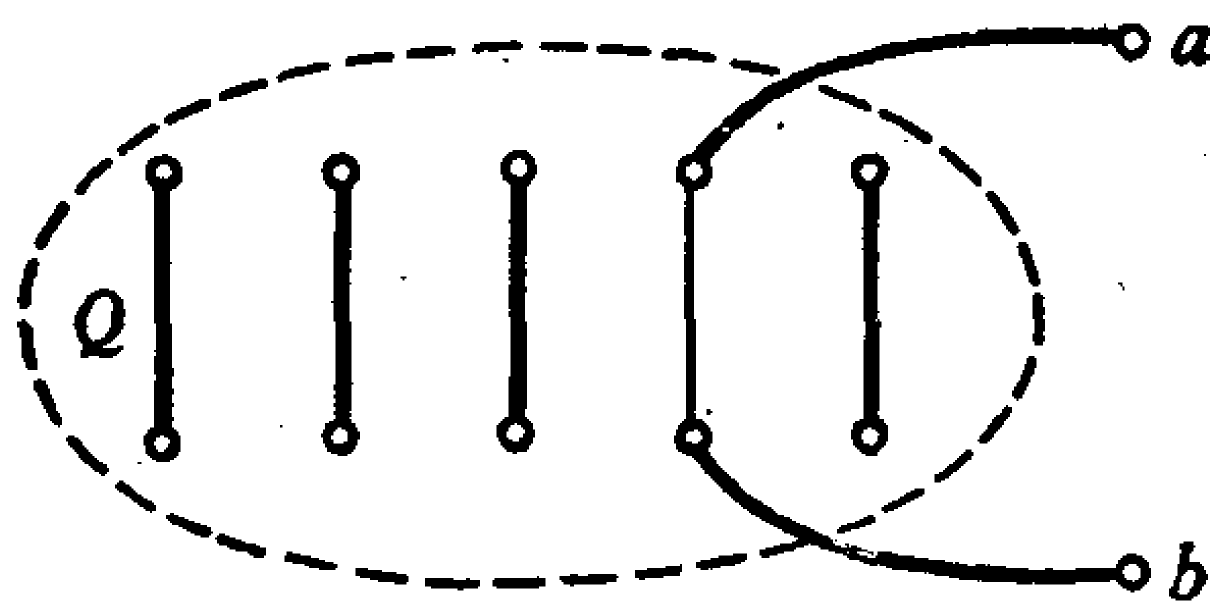


图 145

邻接顶点；我们已经看到它们全部属于Q．让我们把硬币放到这k个顶点的每一个上，然后沿着E的关联于对应顶点的边，移动每个硬币，直至边的另一端点．原有的被硬币覆盖的k个顶点，据上面的推理，没有一个是能邻接于b的．因此，至少有$2k-2-k=k-2$个b的邻点能在Q内；但b至少邻接于k个顶点，已证明它们全是属于Q的．

于是，命题31得证．

在命题31中，若我们以"恰有$2k$"去替换"至少$2k$"，则结果可由第四章的命题14推出(当$k>1$时)．由此可知，G内存在哈密尔顿回路H；H能分解为两个1-因子，其中每个都满足命题31的要求．

偶数长的哈密尔顿回路的存在，总能推出1-因子的存在．命题26及其推广表明：关于哈密尔顿回路存在的充分条件(第四章的问题34与命题15)，当我们限于考虑双图时，可以加以放宽．

为解问题26，我们以a_1，a_2与a_3及b_1，b_2与b_3分别表示女孩与男孩．若每名女孩都认识全体男孩，则所需的安排显然是可能的．所以，我们假定a_1与b_2不认识，则a_1必认识b_1与b_3．对称地，b_2也必认识a_2及a_3．若a_3与a_2都认识每名男孩，则a_1不邻接于b_2且男孩与女孩交错地排列的任何安排都是合适的．于是，我们可以假定a_2不认识b_3．此时，a_2必认识b_1与b_2；而b_3认识a_1与a_3．于是，所求的安排即$a_1, b_3, a_3, b_2, a_2, b_1$(见图146)．

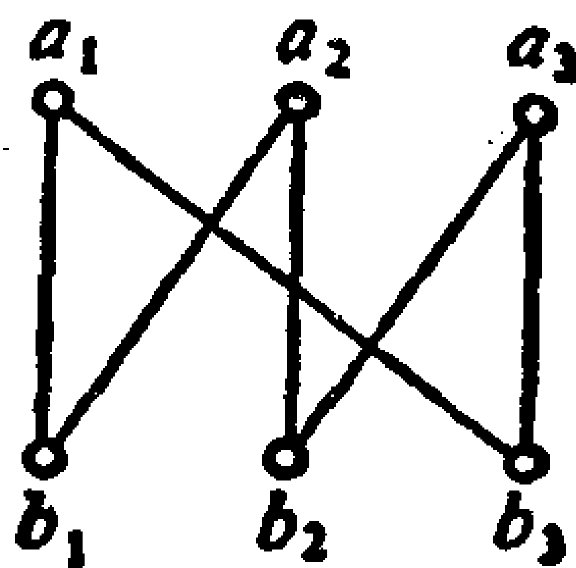


图 146

下列问题26的推广也可得证：

32. 假设双图$G(A, B)$无多重边，A与B都含有m个顶点($m\geq 2$)．我们考虑A的一顶点与B的一顶点，若它们不邻接，则它们的次数和大于m．那么，图有哈密尔顿回路．

此命题由命题33的证明而得证，那里将表明若$G(A, B)$是一无重边的双图，A与B有相同的顶点数，若有相当多的顶点，其次数充分大，则图中存在哈密尔顿回路.

33. 设$G(A, B)$是一无重边的双图，A与B各含有m个顶点($m \geqq 2$). 对任一不大于$m/2$的正整数k，我们假定在A内存在少于k个的顶点，其次数不大于k，在B内存在少于k个的顶点，其次数不大于k，则图有一哈密尔顿回路.

我们假定双图$G=G(A, B)$满足命题33的条件但G无哈密尔顿回路. 我们给G联以一些边而得到一个新的无重边的双图$G'=G'(A, B)$，G'无哈密尔顿回路，但在G'上联以任一新边即可得一双图$G''(A, B)$，它含有哈密尔顿回路.（找出有此性质的图G'是可能的，因为把A的每一顶点与B的每一顶点联结便产生一个具有哈密尔顿回路的图.）说图G'是饱和的（或临界的），若它满足命题33的条件；另一方面，若G满足命题32的要求，则G'也满足. 因G'是临界的，可推出：若a属于A且b属于B，且a与b在G'内不邻接，则G'内有一哈密尔顿路L，以a与b为端点. 沿L从a向b走，依次将其顶点记为

$$a=a_0, b_1, a_1, b_2, a_2, \cdots,$$
$$b_{m-1}, a_{m-1}, b_m=b.$$

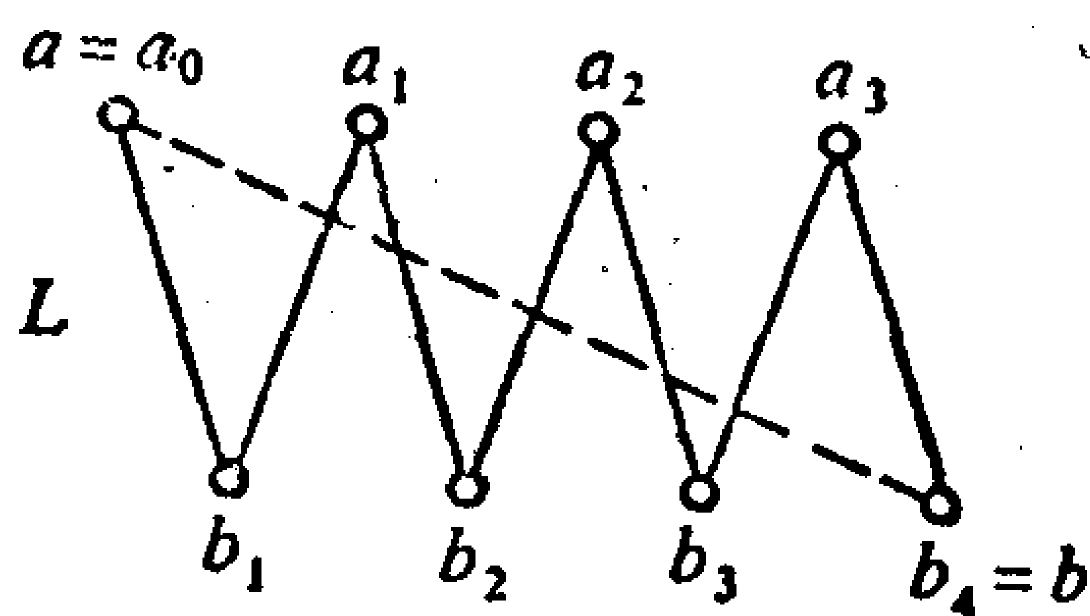


图 147

（当$m=4$时，见图147.）若G'内有边$\{a_0, b_j\}$，则边$\{b_m, a_{j-1}\}$不存在，不然，就找到了G'的一哈密尔顿回路，即，顶点序列：$a_0, b_j, a_j, b_{j+1}, a_{j+1}, \cdots, a_{m-1}, b_m, a_{j-1}, b_{j-1}, a_{j-2}, b_{j-2}, \cdots, b_1, a_0$. 所以，若$a$的次数是$r$，则$b$的次数至多为$m-r$. 因此，若我们考虑$G'$的两不邻接顶点$a$与$b$，使得$a$与$b$分别在$A$与$B$内，则

$$\varphi(a)+\varphi(b) \leqq m$$

对于 G' 及 G 是成立的. 于是, 命题 **32** 得证, 因为这一关系矛盾于 G 满足命题 **32** 的条件这一事实.

我们现在设顶点 a 与 b(分别在 A 与 B 内)是 G' 的两不邻接的顶点, 使得和 $\varphi(a)+\varphi(b)$ 为极大. (符号 a_i 与 b_i 的意义同上.) 此和数至多为 m. 因此, 或是 a 或是 b(例如, 是 a, 另一情况, 可类似地加以论证)的次数不超过 $m/2$, 即

$$\varphi(a)=k\leqq m/2.$$

以 b_j 表示 a 的 k 个邻接顶点之一. 我们已经看到 b 不邻接于 a_{j-1}. 由于 $\varphi(a)+\varphi(b)$ 极大,

$$\varphi(a_{j-1})+\varphi(b)\leqq\varphi(a)+\varphi(b);$$

因此,

$$\varphi(a_{j-1})\leqq\varphi(a)=k.$$

于是可证明 A 的 k 个顶点在 G' 内的次数不大于 k. 但这矛盾于关于 G' 的命题33的条件. 所以, 我们关于 G 无哈密尔顿回路的假设是不合理的.

这就一举证明了命题 **32** 与 **33**.

现在我们来解问题 **27**. 假定双图 $G(A, B)$ 满足给定的条件. A 与 B 都是图的独立顶点集. 因此, B 的顶点数不小于 A 的, 反之也一样, 即 A 与 B 含有相同个数的顶点. 但命题19的条件也被满足, 所以图有一个覆盖 B 的独立边集. 任一象这样的集合也覆盖 A, 得到了图的一个 1-因子.

问题 **27** 之逆也能证明: 假定双图 $G=G(A, B)$ 有 1-因子, 设 E 是 1-因子的边集. 对于图的任一独立顶点集 F, F 的每个顶点恰关联于 E 的一条边. 因为, 对于 E 的任一边, 至多其端点之一在 F 中, 又因为没有 E 的两边能关联于同一个顶点, 用 E 的边联结于 F 的顶点的那些顶点的个数等于 F 的顶点数,

所以, 证明了下列命题:

34. 若一个双图有性质：对于任一独立顶点集F，邻接于F的顶点的那些顶点的个数大于或等于F的顶点数，则图有1-因子. 反之，若一个双图有1-因子，则对于任一独立顶点集F，邻接F的顶点的那些顶点的个数大于或等于F的顶点数.

对于一个任意的图，命题**34**的第二部分成立. 因为图是双图的性质在前述的推理中并没有用到. 让我们彻底改动这个结果. 值得注意的是图的那些顶点，它们不属于某个独立顶点集而覆盖该图，反之也然. 我们假设图G有1-因子，我们删去任一覆盖顶点集R的顶点，以及与它们关联的边. 得到的图G_0，只含孤立顶点，我们有结论：G_0的顶点数不多于R的顶点数.

为使我们的命题更一般，我们以Q表示G的顶点的任一集合，我们删去Q的顶点以及与之关联的边. 以k记所得图G'的有奇数个顶点的那些分支的数目. 假定G有1-因子，以E表示1-因子的边集，若图G'的分支G_1含奇数个顶点，则E必有一边把G_1的一顶点联结到Q的一顶点. 这表明，若G有1-因子，则k小于或等于Q的顶点数.

上面命题之逆也成立. 证明是相当困难的，从略.

35. 以Q表示图G的任一顶点的集合，删去这些顶点以及关联于它们的全部的边. 在新图中，设k是具有奇数个顶点的分支的数目. 若G有1-因子，则k小于或等于Q的顶点数. 反之，若对于G的顶点的任一集合Q，相应的数k小于或等于Q的顶点数，则G有1-因子.

附记： 命题**35**的可能的删去法中，应当考虑到"零运算"，即没有顶点被删去的情形. 在此情形下，也能说Q是存在的，但它是空集，即其顶点数为零. 若Q是空集，则k就是原图中的奇数顶点分支的个数.

注意： 命题**35**已被推广，能给出图中任意因子存在的条件.

本书的下一卷(正筹备中)将强调3-正则图分解为1-因子的极端重要性. 由于此问题与所谓四色问题有着密切的联系,所以,我们将把注意力集中于3-正则图.

练　　习

36. 试确定图 148 与 149 是否有1-因子.

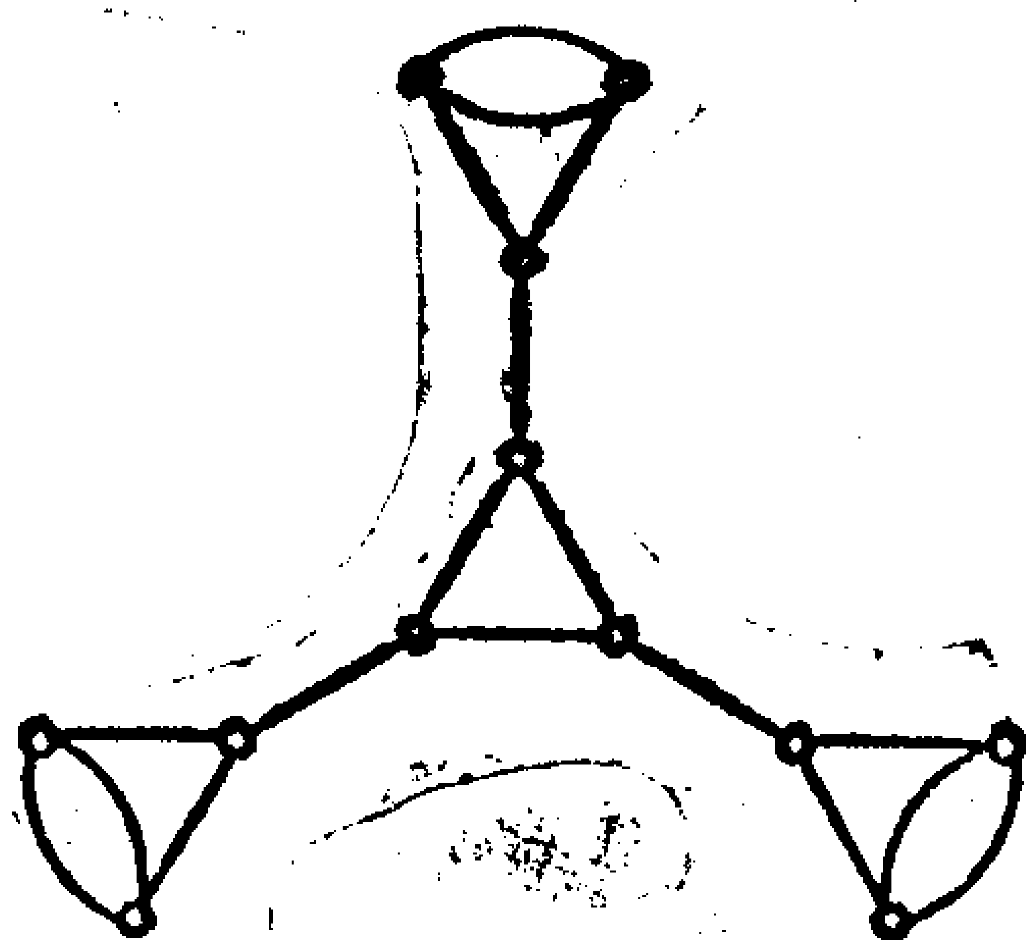


图　148

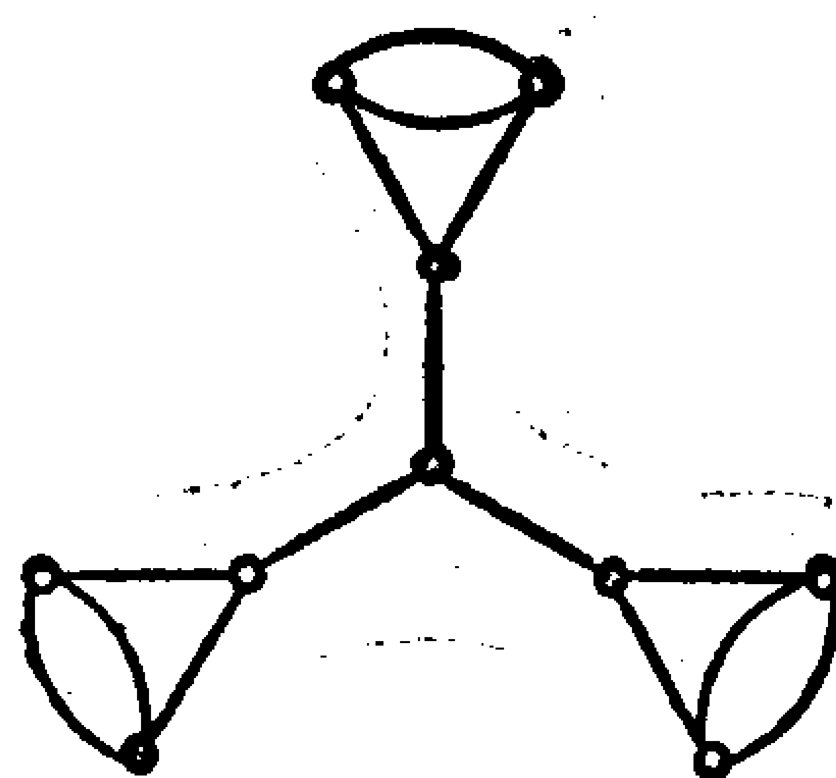


图　149

37. 画几个具有哈密尔顿回路的 3-正则图(例如, 图 86 与 121). 这些图能分解为1-因子吗?

问　　题

38. 求证任一具有哈密尔顿回路的3-正则图能分解为 3 个1-因子.

39. 求证图150中的图不能分解为 3 个1-因子.

40. 求证: 若一3-正则图含有一桥, 则它不能分解为 3 个 1-因子.

当我们细察练习 36 的图时, 容易发现图的一个1-因子(见图151中的粗线). 应用命题 35, 我们立即发现图149的图没有 1-因

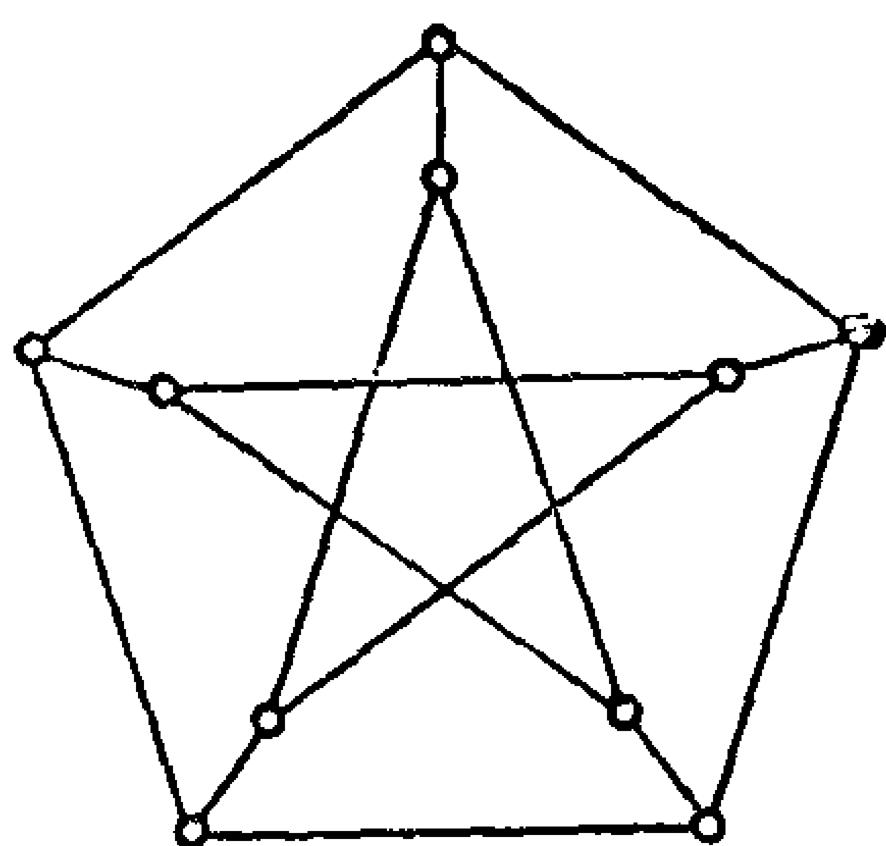


图 150

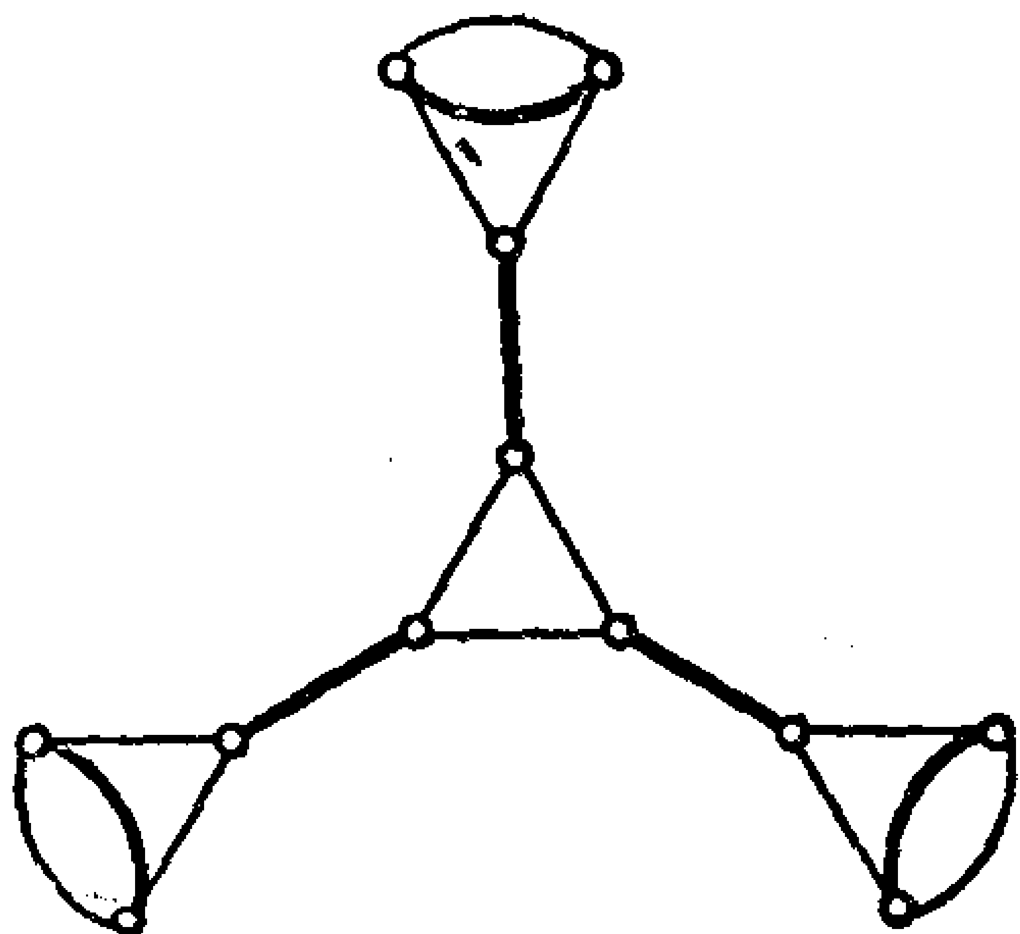


图 151

子；集合Q由位于中央的单个顶点构成(此顶点只关联于桥)，此时，$k=3$.

练习 **37** 的每一个图都能分解为 1-因子. 这命题的证明即问题 **38** 的所求. 假设H是 3-正则图G的一个哈密尔顿回路. 从图G删去H的边即得一个1-因子. 这事实(或第一章的命题 **9**)表明G和H有偶数个顶点. 因而H也有偶数条边，能把它分解为两个1-因子：当我们沿H的边走时，每隔一边的边属于同一1-因子.

问题**38**之逆通常是不成立的，甚至对于连通图也如此. 图132就表明这一点(也可参看第四章内的图89).

为解问题**39**，假定图150中的图是 3 个1-因子的积以F_1, F_2及F_3表示这 3 个1-因子. 由于五边形K(“界定”图的长为 5 的回路)不能分解为两个1-因子，全部 3 个因子必至少有一边在K内. 此时，3因子之一，比如说F_1，恰有一条边在K内. 以e表示这条边，如图 152 中的粗线所示. K中其它的边不属于F_1. 因为每个顶点恰关联于每个因子的一条边，全部其它如图 152 的粗线所示的边，必须属于F_1. 关联于顶点p的边之一必也属于F_1，但无论选用三边中的哪一边都将导致一个顶点关联于F_1的两条边，这是一个矛盾. 因此，问题**39**得解，而问题**38**表明此图没有哈密尔顿回路.

为解问题**40**，假定3-正则图G的边h是桥，又假定G能分解为

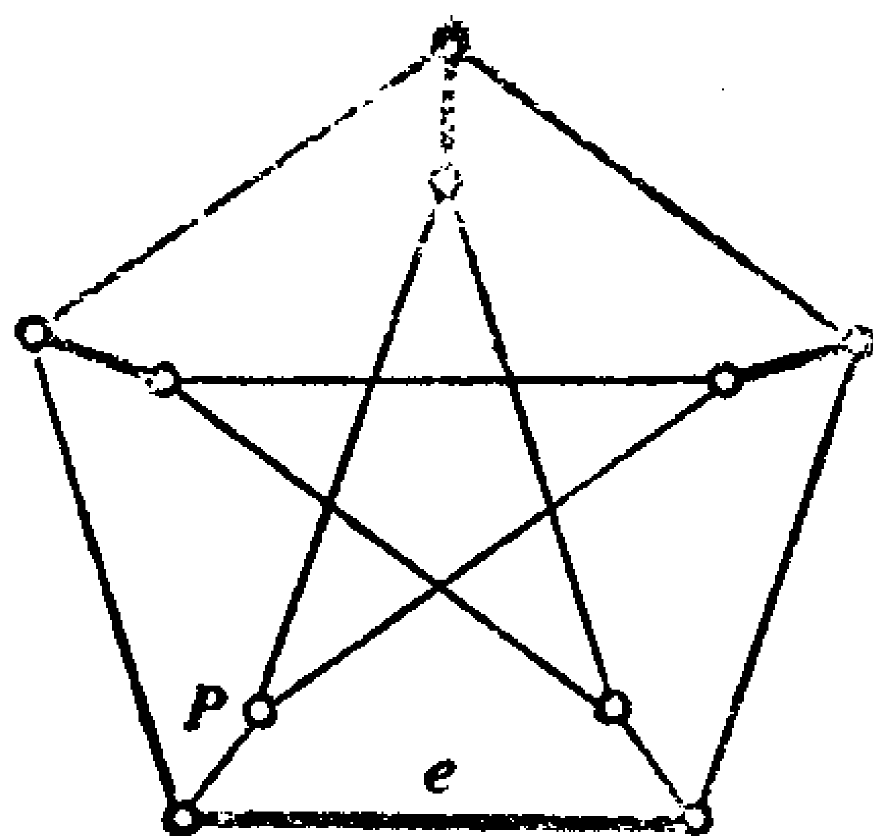


图 152

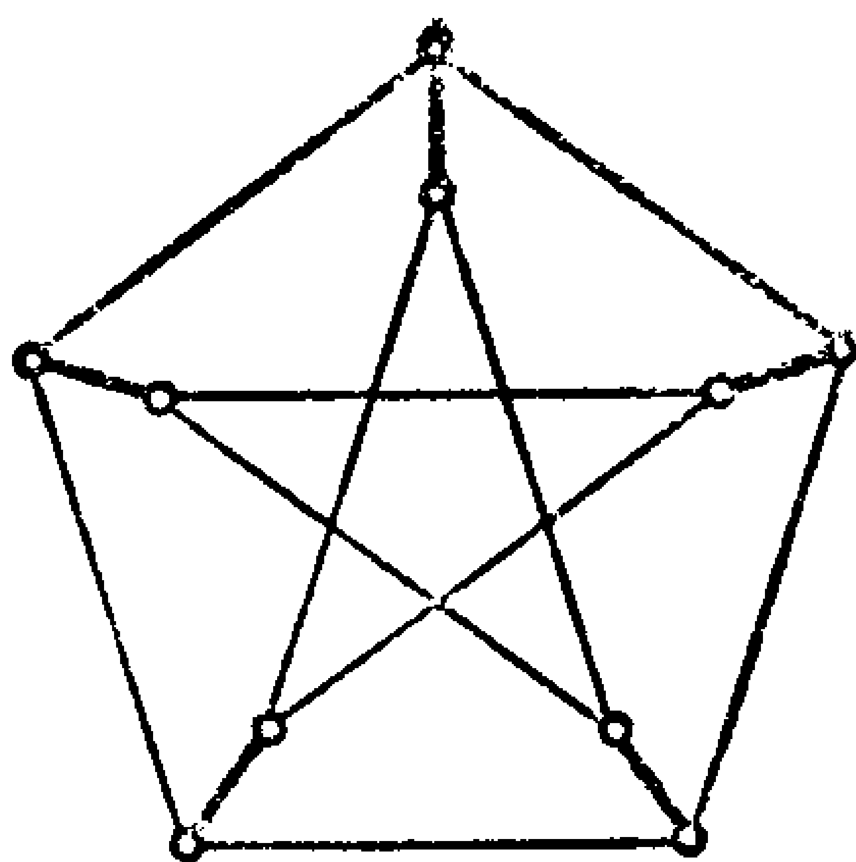


图 153

3 个 1-因子. 我们分头考虑 3 个 1-因子, 选出不含边 h 的一个 1-因子. 让我们从 G 删去此1-因子的边. 得到的图 G' 的每个分支是一回路. 因此, h 包含在G' 的一个回路中, 后者也是 G 的一个回路, 这是一个矛盾(由第三章的命题12).

若一个 3-正则图有桥, 则它不能分解为 3 个 1-因子, 这样的一个图可能连一个 1-因子都没有(例如, 见图 149). 但在某些情况下, 也可能有 1-因子(例如, 见图 151). 我们已经发现图 150 中的图虽然无桥, 也不能分解为3个1-因子, 但却有1-因子(见图153, 其中粗线表明可能的1-因子之一). 因此, 无桥的3-正则图或许不能被分解为 3 个1-因子, 但下面证明, 它总有 1-因子:

41. 无桥的 3-正则图必有 1-因子.

对于3-正则图 G, 可以证明, 无桥就表明命题35 的第二部分的条件(包括附记)得到满足. 即命题35可以推出命题41.

可以假定 G 是连通的, 否则, 可以分头对每个分支进行审查. 以 Q 表示连通图 G 的顶点的任一集合, 我们删去 Q 的顶点以及关联于它们的边, 以 G' 记所得的图, 设 k 是 G' 中有奇数个顶点的分支的个数.

若 Q 是空的, 则 $k=0$, 因为 G 是连通的, 第一章命题 9 表明 G 有偶数个顶点. 我们假定 Q 不空, 以 K 表示具有奇数个顶点的 G'

的一个分支．我们从K构造一新图K_1如下．我们考虑G的全部这样的边，它们关联于K的一个顶点，又关联于不在K中的一个顶点(即在Q中)．我们把它们添加到K上去．我们把这些关联于Q的一个顶点的边全联结到一顶点p上．得到了一个新图K_1，K是它的一个子图．p的次数必为奇数(见第一章的命题9)，因为K_1在K中有奇数个顶点，其中每个顶点的次数为3．若p的次数是1，则在G中存在一桥．所以

$$\varphi(p)\geqq 3.$$

因此，G中这种边的条数至少为$3k$，它们把Q联结于G'的顶点数为一奇数的分支．Q的每个顶点的次数为3．所以，它们至多能关联于3条边．因此，Q至少含有k个顶点．

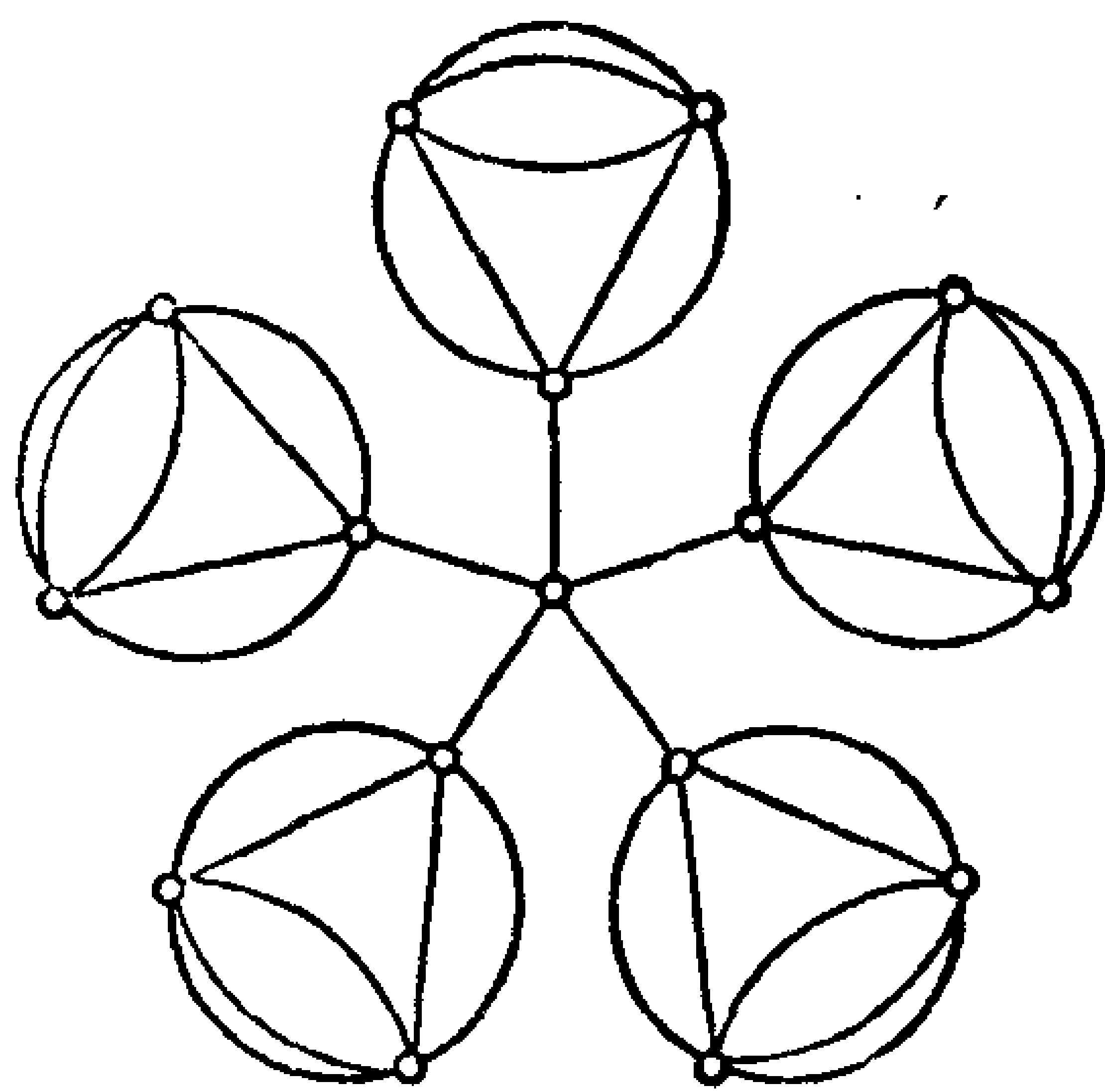


图 154

因此G满足命题35的第二部分的条件，G有一个1-因子．于是，证得了命题41可由命题35推出．

以G_3表示图149中的3-正则图．图154中的5-正则图G_5是用一相似的方式构造出来的．7-正则图G_7，9-正则图G_9等等，容易类似地举出(一般地，G_5中的2重边将成为G_{2k+1}中的k重边，而G_5中的3重边将成为G_{2k+1}中的$k+1$重边．)我们将证明这些图中没有一个作为一个真子图的一个因子．因此，将证明他们也没有1-因子．

我们假定图G_{2k+1}是不止一个因子的积．我们把一个特定的分解的因子分为两组，并构成同一组中因子的积．所以，G_{2k+1}恰能分解为两个因子，比如说F_1与F_2．由于两个因子的次数和是$2k$

+1(即奇数)，因子之一，如 F_2，有偶次数. 命题13表明F_2能分解为2-因子，即G_{2k+1}的每个顶点必含于图的一个回路内. 但在中央的顶点只与桥关联，不能含于任一回路，这是一个矛盾.

若图含有两个顶点及关联于它们单个的边(它不是环)，则它的真子图中没有一个是因子. 因此，我们有:

42. 对于任一正奇整数 k，存在一个k-正则图，具有性质: 其真子图中没有一个是因子.

对无限图可以证明下列命题: 顶点数为无穷的完全图能分解为1-因子的积. 只要顶点的共同次数是有限的，命题13与 18 对无限正则图成立.

*

练　　习

43. 安排美洲 6 个队间的循环赛，使赛局分 5 组进行比赛.

44. 把图 123 分解为1-因子.

45. 把图 128 分解为 2 个因子.

46. 把具有 7 个顶点的完全图分解为 3 个 2-因子.

47. 求证: 在一个具有 5 个顶点的完全图中，删去其任一双图子图的边后，我们将得到一个图，它不是双图.

48. 在图155与156的图中有1-因子吗?

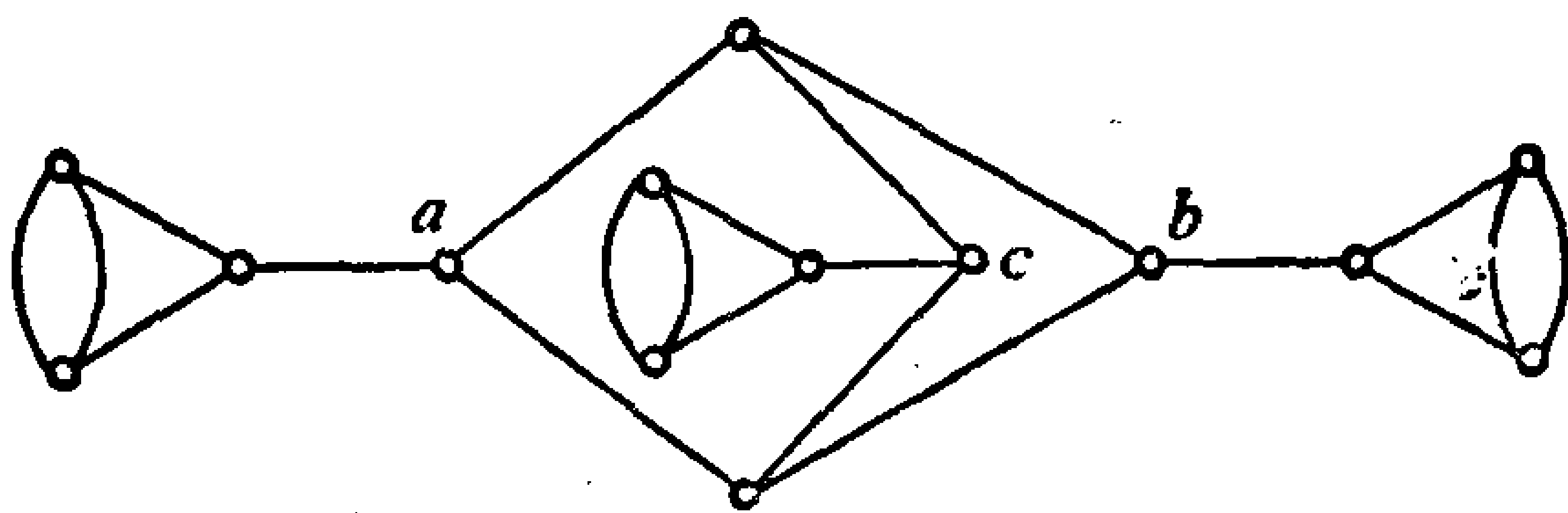


图 155

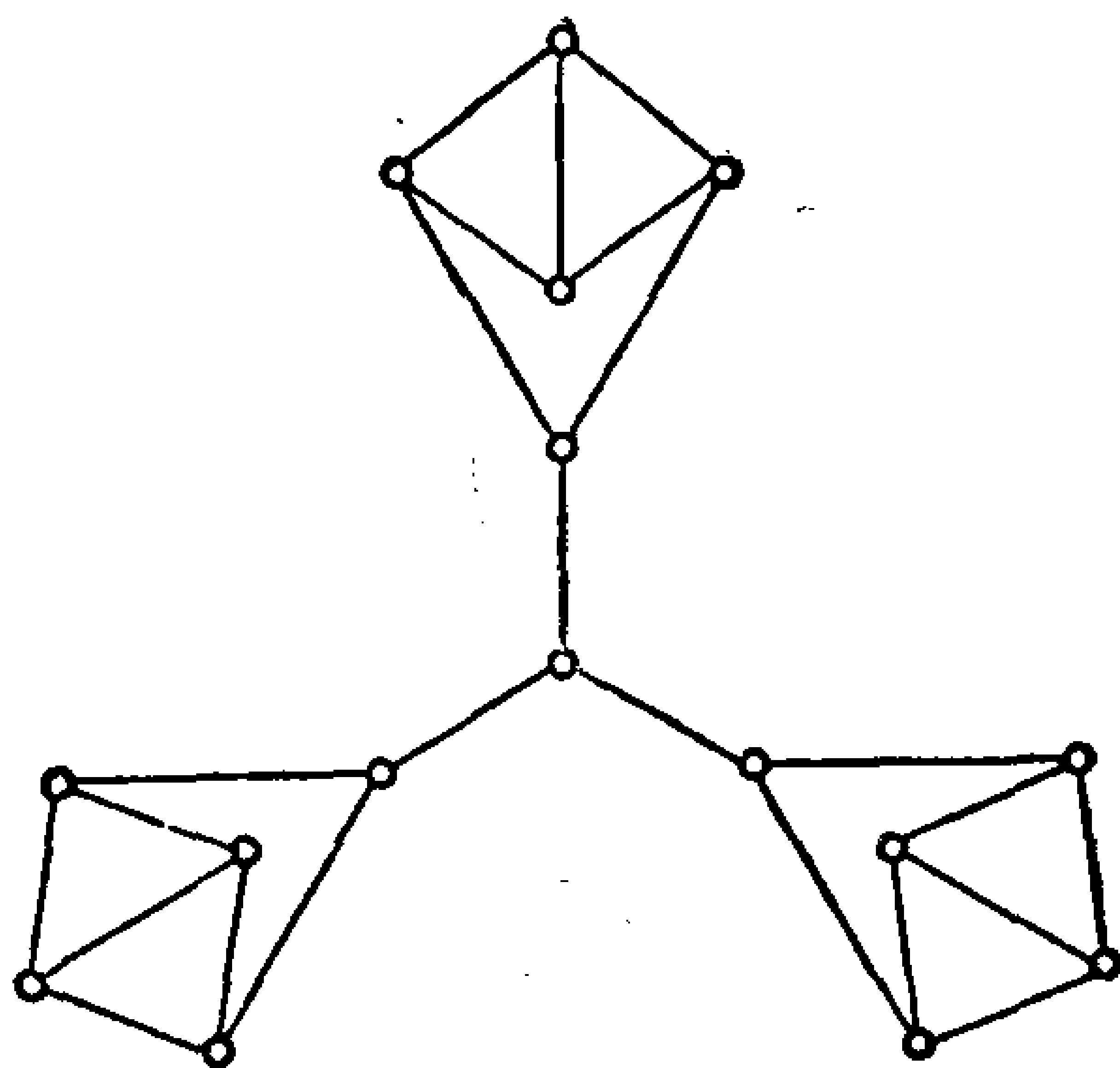


图 156

问　题

49. 求证：任一具有偶数条边的$2k$-正则连通图，可分解为两个k-因子($k\geqq 1$).

50. 求证：一个欧拉图(参看第三章命题7后的定义)不含桥.

51. 求证：任一连通正则图的每个奇-因子包含图的全部的桥.

52. 一个连通正则图含有若干座桥. 求证以任一方式把它分解为因子时，都至多能有一个奇-因子.

53. 连通正则图的一个顶点联结着h座桥，求证图的任一奇-因子的次数至少为h.

54. 一个奇次连通正则图有一个仅关联桥于的顶点. 求证：它的真子图中没有一个是因子.

55. 求证：连通双图$G(A, B)$唯一地确定两个集合A与B(交换集合A与B不认为是不同的情形).

56. 一个"网"由珍珠及连接它们的线组成. 珍珠排成n行

m列(见图 157，其中 $n=5$ 与 $m=6$)。试确定 m 与 n 的值使当割除某几段线后，"网"就成为项链.

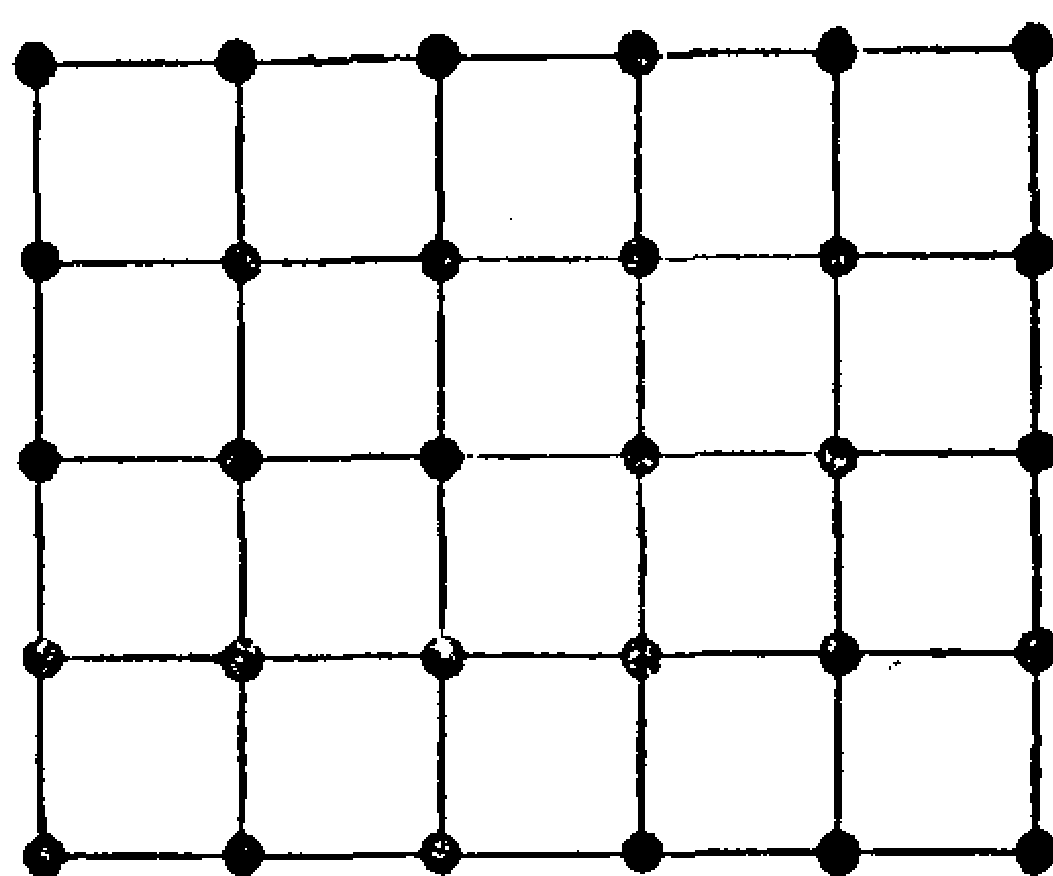


图 157

57. 试确定能否存在一个无孤立顶点的双图，使得除一个顶点外，其余的顶点都有相同的次数，且此唯一相异的顶点的次数小于其余顶点的公共次数.

58. 求证具有 2^n(对于一切 n)个顶点的完全图内存在 n 个双图子图，使得完全图的每一边含于子图之一中.

59. 求证：有 $4n$ 个顶点，无重边的 $2n$-正则双图总能被分解为 n 个连通的2-因子(即分解为哈密尔顿回路).

60. 从64格棋盘上选出16格，使每行每列含有其中的 2 格. 求证可以把16个棋子(8 个白的与 8 个黑的)放置到所选的方格上，使每行每列都恰有一个白的与一个黑的棋子.

61. 求证：一个次数至少为 2 的连通正则双图不含桥.

62. n 个学校的学生参加 n 个不同主题的一次校际竞赛. 对于每个主题，每个学校恰有一名学生来代表. 求证：对任一整数 $k(1\leq k\leq n)$，可以作出安排，使每个学校与每个主题将恰有 k 名学生来代表.

63. n 名绅士与 n 名女士参加一个舞会. 其中每位女士认识半数以上的绅士，每位绅士也认识过半的女士.(假定认识是相互的.)求证作出这样的安排是可能的，使他们全体在第一次成对的跳舞中每一对舞伴是相互认识的.

64. 求证：若一个双图有 n 个顶点，无孤立顶点，则

$$ie_{\max}+ce_{\min}=n.$$

65. 双图 $G(A, B)$ 无重边，在 A 中与在 B 中都有 m 个顶点

($m \geqq 2$). 求证：若图至少有 $m(m-1)+2$条边，则它有哈密尔顿回路．

66. 在有 m 名女孩与 m 名男孩参加的一次集会上，其中每名女孩认识半数以上的男孩，而每名男孩认识过半的女孩(假定认识是相互的)．求证：他们可围成一圈，使每名男孩在他所认识的两女孩中间，而每名女孩在她所认识的两男孩中间．

第六章　极值、极图

我们回到第一章的命题16(以下缩写为**1.16**，其余的命题仿此)，考虑下述问题：试确定 n 的**最小值**，使对于任一具有 n 个顶点的简单图，或者图，或者它的补图包含一个三角形．命题**1.16**及**1.29**表明所求的数为6．因此，具有性质：使图与它的补图均不含三角形并有**极大**顶点数的简单图有5个顶点．具有这种性质并有尽可能多的顶点的简单图，叫作(给定问题的)**极图**；例如，五边形是一极图．

若图中每个顶点的次数足够大，则图包含一回路．具有下述性质的最小正整数 f 的值是多少，才能使图中每个顶点的次数至少为 f 便足以保证该图含有回路？据命题**1.23**，$f=2$，因为存在无回路的图，使最小次数为1：没有孤立顶点的林．这些林就是此问题的极图．

回路的存在，还可以由边数的充分大来保证．若具有 n 个顶点的图至少含有 n 条边，则图总含有一回路，极图是树(见**2.4**与**2.5**)．

若只考虑奇数长的回路，则须考虑独立顶点数的最小值以替换边数的最大值．若我们考虑一个双图的顶点的两个集合，将发现此两集之一中的顶点数大于或等于另一集的顶点数．因此，对于任一双图，$iv_{\max}\geqq n/2$；或若 n 是奇数时，$iv_{\max}\geqq\frac{n+1}{2}$．现在就来介绍统一表达此关系的方法．

对于任一实数 x，以

$$[x]$$

记 x 的整数部分，就是不大于它的最大整数．例如，$[-3.84]=-4$；$[2.7]=2$；对于任一整数 k，$[k]=k$，而

$$\left[\frac{k}{2}\right]=\begin{cases}\dfrac{k}{2}, & \text{若 } k \text{ 是偶数,}\\[2ex] \dfrac{k-1}{2}, & \text{若 } k \text{ 是奇数.}\end{cases}$$

应用这一新记法，我们可以说，对于任一具有 n 个顶点的双图，

$$iv_{\max}\geqq\left[\frac{n+1}{2}\right].$$

因此，对于一个图，数 $iv_{\max}$ 是小的，即对于一个具有 n 个顶点的图，它小于 $[(n+1)/2]$，那么图不能是双图．在此情况下，据**5.15**，它含有一奇数长的回路．所以，如果我们只关心一个图中奇数长回路的存在性，则具有 n 个顶点的极图是，例如，那么一些双图 $G(A, B)$，其中，A 的每个顶点邻接于 B 的每个顶点，且 A 有 $[(n+1)/2]$ 个顶点．

本章讨论象这样的极值问题．在前几章中，已有约 30 个极值问题，例如 **2.13**, **2.14**, **4.13**, **4.14**, **4.35**, **5.31**, **5.65**．考虑这些问题的极图是值得的．

图论包括许多其它的极值问题，这里给出其中有不同特点的一些问题．我们可以举出，比如，第二章中的建造一无回路网络的经济的方法，或第五章中的寻求双图的一个极大独立边集的问题．还有一些极值问题将在本书的下一卷（正筹备出版中）中提出．

组　合

下面我们讨论组合论的一些概念，现在让我们来熟悉它们的性质．

练　习

1. 试确定由数码 2,7, 8 组成的所有的三位数.

2. 试确定含有两个数码 9 与三个数码 4 的 5 位数的个数.

3. 从 5 名学生中选出 2 名, 有多少种选法?

练习 1 可表达为: 按不同的顺序写出三个给定的数码, 有多少写法? 若数码 2 已写出, 则数码 7 可置于两不同的位置: 放在它之前或之后. 数码 8 则有三种可能的位置. 前面、后面或两数之间. 因此, 练习 1 的解为下列的 6 个数:

872　　827

782　　287

728　　278.

一些数或对象, 或更一般的"元素"的可能的顺序, 叫做它们的**排列**. P_n 表示 n 个元素的排列的个数. 我们能从练习 1 的解看出 $P_1=1$, $P_2=1\times 2=2$, 及 $P_3=1\times 2\times 3=6$. 显然, 每个 3 元素的排列, 可因于某处添上第四个元素而成为 4 个 4 元素的排列. 因此, $P_4=1\times 2\times 3\times 4$, 而归纳地, 对于 n 元素我们有

$$P_n=1\times 2\times 3\times\cdots\times n.$$

积 $1\times 2\times 3\times\cdots\times n$ 常写作 $n!$ (念作"n 阶乘"), 所以:

4. n 元素的排列数是 $P_n=n!$.

现在我们来考虑练习 2 的 5 位数. 若暂时地把两个数码 9 与三个数码 4 看成是不同的 5 个数, 且按所有可能的顺序写出两个(不同的)数码 9 与三个(不同的)数码 4, 也就得到了 5 个不同数字的全部可能的顺序. 因此, 若练习 2 中 5 位数的个数是 x, 则有

$$P_2\times P_3\times x=P_5,$$

由此推得

$$x=\frac{P_5}{P_2\times P_3}=\frac{5!}{2!3!}=\frac{5\times 4}{2\times 1}=10.$$

一般地, 若有 r 类元素, 元素个数总计为 n, 使得以 $n_1, n_2, \cdots, n_r$ 分别为第 1, 第 2, …, 第 n 类的元素个数, 即, $n_1+n_2+\cdots+n_r=n$, 则这些元素的可能的不同顺序叫作 n 元素的**重复排列**, 其个数为 $P_n^{n_1,n_2,\cdots,n_r}$. 显然, $P_n^{1,1,\cdots,1}$

$=P_n$. 我们的练习 2 的解, 可以看出是十分一般的. 因此, 得到下列关系式:

$$P_{n_1}\times P_{n_2}\times\cdots\times P_{n_r}\times P^{n_1,n_2,\cdots n_r}=P_n,$$

由此, 应用命题 4, 又导出

5. n 元素的重复排列数为

$$P_n^{n_1,n_2,\cdots n_r}=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}.$$

以 a_1, a_2, …, a_5 记练习 3 中的学生. 图 158 的表的每一行对应于从他们中选派两名学生的一种可能的方法: "+"号表示对应的学生被选中; "−"号则表示落选. 由此能表出全部可能的选派法. 因此, 所求的可能的选派法的数目就等于两类(即"+"与"−")的 5 元素的可能的不同顺序数, 若在第一类与第二类中分别有两个与三个恒同的元素.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
+	−	+	−	−
−	+	+	−	−
−	+	−	−	+

图 158

因此, 所求的数目为 $P_5^{2,3}=10$.

一般地, 从 n 元素的一个总体中选取 k 个元素的任一方法(不管 k 元素的顺序), 叫做一个 **n 元素的 k-组合**. 以 C_n^k 表示这些组合的数目.

图 158 所示的选取原理可一般地表出. 由此

$$C_n^k=P_n^{k,n-k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

约去 $(n-k)!$, 我们得到

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\times2\times\cdots\times k},$$

其分子与分母都是 k 个因子的积. 常记为

$$\binom{n}{k}\quad (念作“n 下 k”)$$

因此, 我们有下列命题:

6. n 元素的 k-组合数是

$$C_n^k=\binom{n}{k}.$$

练习 2 与 3 的结果相同的事实并非偶然. 它们都等于 $P_5^{2,3}$. 若一完全图的 5 个顶点对应于练习 3 的学生, 则图的边表示可能的学生对. 变换一

下，把完全图的顶点解释为数位．图的一条边对应于作为其两端的两个顶点的数位，此两数位，在所讨论的5位数中，放置两个数码“9”．于是，练习2与3的答案就都是一个具有5个顶点的完全图的边数．

具有n个顶点的完全图的边数显然等于从n个顶点中选取两个顶点（为相应的边所联结）的不同选法的数目．此数目即n元素的2-组合数，按照1.11，即

$$\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}.$$

练　　习

7. 求证：$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$.

8. 求证：$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$.

练习7中等式的两边都等于

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

这也能据组合上的考虑而得证：从n元素取k元素的选法数与取后剩下$n-k$元素的选法数相同，所以

$$C_n^k=C_n^{n-k},$$

据命题6，即得所求证的等式．

练习7中等式的左边，当$k=0$时无意义，而在右边我们有$\binom{n}{n}=1$. 因而约定$\binom{n}{0}=1$，由此，$0!=1$是有用的，也可按照$\binom{n}{k}$的定义，因为，从n元素取0个元素的选法恰为一种，即不取任何元素．

此外的定义

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

可独立于借助组合考虑的原有定义；比如，允许n是任意实数．不过，以下我

们总假定 n 与 k 是非负整数. 若 $k>n$, 则 $\binom{n}{k}=0$, 因为, 分子中有一因子为零.

约定 $\binom{n}{0}=1$ 后, 直接表明练习 8 的等式当 $k=0$ 时成立, 因为

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}=1+n=\binom{n+1}{1}.$$

若 $k>0$, 则考虑所求证等式的左边的公分母并找分子的公因子, 有

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!}=$$

$$=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)(k+1)+n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!}=$$

$$=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)(k+1+n-k)}{(k+1)!}=\frac{(n+1)n(n-1)\cdots(n-k+1)}{(k+1)!}$$

$$=\binom{n+1}{k+1}.$$

于是, 等式得证.

现在我们回到本章原先的问题. 以$n(3,3)$表示具有下述性质的最小整数: 对于任一至少有$n(3,3)$个顶点的简单图, 或者该图, 或者它的补图含有三角形. 我们已发现 $n(3,3)=6$. 问题的一个直接的推广是以完全图去替换三角形. 稍后(见命题22)我们将证明对于任意的正整数 m 与k, 存在一个数使得对于顶点数等于此数的任一简单图, 或者该图包含一个有 m 个顶点的完全图, 或者它的补图包含一个有 k 个顶点的完全图. 因此, 我们有拉姆舍 (Ramsey)数, $n(m,k)$, 它具有下列性质:

(1) $n(m, k)$ 是具有下述性质的最小整数. 对于任一至少有 $n(m,k)$个顶点的简单图, 或者该图包含有 m个顶点的完全图, 或者它的补图包含有 k 个顶点的完全图. 具有 $n(m,k)-1$个顶点的简单图是极图, 它们有性质: 该图既不含有 m个顶点的完全图, 它的补图也不含有 k 个顶点的完全图.

数 $n(m, k)$ 的准确值仅对几个数对 (m, k) 是已知的. 例如, $n(3,3)=6$, 且五边形是一极图(见问题94). 对于一已给的数对 m 与 k, 往往只是成功地确定 $n(m, k)$ 的下界与上界, 即分别地确定不大于与不小于 $n(m, k)$ 的那些数. 我们将局限于讨论这些问题.

图 G 的 k 个顶点构成顶点的一个集合 P. 若 P 在 G 的补图中导出 k 个顶点的完全图, 则 P 是 G 的一个独立顶点集, 即, 此时 G 有 k 个独立的顶点. 因此, 我们也能说

(2) $n(m, k)$ 是具有下述性质的最小整数, 任一至少具有 $n(m, k)$ 个顶点的简单图, 或者包含有 m 个顶点的完全图, 或者含有 k 个独立顶点. 具有 $n(m, k)-1$ 个顶点的简单图是极图, 它不包含具有 m 个顶点的完全图, 且对于它, $iv_{\max}<k$.

任一具有 k 个顶点的简单图与它的补图一起, 可以这样来描述, 我们在 G 上添加一定数目的边而得到一个具有 n 个顶点的完全图, 给此完全图的边染上色, 使 G 的边有红色, 它的补图的边为蓝色. 此图也叫做一个具有 n 个顶点的红-蓝完全图. 其中, G 是红的, 而它的补图是蓝的.

于是(1)与(2)也等价于

(3) $n(m, k)$ 是具有下述性质的最小整数. 任一至少具有 $n(m, k)$ 个顶点的红-蓝完全图, 或者包含一有 m 个顶点的红完全图, 或者包含一有 k 个顶点的蓝完全图. 具有 $n(m, k)-1$ 个顶点的红-蓝完全图是极图, 它们既不包含有 m 个顶点的红完全图, 也不包含有 k 个顶点的蓝完全图.

利用两种颜色的互相替换, 我们得到下列等式:

9. 对于任意的自然数 m 及 k, 有 $n(m, k)=n(k, m)$.

因为仅有一个顶点的完全图是没有边的. 显然可以把它的边说成全是蓝的, 或全是红的. 因此, $n(1, k)=1$. 具有两个顶点

的完全图只有 1 条边；因此，若它不包含具有两个顶点的红完全图，则它的边全是蓝的．所以，$n(2,k)=k$．把这些结果与命题9相比较，我们得出下列命题：

10. 对任意的自然数 m 与 k，有

$$n(1,k)=n(m,1)=1;\ n(2,k)=k \text{ 及 } n(m,2)=m.$$

练　　习

11. 图 159 的图中含有三角形吗？试确定该图的 iv_{max} 值．

12. 试用上一练习题的答案找出$n(3,4)$的一个最高下界．

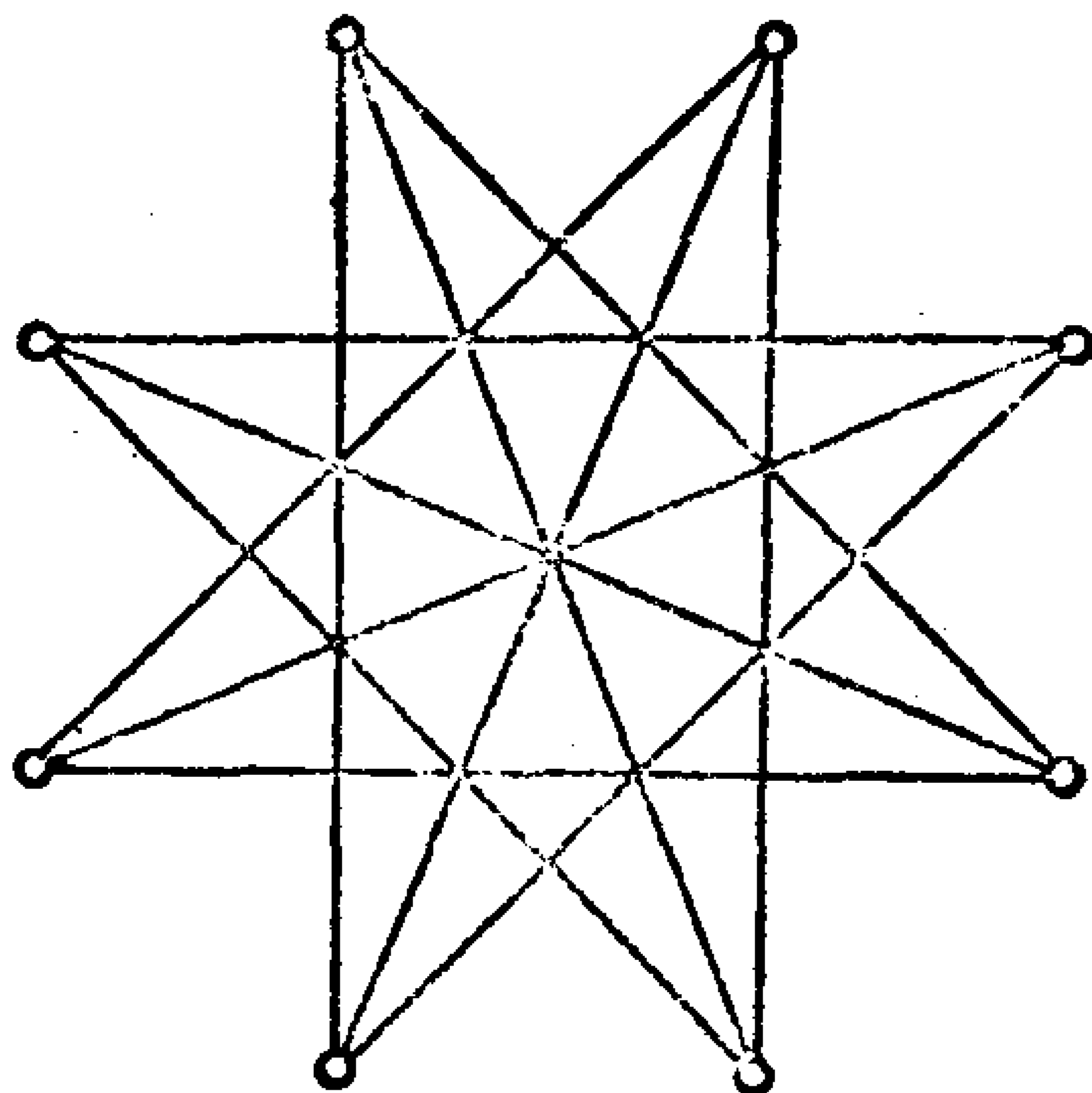


图　159

问　　题

13. 关于某一天在一图书馆内的人有下列事实：

(*a*) 在任 8 名访问者中，必有两人在图书馆内互相见了面．

(*b*) 若两人都见到过第三者，则此两人不曾在图书馆见面．

求证：那天在图书馆内没有一人能见到多于 7 人．

14. 定义具有 $3k-1$ 个顶点的简单图（对任自然数 k）H_k 如

下，设 H_k 的顶点分布在一圆周上，作为正 $(3k-1)$ 边形的顶点（一个正 2 边形是圆的一直径）．当且仅当它们间的距离大于圆内接正三角形的边长时 H_k 的两顶点是邻接的求证：没有一个这样的图含有三角形．H_k 的 iv_{max} 值等于 k.

15. 试用上一问题中 H_k 的性质确定 $n(3,k)$ 的一个下界．

16. 求证：$n(3,4)=9$.

为解练习11，我们注意，任一顶点的邻接点构成一个独立顶点集．因此，图不含三角形．每个顶点不邻接于另外 4 个顶点，而在此 4 顶点中又有两对顶点是邻接的．所以，此图的 iv_{max} 的值是 3.

在图 159 上有 8 个顶点的图既没有三角形也没有 4 独立顶点的集；因此，对练习12，$n(3,4)\geqq 9$.

在问题13所指的那些人中间，若有人见到其余的 8 人，则据 (a)，此 8 人中有两人也互相见过面；但此关系矛盾于 (b)．由此，在那天，没有人能在图书馆内见到多于 7 人．

同样的推理可以用来推广问题 13，分别以 k 与 $k+1$ 替换 7 与 8．若一个图的顶点对应于人，两顶点邻接当且仅当对应的人互相见过面．所得的简单图有下列两性质：据 (a)，G 中无 $k+1$ 个独立顶点，即对于 G，$iv_{max}\leqq k$ 成立．又据 (b)，G 不含三角形．我们必须证明 G 中无次数大于 k 的顶点．因为 G 不含三角形，G 的任一顶点所邻接的顶点构成一独立点集（也可参看练习 11 的解），所以同一推理表明，G 中不能有次数大于 iv_{max} 的顶点．

于是，得到下列命题，以后将经常使用它：

17. 若一简单图不含三角形，则对于它的任一顶点 p 有：

$$\varphi(p)\leqq iv_{max}.$$

让我们考虑问题 14 的图．H_1 是联结两顶点的一条边，H_2 是

五边形(见图 16 中左侧的图)，H_3 如图 159 所示. 以 h 表示圆K的内接正三角形的边长. 若K中一弦其长大于h,则对应的弧长大于圆周的三分之一. 因此，K内的任何三角形至少含有一边其长不大于h. 所以,没有图 H_k 含有三角形.

设

$$a_1, a_2, \cdots, a_{3k-1}, a_{3k}=a_1$$

是H_k 的顶点，按此顺序置于圆周K上. 图的对称性表明,每个顶点出现于一个合适的极大独立顶点集中. 一个含有顶点a_1 的极大独立顶点集中有多少个顶点? 容易验证,顶点 $a_{k+1}, a_{k+2}, \cdots, a_{2k}$ 邻接于 a_1 (对于 $k=3$ 参看图 159). 因此，下列顶点不与 a_1 邻接:

$$\begin{array}{lll} a_2, & a_3, \cdots, & a_k, \\ a_{2k+1}, & a_{2k+2}, \cdots, & a_{3k-1}. \end{array}$$

同一行的顶点是独立的. 同一列的一对顶点是邻接的，因为它们之间的距离都等于 a_1 与 a_{2k} 间的距离， 所以,顶点 $a_1, a_2, \cdots, a_k$构成 H_k 的一极大独立顶点集,从而,对于 H_k,有 $iv_{max}=k$.

我们已经发现具有 $3k-1$ 个顶点的图 H_k 既不含具有 3 个顶点的完全图,也不含$(k+1)$独立顶点集. 因此,$n(3, k+1)\geqq 3k$.若我们以 $k-1$ 替换 k, 问题 **15** 即得解:

18. 对任一自然数 k, 有

$$n(3, k)\geqq 3(k-1).$$

于是，对于问题 **16**, 我们只需证明，任一具有 9 个顶点的红-蓝完全图含有一红三角形或一个 4 顶点的蓝完全图. 以T表示一个 9 顶点的红-蓝完全图，p是T的一顶点. 关联于p的全部的 8 条边,有蓝的,也有红的，其中至少有 4 条是同色的. 不妨假定此共同的颜色是红色(见命题 **9**). 设T' 是 T 的子图，由此 4 红边的异于 p 的端点所导出. 若 T' 有红边,则有一以 p 为顶点的红三角形，又若 T' 的全部的边是蓝的,则它恰是一个含于T 中的 4 顶

点的蓝完全图．于是，问题 16 得解．

现在，我们考虑三个 8 顶点的图，如图 160 所示．可以发现，G_2 与 G_3 是分别从 G_1 添 1 与 2 条边得来的．可以证明 G_3 同构于图 159 中的图．但也能直接地证明 G_3 不含三角形，因而，G_1 与 G_2 也如此．能保证 G_1 不含 4 独立顶点集；因此，G_2 与 G_3 也如此．因此，全部此三图有 $n(3, 4)-1=8$ 个顶点，都是极图，还可以证明不存在别的极图．证明较长，从略．

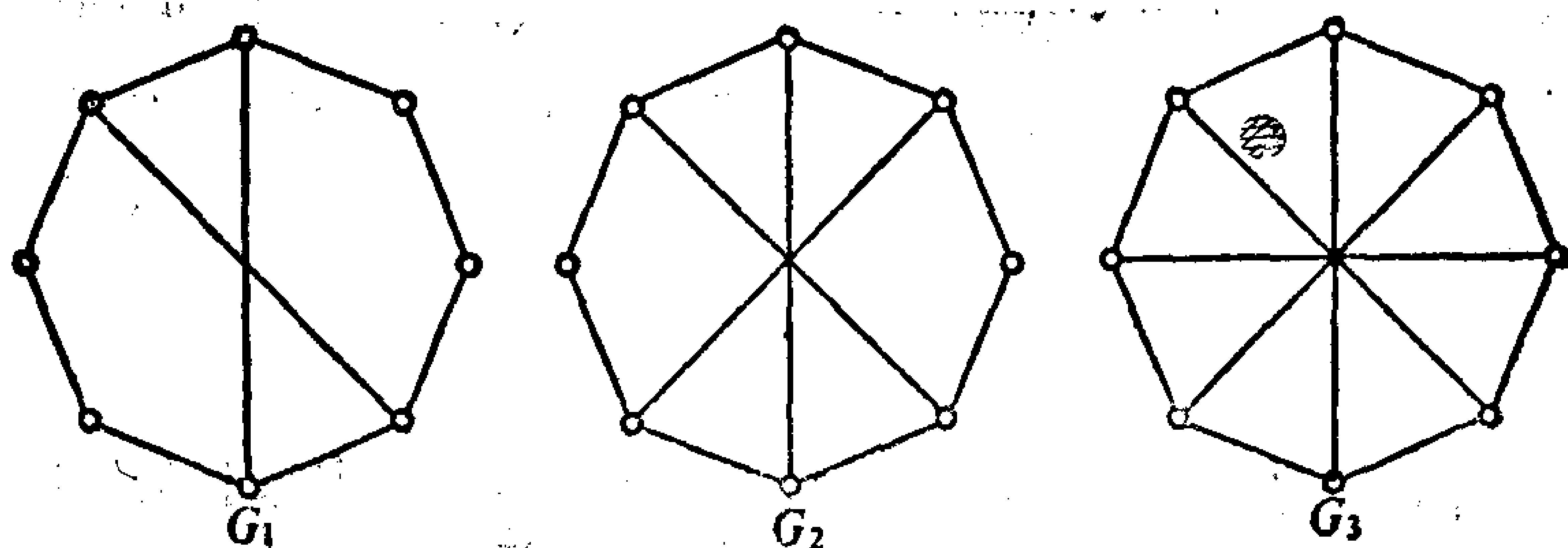


图 160

现在，我们来证明数 $n(m, k)$ 是存在的．我们已经知道 $n(3, 4)=9$，$n(2, 4)=4$ 及 $n(3, 3)=6$．因此，

$$n(3, 4)<n(2, 4)+n(3, 3).$$

我们来证明有如下列两命题所述的此不等式的推广：

19. 若数 $n(m-1, k)$ 及 $n(m, k-1)$ 存在，则 $n(m, k)$ 也存在，且

$$n(m, k) \leq n(m-1, k)+n(m, k-1).$$

20. 若 $n(m-1, k)=2p$ 及 $n(m, k-1)=2q$（其中 p 与 q 是自然数）则

$$n(m, k)<2p+2q.$$

为证命题 19，假定数 $n(m-1, k)$，$n(m, k-1)$ 是存在的，我们以 T 表示具有 $n(m-1, k)+n(m, k-1)$ 个顶点的任一红-蓝完全图．我们必须证明，T 或者含有一个 m 个顶点的红完全图，或者含

有一个 k 个顶点的蓝完全图.

以 r 表示 T 的任一顶点,让我们考虑关联于 r 的红边与蓝边.这些红边与蓝边的另一端点(异于 r 的)分别构成集合 P_1 与 P_2. 设 n_1 个顶点的 T_1 与 n_2 个顶点的 T_2 分别是由 P_1 与 P_2 导出的 T 的子图. 则

$$n_1+n_2+1=n(m-1,k)+n(m,k-1).$$

我们先假定 $n_1<n(m-1,k)$. 在此情况下, $n_2\geqslant n(m,k-1)$,所以, T_2 含有因而 T 也含有 m 个顶点的红完全图,也含有 $k-1$ 个顶点的蓝完全图. 在后一情况下,此蓝图,与 r 及某些蓝边一起构成含于 T 中的一个 k 顶点蓝完全图.

若 $n_1\geqslant n(m-1,k)$,则类似地(以 T_1 替换 T_2)可知 T 或者含一 m 个顶点的红完全图,或者含一 k 个顶点的蓝完全图. 由此,命题 19 得证.

为证命题 20, 以 T 表示具有 $2p+2q-1$ 个顶点的红-蓝完全图. 必须证 T 或者含有一 m 个顶点的红完全图或者含有一 k 个顶点的蓝完全图. 设 r 是 T 的一顶点. 则

$$\varphi(r)=2p+2q-2$$

并且,下列三命题之一成立:

(a) 至少有 $2p$ 条红边关联于 r.

(b) 至少有 $2q$ 条蓝边关联于 r.

(c) r 恰关联于 $2p-1$ 条红边及 $2q-1$ 条蓝边.

在情况(a),我们考虑关联于 r 的红边, 它们的另一端点构成一集合 P_1. 以 T_1 表示由 P_1 导出的 T 的子图. T_1 的顶点数至少为 $n(m-1,k)$. 所以, T_1 或者含有一 $m-1$ 个顶点的红完全图,或者含有一 k 个顶点的蓝完全图. 因此, 类似刚才给出的推理可知 T 或者含有一 m 个顶点的红完全图, 或者含有一 k 个顶点的蓝完全图.

在情况(b)，推理相同，只需考虑关联于r的蓝边的另外的端点.

若(c)对于T的每个顶点都正确，则T的红子图的每个顶点的次数将是$2p-1$(即奇数)；但据1.9，这是一个矛盾，因为红子图有奇数个顶点. 因此，由顶点r的一个适当的选择，(a)或(b)成立，命题20得证.

借助于命题19，我们现在可以来证数$n(m,k)$的存在性了，我们还将找到这些数的一个上界. 首先，将证关于命题的一般化的一个命题；把它应用于我们的特殊问题即导出所求证的命题. 一般的命题如下：

21. 设$A(m,k)$表示对于每个自然数m与k的一个命题. 让我们假定$A(1,k)$及$A(m,1)$，对于任意的自然数k与m成立，又假定，对于$m>1$与$k>1$，命题$A(m,k)$的成立可由命题$A(m-1,k)$与$A(m,k-1)$的成立而推出. 在此情况下，$A(m,k)$对于每个m与k成立.

此命题将对m用归纳法证明. 假定$A(1,k)$对任何k成立. 让我们假设$A(m,k)$对某一m及任一k成立. 我们需证$A(m+1,k)$也对任何一k成立. 这后一命题将对k用归纳法证明.

我们知道$A(m+1,1)$与$A(m,1)$同样地成立. 我们假设$A(m+1,k)$对m与某k成立，需证$A(m+1,k+1)$成立(由此，将证得$A(m+1,k)$对一切k成立). 由于，据第一个假设，$A(m,k)$对m及一切k成立，则$A(m,k+1)$及$A(m+1,k)$对于由第二假设规定的k都是成立的. 于是，据命题21的条件知道$A(m+1,k+1)$成立，从而命题21得证.

若命题$A(m,k)$是存在数$n(m,k)$，则命题21的条件被命题19加上命题10的第一部分所满足. 于是，我们得到

22. 对一切m与k的值，数$n(m,k)$存在.

现在命题 $A(m,k)$ 是

$$n(m,k)\leqq\binom{m+k-2}{m-1}.$$

我们考察命题 **21** 的条件在此情况下是否得到满足．当 $m=1$ 或 $k=1$ 时，不等式的右边等于 1．因此，据命题 **10** 的第一部分，$A(1,k)$ 与 $A(m,1)$ 对一切 k 与 m 成立．现在，让我们假定 $A(m-1,k)$ 与 $A(m,k-1)$ 对于某个大于 1 的 k 与 m 成立，即，

$$n(m-1,k)\leqq\binom{m+k-3}{m-2}\quad 与\quad n(m,k-1)\leqq\binom{m+k-3}{m-1}.$$

应用练习 **8** 的不等式

$$\begin{aligned}n(m,k)&\leqq n(m-1,k)+n(m,k-1)\\&\leqq\binom{m+k-3}{m-2}+\binom{m+k-3}{m-1}=\binom{m+k-2}{m-1}\end{aligned}$$

据命题 **19** 而得出．这表明 $A(m,k)$ 是成立的．

因此，$A(m,k)$ 的意义说明命题 **21** 的条件得到满足，而下列命题成立：

23. 对于一切自然数 m 与 k，有

$$n(m,k)\leqq\binom{m+k-2}{m-1}.$$

此命题产生了 $n(3,k)$ 的上界

$$\binom{k+1}{2}=\frac{(k+1)k}{2}.$$

若 $k\geqq4$，则一个"稍好的"，即较小的上界，对于数 $n(3,k)$，也能给出；将证明下列命题：

24. 对于任一自然数 k

$$n(3,k)\leqq\binom{k+1}{2}-\left[\frac{k}{2}\right]+1.$$

此命题将对k归纳地证明，若$k=1,2$或3，结论可由命题23推得．让我们假设对于一个k的大于1的值，下列关系成立：

$$n(3,k-1)\leqq\binom{k}{2}-\left[\frac{k-1}{2}\right]+1.$$

我们需证，若一个简单图的顶点数为

$$n=\binom{k+1}{2}-\left[\frac{k}{2}\right]+1,$$

不含三角形，则它含一k独立顶点集．为了直接加以证明，我们假设，对于一具有n个顶点的简单图G，不含任何三角形，$iv_{\max}\leqq k-1$．命题17表明，对于G的每个顶点p，

$$\varphi(p)\leqq k-1.$$

我们先假定k是偶数：$k=2s$．若每个顶点的次数是$k-1$，则由1.9 n必定是偶数，但

$$n=\binom{2s+1}{2}-\left[\frac{2s}{2}\right]+1=\frac{(2s+1)(2s)}{2}-s+1$$

$$=2s^2+1,$$

即，n是奇数．所以，G内存在一顶点q，使得

$$\varphi(q)\leqq k-2.$$

我们考虑G的那么一些顶点，它们既不邻接于q，也不恒同于q．以G_0表示由这些顶点导出的子图．G_0的顶点数（它不含三角形）至少是

$$n-(k-2)-1=n-k+1=\binom{k+1}{2}-\left[\frac{k}{2}\right]+1-k+1$$

$$=\left[\binom{k+1}{2}-\binom{k}{1}\right]-\left(\left[\frac{k}{2}\right]-1\right)+1=\binom{k}{2}-\left[\frac{k-1}{2}\right]+1,$$

这里应用了练习8的等式．因此，由假设，G_0中存在一$k-1$独立顶点集．这些顶点与q一起构成G中一k独立顶点集，这是一个

矛盾.

现在,让我们假设 k 是奇数. G_0 的定义类似,我们考虑以一次数至多为 $k-1$ 的顶点去替换顶点 q. G_0 的顶点数将至少有

$$n-(k-1)-1=\binom{k+1}{2}-\left[\frac{k}{2}\right]+1-k=\left[\binom{k+1}{2}-\binom{k}{1}\right]$$

$$-\left[\frac{k}{2}\right]+1=\binom{k}{2}-\left[\frac{k-1}{2}\right]+1.$$

同样的推理再一次地产生一个矛盾.

于是,命题 24 得证.

如前所述,数 $n(m, k)$ 的准确值几乎全然未知, 仅对于少数几对 m 与 k, $n(m, k)$ 的值是知道的. 例如,除了前面已经指出的以外, $n(3, 5)=14$, 见问题 97; $n(3, 6)=18$ 及 $n(4, 4)=18$.

我们来考虑数 $n(m, k)$ 定义中的(3). 可以把问题推广如下:让我们把完全图的边染以 s 种颜色(替换 2 种颜色), 再确定最小整数 $n(m_1, m_2, \cdots, m_s)$, 使得在给一个 $n(m_1, m_2, \cdots, m_s)$ 顶点的完全图的边染了色以后,它将或是包含一个 m_1 顶点的完全图仅含第一色的边, 或是包含一个 m_2 顶点的完全图仅含第二色的边, $\cdots$, 或是包含一个 m_s 顶点的完全图仅含第 s 色的边. 在此,将不考虑这个更一般的问题,但我们可以指出, 除了已给出的以外, 例如, $n(3, 3, 3)=17$, 仅少量的数 $n(m_1, m_2, \cdots, m_s)$ 是确知的.

问　　题

25. 有向图 $\vec{G}$ 不含有向回路. 以 A_0 表示 $\vec{G}$ 中这样的顶点 p 的集合, 这里,

$$\varphi_{\text{in}}(p)=0.$$

以 A_i 表示这样的顶点的集合($i=1, 2, \cdots$), 这种顶点可由 A_0 的一

顶点被一长为 i 的有向路(即,沿一有 i 条边的路)所到达,但不能被一更长的路所到达. 求证:

a) $\vec{G}$ 的任一顶点含于某 A_i.

b) 含有 $\vec{G}$ 中任一指定边的尾的顶点集的下标小于含此边的头的集的下标.

26. 以 $f_s(n)$ 表示具有下述性质的最大整数:若一 n 顶点的完全图的边以任意的方式被染以 s 种颜色, 则总能找到一至少有 $f_s(n)$ 个顶点,且有同色的边的连通子图. 求证对任一自然数 n,

$$f_2(n)=n.$$

27. 求证对任一正偶数n,

$$f_{n-1}(n)=2.$$

要证问题 25 的命题(a),只需证,若考虑$\vec{G}$ 的一顶点q,它不在 A_0 内,则从 A_0 的一顶点以一有向路能到达它(在证这一点时,也就推出 A_0 中存在某顶点),因为 q 的位置将被最长的路之一所确定. 由于 q 不在A_0内, q 是 $\vec{G}$ 的一边的头. 因而 q 能从 $\vec{G}$ 的某顶点沿一有向路到达. 以$\vec{L}$ 表示以 q 为终点的最长路之一. 对于 $\vec{L}$ 的始点r, $\varphi_{\text{in}}(r)=0$, 因为不然,$\vec{G}$就有一有向边(s, r). 但在此情况下,要么 s 是 $\vec{L}$的一个顶点,从而 $\vec{G}$ 将含有一有向回路,要么 s 不含于 $\vec{L}$, 而把边(s, r)添加到 $\vec{L}$ 上,便矛盾于 $\vec{L}$ 的极大性. 由于 r 的入次数必为 0, r 在 A_0内,问题 25 的命题(a)因而得证.

为证命题(b), 以(p_i, p_j)表示 $\vec{G}$ 的一边,使得 p_i 与 p_j 分别属于 A_i 与 A_j. 若 $i=0$, 则有$j>i$,因为 p_j 是边(p_i, p_j)的头,不能属于 A_0. 所以,我们假定 $i\neq0$. 于是,p_i 可由 A_0的一顶点沿一长为 i 的路 $\vec{L}$ 所到达. 顶点p_j不能属于 $\vec{L}$,否则 $\vec{G}$ 就含有一有向回路. 把边(p_i, p_j)联结到 $\vec{L}$ 上表明 p_j 能从 A_0 的一顶点沿一长度大于 i 的路所到达,这表明 $j>i$,命题(b)得证.

不含有向回路的有向图 $\vec{G}$ 的结构能被集合 $A_0, A_1, \cdots$（例如，见图 161）清楚地表出. 问题25 的解表明 $\vec{G}$ 的每个集合 A_i 是一独立顶点集. 另一方面，若 k 是集合 A_i 的个数（即 $k-1$ 是 A_i 的最大下标），则 $k-1$ 是 $\vec{G}$ 中最长有向路的长度. 因此，若 $\vec{G}$ 不含 m 独立顶点集，则每个集合 A_i 至多含 $m-1$ 个顶点，而 $\vec{G}$ 至多含有 $(m-1)k$ 个顶点，由此，下列命题得证：

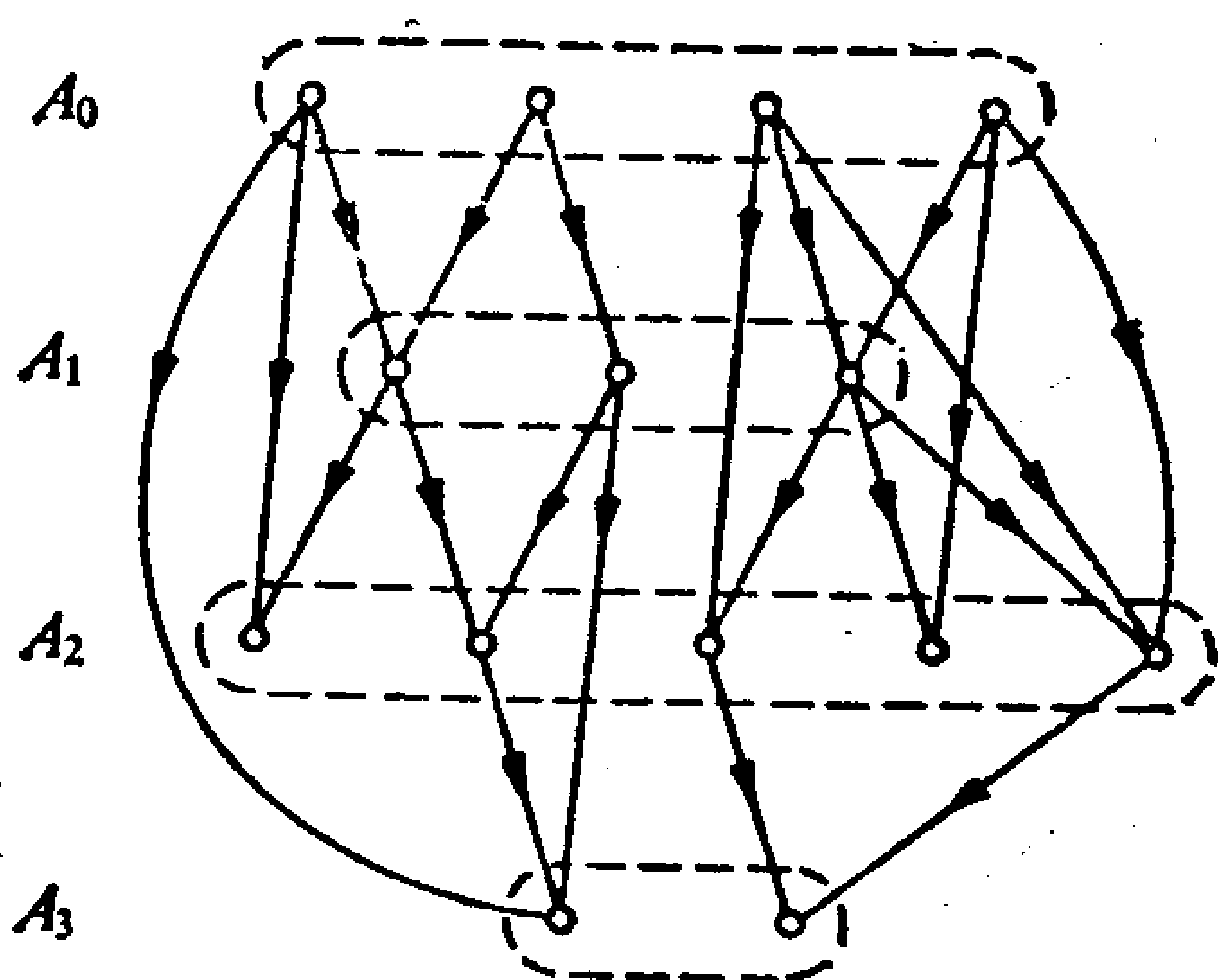


图 161

28. 若 m 与 k 都是自然数，图 G 至少有 $(m-1)k+1$ 个顶点则 G 或者含一 m 独立顶点集，或者有下述性质：若给 G 的边以一任意的定向，使得有向图不含有向回路，则它有一长为 k 的有向路.

注意：

1. 对于 k 及 m 的每个值下列的图 $\vec{G}_0$ 是此问题的一个可能的极图：G_0 有 $m-1$ 个分支，其中每个分支都是 k 顶点的完全图. 每个分支恰有一个顶点是“鸽笼”，从每个集合 A_i 的顶点中间，以所述方式给边以一定向，以便构成图 $\vec{G}_0$.

2. 可以发现，在数论中有命题 28 的一个有趣的应用. 让 $\vec{G}$ 的顶点对应于整数，以有向边 (a, b) 表示对应于 b 的数能被对应于 a 的数所整除. 因此，G 的任一独立顶点集表明每个对应的数不能整除其余的任一数. 另一方面，若 $\vec{G}$ 的一有向路 $\vec{L}$ 依次含顶点

$a_1, a_2, \cdots, a_k$，则 a_{i+1} 能被 a_i 所整除．（$i=1, 2, \cdots, k-1$）．显然，$\vec{G}$ 不能有一有向圈路．因此，据命题28知道：所考虑的任$(m-1)k+1$个不同的整数中，或者存在一个含m个整数的集合，使其中没有一个数能整除其余的$m-1$数个之任一个，或者存在一个含$k+1$个整数的序列使其中的任一数能被前一个数所整除．若m与k为已知，可给出一个可能的极图（参看注意1）如下：设 A_0 的顶点对应于$m-1$个不同的素数，同时，集$A_1, A_2, \cdots, A_{k-1}$ 分别由这些素数的2次幂、3 次幂，…，k 次幂所构成．于是，有了$(m-1)k$ 个整数，对应于命题 28 的命题不成立．

现在我们考虑任一具有 n 个顶点的红-蓝完全图 G．把包含G的全部顶点以及每一条红边的子图叫做红图，则它的补图是也有n个顶点的蓝图．据 1.42，此两图之一是连通的．问题 26 得解．

注意： 此命题使人联想到拉姆舍数 $n(m, k)$问题，因为，要么此图，要么它的补图必有一指定的性质．在此意义下，命题28也可以说是"拉姆舍型"的，因为G含一个m独立顶点集能换成下列要求：G的补图含一个m顶点的完全子图．

为解问题27，我们先注意对于一切$n\geqq 2, f_{n-1}(n)\geqq 2$，而另一方面，据 5.1，若 n 是偶数，n 顶点的完全图能分解为 $n-1$ 个 1-因子．让我们考虑这样的一个分解，把同一个1-因子的边染以同一色．但不同的 1-因子的边，染以不同的色．使用了 $n-1$ 种颜色，同色的边是独立的．因此，若 n 是偶数，$f_{n-1}(n)\leqq 2$，问题 27 得解．

现在我们考虑 $f_s(n)$，s 是奇数．以 $a_1, a_2, \cdots, a_{s+1}$ 表示 $s+1$ 顶点的完全图之顶点．我们按所述的方式用 s 种颜色给图的边染上色（在分解为1-因子之后）．若 n 是任一大于 s 的自然数，则n顶点的完全图将含有 s 色，有如下述：让我们以$s+1$去除n，以 h 及m分别表示商与余数，则

$$n=(s+1)h+m \qquad (0\leqq m<s+1).$$

现在我们把 $s+1$ 顶点的完全图之顶点删去，在它们的位置上放上以任意方式染好合用的色的完全图，特别地，每个 $h+1$ 顶点的完全图须去替换 m 个删去的顶点，每个 h 顶点的完全图须去替换其余的 $s+1-m$ 个顶点．以 G_i 表示替换了顶点 a_i 的完全图．然后，G_i 的每个顶点以一条边联结到 G_j 的每个顶点．且这些新边必与 $\{a_i, a_j\}$ 有同一的颜色．因此，得一 n 顶点的完全图，染有 s 种颜色．图 162 及 163 分别地说明此过程，当 $s=3$，且 m 等于 0 或 1 或3，或 m 等于2，每一双圈表示一个任意的着了色的完全图，它含有圈内数字一样多的顶点．联结两双圈的一线表示一边集（在每个集合内有同色的 h^2，或 $h(h+1)$ 或 $(h+1)^2$ 条边），按三种颜色它们被表示为粗，细或虚线．

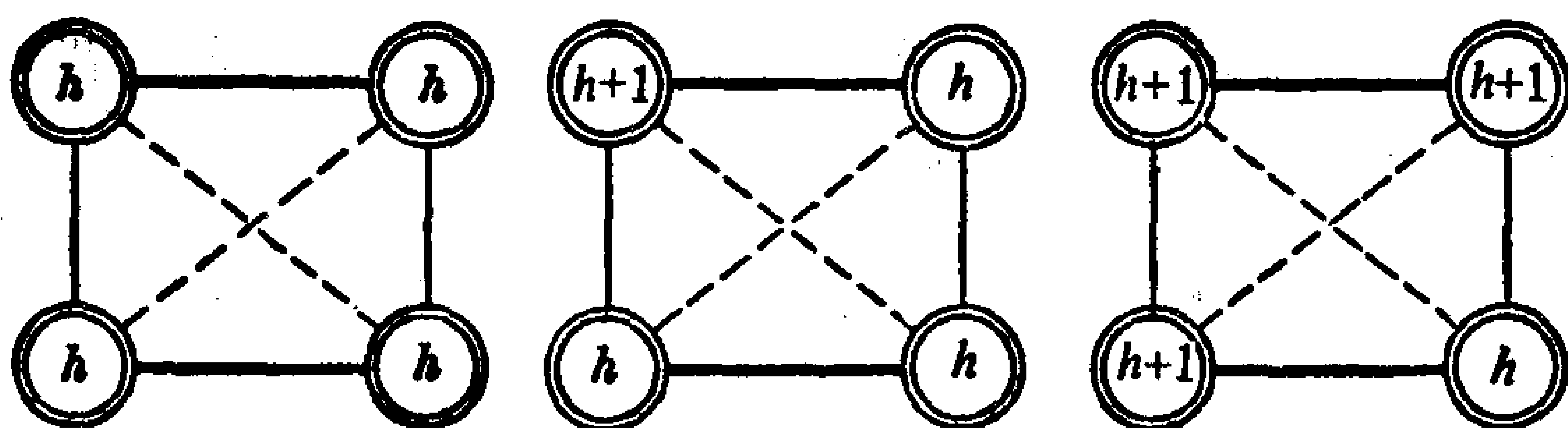


图 162

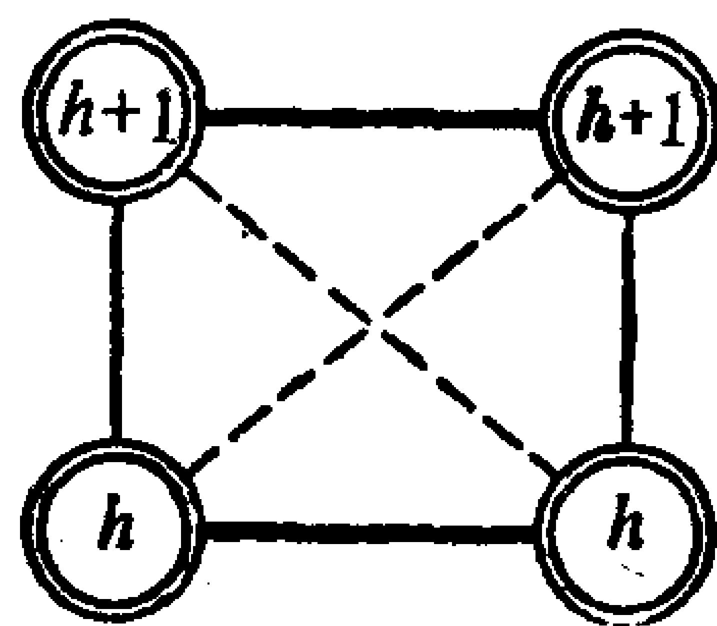


图 163

对于任意的数 i 与 j，G_j 的每个顶点可以从 G_i 的每个顶点沿一路所到达，此路的每条边把 G_j 的一顶点联结到 G_i 的一顶点．因此，全部这些边是同一色的．另一方面，若 G_k 与 G_i 及 G_j 都不同，则无论 G_i 或 G_j 的顶点都不能以此色的边与 G_k 的顶点联结．但 G_i 及 G_j 的顶点数一起至多为

$$2h=\frac{2n}{s+1}, \qquad \text{若 } m=0,$$

$$2h+1=\frac{2n}{s+1}+\frac{s-1}{s+1}, \quad 若\ m=1, 且$$

$$2h+2=\frac{2n}{s+1}+2-\frac{2m}{s+1}, 其它.$$

于是，得到下列命题:

29. 若 s 是一正奇数，h 与 n 是自然数，且 $n=(s+1)h+m$ $(0\leqq m<s+1)$ 则

$$f_s(n)\leqq\frac{2n}{s+1}, \quad 若\ m=0,$$

$$f_s(n)\leqq\frac{2n}{s+1}+\frac{s-1}{s+1}, \quad 若\ m=1, 且$$

$$f_s(n)\leqq\frac{2n}{s+1}+2-\frac{2m}{s+1}, 其它.$$

现在，我们只注意 $s=3$ 时的情形，同时 n 的值是变化的。若 $n=4h+m(m=0, 1, 2, 3)$ 则，据命题 **29**,

$$f_3(n)\leqq\left[\frac{n+1}{2}\right], \quad 若\ m=0, 1\ 或\ 3, 且$$

$$f_3(n)\leqq\frac{n}{2}+1, \quad 若\ m=2.$$

现在，我们证明下列不等式也成立:

(1) $f_3(n)\geqq\left[\frac{n+1}{2}\right]$, 若 $m=0, 1$ 或 3, 且

(2) $f_3(n)\geqq\frac{n}{2}+1=\left[\frac{n+1}{2}\right]+1$, 若 $m=2$.

让我们给 n 顶点的完全图 G 的边染色，用红，蓝及绿等三色. 只需证，在 G 的红、蓝或绿的连通子图中，存在一个子图，于情况(1)，至少有 $n/2$ 个顶点，而情况(2)至少有 $n/2+1$ 个顶点.

现在，我们考虑 G 的红，蓝与绿的连通子图，并按每一色选取一有极大顶点数的子图.（称这些子图是I型极大的.）以 G_r 表示此三图中有极大顶点数(II 型极大的)的一个，以 n_r 表示 G_r 的顶

点数．不失一般性，可假定子图 G_r 是红的．因为，若$n\geqq 2$，$n\geqq n/2+1$，总能假定有关系 $1\leqq n_r<n$．G_r 的 I 型极大性表明，若一条边把 G_r 的一顶点联结于不在 G_r 内的一顶点，则该边的色是蓝的或绿的．以 a 表示不在 G_r 内的一顶点．a 关联于 G_r 的所有 n_r 个顶点．所有这些边或者是绿的或者是蓝的；可以假定这些边中至少有 $n_r/2$ 条边，比如说，是蓝的．以 R 表示 G_r 的顶点中由蓝边关联于 a 的顶点的集合．所以，R 的顶点数 q 至少为 $n_r/2$．以 G_b 表示包含顶点 a 及一极大数目的顶点的连通蓝子图之一（在其余的顶点中，它包含 R 的全部的顶点），以n_b 记 G_b 的顶点数．我们可以假定存在 G 的一顶点 g，它既不属于 G_r 也不属于 G_b，不然，G_b 就会含有多于 $n/2$ 个的顶点(因为，这将包含全部的不在 G_r 内的顶点以及 G_r 的至少一半的顶点)．G_r 的 I 型极大性及 G_b 的极大性表明把R的顶点联结到 g 的边全是绿的．以 G_g 表示一个按顶点数为极大的，含顶点 g 的(以及，由极大性条件，R的全部的顶点)，G 的连通绿子图．以 n_g 表示 G_g 的顶点数．G_r 的 I 型的极大性以及 G_b 与 G_g 的极大性，以及 R 包含于它们之中的事实表明，若 G 的一顶点不含于它们中的任一者，则把此顶点联结到R的任顶点的一边不能是红的，蓝或绿的．因此，此三图一起包含了 G 的全部的顶点．由于它们都包含集 R：

$$n\leqq n_r+n_b+n_g-2q.$$

若存在一顶点，它不含于R但含于这些图中的两个，则等式不能成立．因为 $q\geqq n_r/2$．

$$n_r+n_b+n_g-2q\leqq n_r+n_b+n_g-2\frac{n_r}{2}=n_b+n_g.$$

因此，

$$n\leqq n_b+n_g,$$

仅当G的不在R内的任顶点，恰含于三子图之一，并且若 $q=n_r/2$，

即 n_r 是偶数时，等式成立.

最后的不等式表明至少量 n_b 与 n_g 之一至少为 $n/2$. 这就证得了命题的情况(1).

命题的情况(2)将同样地得证，若 n_b 或 n_r 大于 $n/2$. 若在最后的一个不等式中等号不成立则此关系为真. 因此，我们只需注意 $n=n_b+n_g$ 时的情况，且量 n_b 及 n_g 中无一大于 $n/2$, 即

$$n_b=n_g=n/2=\frac{4h+2}{2}=2h+1.$$

n_r 已被证明是偶数，但 G_r 的 II 型极大性表明 n_r 至少为 $2h+1$. 因此，

$$n_r \geq 2h+2=\frac{n}{2}+1.$$

把它与前述结果加以比较，我们得下列命题:

30. 若 n 与 h 是自然数且 $n=4h+m(m=0, 1, 2, 3)$ 则

$$f_3(n)=\left[\frac{n+1}{2}\right] \qquad \text{若 } m=0, 1 \text{ 或 } 3 \text{ 且}$$

$$f_3(n)=\frac{n}{2}+1=\left[\frac{n+1}{2}\right]+1 \quad \text{若 } m=2.$$

一个简单图是否含有 k 顶点的完全子图，对于拉姆舍数的问题至关重要. 我们将研究极小次数或极小边数；它表明了这些子图的存在性.

练　　习

31. 求证：对于任一自然数 n, 有

$$\left[\frac{n}{2}\right]\cdot\left[\frac{n+1}{2}\right]=\left[\frac{n^2}{4}\right].$$

问　题

32. 一个简单图具有$2k$个顶点($k\geqq 2$)且每个顶点的次数大于k. 求证图含有一个三角形. 找出此问题的极图.

33. 把n名局中人分为两组, 当且仅当两名局中人不在同一组内时对局(仅一回). 试确定最好的分组法以使赛局数为极大.

34. n顶点的简单图, 不含三角形, 若$iv_{\max}$的值是定值, 求出它的极大边数.

35. 对于一不含三角形的简单图的边数e, 证明

$$e\leqq cv_{\min}\times iv_{\max}.$$

试确定使等式成立的那些图.

36. 求解问题33的推广: 把n名局中人分成k组.

37. 我们假定m是前面问题中的数n除以k后的余数. 求证极大赛局数是

$$\frac{1}{2}(n^2-m^2)\frac{k-1}{k}+\binom{m}{2}.$$

练习31的等式, 当n为偶数时, 显然成立. 若$n=2k+1$, 则等式的两边都等于k^2+k.

问题32的命题, 可改述如下: 一简单图G有$2k$个顶点, 无三角形. 求证极小次数至多为k. 让我们假设G中顶点p的次数m是极小的, q邻接于p. q至少有m个邻接顶点, 但这些顶点不邻接于p, 因为G不含三角形. 所以, $2(m-1)+2=2m\leqq 2k$, 它证明了命题. 一个极图是$2k$顶点的简单图, 不含三角形, 其中极小次数是k. 让我们假定G_0是一极图. 存在G_0的一个次数为k的顶点a_1. 以$b_1, b_2, \cdots, b_k$表示邻接于a_1的顶点, 以B表示这些顶点的集合. 由于a_1是一有极小次数的顶点, $\varphi(b_1)\geqq k$. B是G_0的一独

立顶点集，因为在 G_0 内没有三角形．因此，没有一个 b_1 的邻接点在 B 内，所以 b_1 恰有 k 个邻接点，它们构成一集合 A．A 也是在 G_0 的 k 独立顶点集．显然，G_0 等价于双图 $G_0(A, B)$，其中，A 的所有顶点与 B 的所有顶点邻接．此图常表示为 $\langle k; k\rangle$，如图 164 所示．



图 164

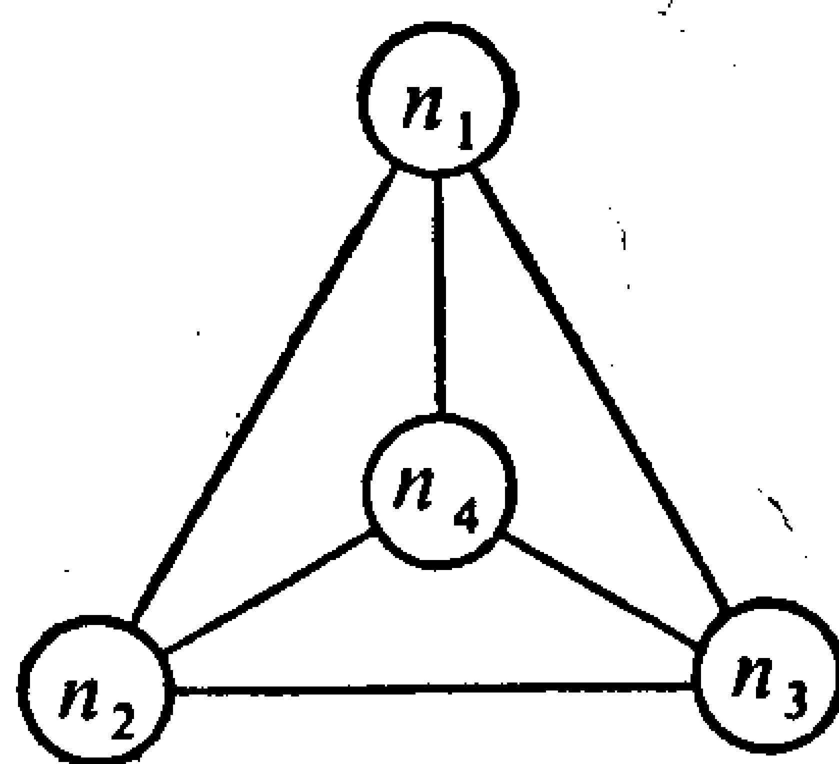


图 165

一般地，$\langle n_1, n_2, \cdots; n_m\rangle$ 表示具有下列性质的简单图：它的顶点集由两两不交的集合 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 所组成，这里，A_i 有 n_i 个顶点 $(i=1, 2, \cdots, m)$；每个集合 A_i 是独立顶点集，A_i 的每个顶点，对于全部不同的下标 i, j，邻接于 A_j 的全部的顶点．若以图形来表示此图，则每个集合 A_i 被画成一个小圈，它的顶点数 n_i 写在该圈内，每一对不同的圈以线联结．若一线联结表示集合 A_i 及 A_j 的两个圈，则此线对应于 $n_i\times n_j$ 条边．同样地，$\langle n_1\rangle$ 表示具有 n_1 个顶点而无边的图．$\langle 1, 1, \cdots, 1\rangle$ 表示具有 m 个顶点的完全图，这里 m 是数字"1"的个数．图 165 表示图 $\langle n_1, n_2, n_3, n_4\rangle$．

问题 32 考虑具有偶数个顶点的图．可用类似的方法证明，若一具有 $2k+1$ 个顶点的简单图，对任一整数 $k\geq 0$，不含三角形，则极小次数至多为 k．但全部极图的描述现在还颇为困难．让我们假定 G_1 是一极图．G_1 含有一次数为 k 的顶点 a_1．由于 G_1 不含三角形，a_1（或任何其他顶点）的邻接点构成一独立顶点集．以 F 表示 G_1 的一极大独立顶点集．以 f 记 F 的顶点数．以 L 表示不在 F 中的顶点的集合．l 表示 L 的顶点数．显然，$f\geq k$，但 $f\leq$

$k+1$ 同样也成立，因为 G_1 的任一顶点至少有 k 个邻接点. F 的任一顶点只邻接于 L 的顶点.

我们先假定 $f=k+1$. 在此情况下 $l=k$. 由于 k 是 G_1 中的极小次数，F 的每个顶点邻接于 L 的所有顶点. 因此，L 也是一独立顶点集，因为 G_1 没有三角形. 所以，G_1 是一个 $\langle k,\ k+1\rangle$ 型的图.

现在，我们假定 $f=k$. 此时，$l=k+1$. 让我们考虑 G_1 的由 L 导出的子图. 由于 F 是极大的，这个子图含有一边 $\{a, b\}$，它具有性质：a 与 b 都在 F 内有一邻接点，以 c 与 d 表示这些顶点，它们分别邻接于 a 与 b. 由于 G_1 没有三角形，c 与 d 是不同的顶点，c 不邻接于 b，d 不邻接于 a（见图 166）. 但 c 与 d 的次数都至少为 k，所以，c 邻接于 L 中除 b 外的全部的顶点，且类似地，d

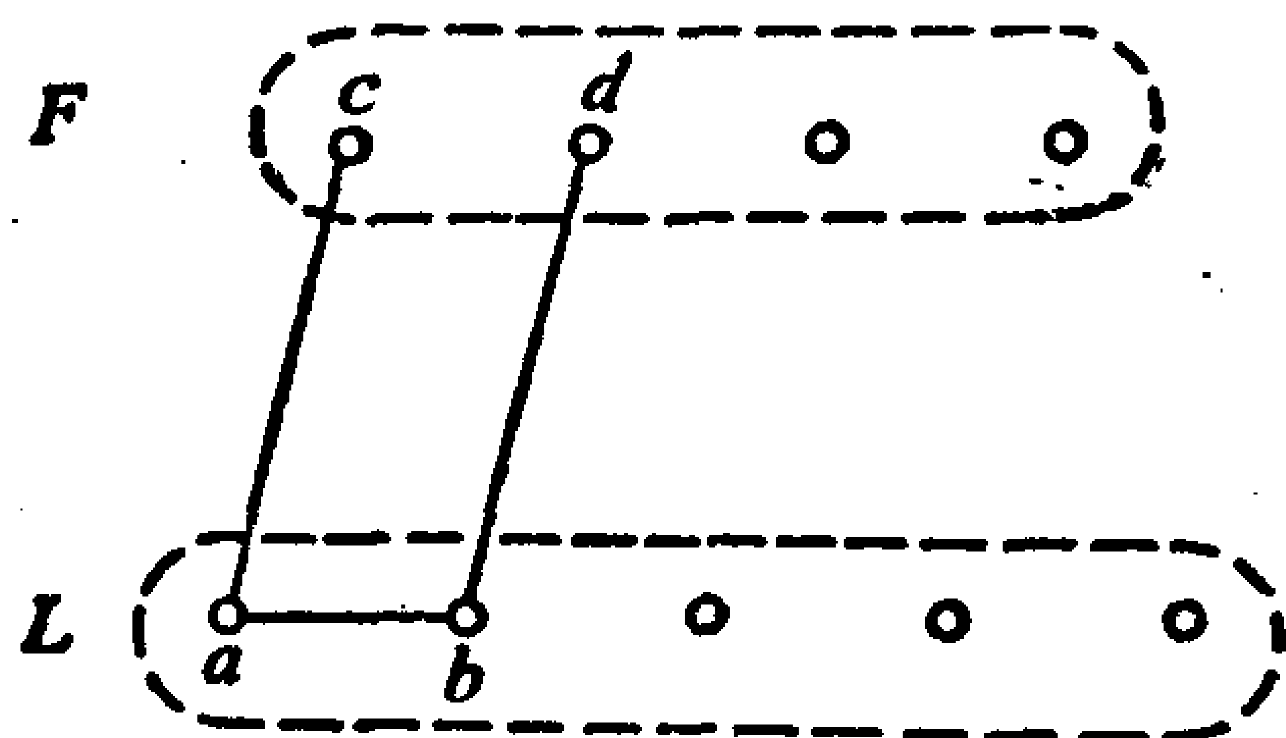


图 166

邻接于 L 的除 a 外的全部的顶点. 因此，a 是 L 中的 b 的唯一的邻接点，b 是 L 中的 a 的唯一的邻接点，这表明 a 与 b 在 F 内至少有 $k-1$ 个邻点. 因为，他们不能邻接于同一顶点，就有 $k-1+k-1\leqq k$，即 $k\leqq 2$. 由于顶点 c 及 d 存在，$k=2$. 因此，L 中除顶点 a 与 b 外，多含了一个顶点，此顶点同时邻接于 c 与 d. 所以，G_1 是一个长为 5 的回路.

综合此结果，与问题 32 的解一起，我们得到下列命题：

38. 若 φ_0 是有 n 个顶点而不含三角形的简单图内的极小次

数，则

$$\varphi_0 \leqq \left[\frac{n}{2}\right].$$

极图(其中等式成立)是图$\left\langle\left[\frac{n}{2}\right], \left[\frac{n+1}{2}\right]\right\rangle$，若 $n=5$，还是长为 5 的回路，不存在别的极图.

我们注意，五边形是唯一的非双图的极图(见图 167 及 168).

把问题 **33** 的局中人分成两组，A_1 与 A_2，各自包含 n_1 与 n_2 个局中人. 赛局数是 $n_1 \times n_2$. 把一名局中人从 A_1 转移到 A_2. 则赛局数将是

$$(n_1-1)(n_2+1)=n_1n_2+n_1-n_2-1.$$

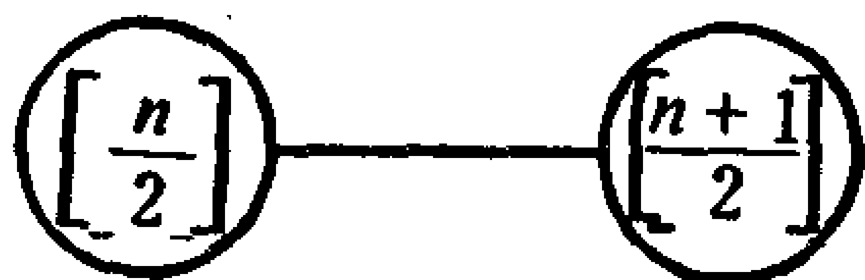


图 167

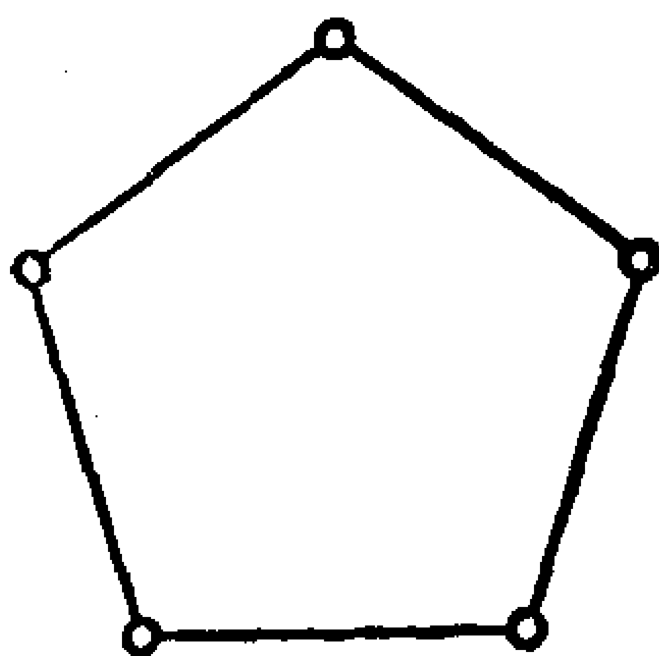


图 168

若 $n_1-n_2>1$，这数大于 n_1n_2，若 $n_1-n_2<1$，它小于 n_1n_2，又若 $n_1-n_2=1$，它等于 n_1n_2. 因此，只要两组中局中人人数间之差大于 1，从较大的组到较小的组转移一局中人便会增加赛局的数目. 若下列不等式成立，就得到极大赛局数:

$$|n_1-n_2| \leqq 1.$$

易见在两组间的人数差于下述情况下为极小: 若 n 是偶数，两组有相同的人数，若 n 是奇数，则两组之一多 1 人. 这表明，当两组的人数分别为$[n/2]$及$[(n+1)/2]$时，有可能的极大赛局数.

这问题的解也表明图 167 的图有全部 n 顶点的$\langle n_1, n_2\rangle$图的极大边数. 据练习 **31**，此图中的极大边数为$\left[\frac{n^2}{4}\right]$.

命题 17 及 1.8 立刻给出问题 34 的答案:

39. 若一简单图,有 n 个顶点及 e 条边,不含三角形,则

$$e\leqq\frac{n\times iv_{\max}}{2}.$$

为解问题 35,设 G 是不含三角形的简单图,以 F 表示 G 中一极大独立顶点集. 以 L 表示一不含于 F 的顶点的集合. 则 5.23 表明 L 是 G 的一极小覆盖顶点集. 因此,G 的任一边至少有一端点在 L 内. 于是,据命题 17 可知

$$e\leqq cv_{\min}\times iv_{\max}.$$

其中的等号成立,仅当 L 的每个顶点的次数是 $iv_{\max}$,且在求 L 的顶点的次数和时,每边只计算一次,即 L 是一独立顶点集. 因此,若 G 是

$$\langle cv_{\min}, iv_{\max}\rangle$$

型时,G 内的边数是极大的. 问题 33 的解的应用给出下列命题:

40. 若一简单图,有 n 个顶点与 e 条边,不含三角形,则

$$e\leqq\left[\frac{n^2}{4}\right].$$

唯一的极图(此时等式成立)是图 $\left\langle\left[\frac{n}{2}\right], \left[\frac{n+1}{2}\right]\right\rangle$. 不存在别的极图.

注意:

命题 38 中的不等式也可由此命题推出,因为,若所考虑的图的每个顶点的次数至少是 $[n/2]+1$,则它至少有 $\frac{1}{2}n\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)$ 条边,这是比 $\left[\frac{n^2}{4}\right]$ 更大的数.

现在,命题 40 被推广到一具有 k 个顶点的完全图以替换三角形的情形. 将应用到问题 36 与 37 的解,就象命题 17 的推广(见

稍后)一样.

问题 36 要求具有 n 个顶点及一极大边数的$\langle n_1, n_2, \cdots, n_k\rangle$图. 以 A_i 表示有 n_i 名局中人的组($i=1,2,\cdots,k$). 若一局中人 x 从组 A_i 转移到组 A_j. 则只是在两组间的赛局数将受到影响, 因为不在 A_i 或 A_j 中的任一局中人,仍需与 x 对局. 因此,若这样的两组存在,使其局中人人数间的差至少为2,问题33 的解表明赛局数会因一局中人的转移而有所增加. 于是, 若对于一切 i 及 j,

$$|n_i-n_j|\leqq 1,$$

得到可能的极大赛局数.

让我们以 k 去除 n,以 h 及 m 分别表示所得的商及余数,即

$$n=h\times k+m \quad 且 \quad 0\leqq m<k.$$

我们的命题是,若考虑的数 n_i,其中恰有 m 个等于 $h+1$,而其余的 $k-m$ 个数每个等于 h,能得到可能的极大赛局数. 即, 把局中人按最可能均匀的分布分成 k 组.

为证此命题, 我们假设对每个 i 及 j, $|n_i-n_j|\leqq 1$. 若存在少于 h 人的什么组,则其中没有含多于 h 人的组,但局中人数则将至多是 $h-1+(k-1)h$,它小于 n. 另一方面, 若一个组含有多于 $h+1$ 名的局中人,则没有一组其人数会小于 $h+1$, 但因此局中人人数至少为 $h+2+(k-1)(h+1)$,它大于 n.

最后,若 l 个数 n_i 每个都等于 $h+1$, 而其余 $k-l$ 个数等于 h,则

$$n=l(h+1)+(k-l)h=kh+l,$$

这表明 $l=m$.

因此, 便得到图内的极大边数 $e_{\max}$ (见问题 37), 若每个有 $h+1$ 个顶点的 m 个完全图及每个有 h 个顶点的 $k-m$ 个完全图的边数和,被从 n 个顶点的完全图的边数里减去. 于是,由于

$$h=\frac{n-m}{k},\quad h-1=\frac{n-m-k}{k}\text{及}\quad h+1=\frac{n-m+k}{k},$$

$$e_{\max}=\binom{n}{2}-m\binom{h+1}{2}-(k-m)\binom{h}{2}=$$

$$=\binom{n}{2}-\frac{m(h+1)h}{2}-\frac{(k-m)h(h-1)}{2}$$

$$=\binom{n}{2}-\frac{m(n-m+k)(n-m)}{2k^2}$$

$$-\frac{(k-m)(n-m)(n-m-k)}{2k^2}$$

$$=\binom{n}{2}-\frac{n-m}{2k^2}(m(n-m)+mk+kn-km-k^2-m(n-m)$$

$$+mk)$$

$$=\binom{n}{2}-\frac{n-m}{2k}(n-k+m)=\binom{n}{2}-\frac{n^2-m^2}{2k}+\frac{n-m}{2}$$

$$=\frac{n^2-n}{2}-\frac{n^2-m^2}{2k}+\frac{n-m}{2}-\frac{m^2}{2}+\frac{m^2}{2}$$

$$=\frac{n^2-m^2}{2}-\frac{n^2-m^2}{2k}+\frac{m^2-m}{2}=\frac{1}{2}(n^2-m^2)\frac{k-1}{k}+\binom{m}{2}.$$

事实上，此命题至此已经得证.

若在一个图$\langle n_1, n_2, \cdots, n_k\rangle$中，对一切 i 与 j，有$|n_i-n_j|\leqq 1$，则称此图为最可能均匀分布的.

下列命题也可据问题 36 与 37 而得证:

41. 对于任意的自然数 n 及 k，在 n 顶点的$\langle n_1, n_2, \cdots, n_k\rangle$图中最可能均匀分布的图有极大边数. 若 $n=h\times k+m(0\leqq m<k)$，则此极大边数是

$$\frac{1}{2}(n^2-m^2)\frac{k-1}{k}+\binom{m}{2}.$$

命题 17 可改述为：若一简单图 G 不含 3 顶点的完全图，m 是不含任一两顶点的完全图的导出子图的极大顶点数，则

$$\varphi(p)\leqq m$$

对于 G 的任一顶点 p 成立．因为一个图，不含 $k+1$ 顶点完全图，它的任何一个顶点的邻接点，不能导出一个子图，它含一 k 顶点完全图．命题 17 的下列推广也是成立的：

42. 我们假设简单图 G 不含 $k+1$ 顶点的完全子图．m 是不含 k 顶点完全图的 G 的导出子图的极大顶点数，则对于 G 的每个顶点 p，

$$\varphi(p)\leqq m.$$

现在来证上面提到的命题 40 的推广．

43. 具有 n 个顶点与 e 条边的简单图，不含 $k+1$ 顶点的完全图．若 $n=h\times k+m(0\leqq m<k)$，则

$$e\leqq\frac{1}{2}(n^2-m^2)\frac{k-1}{k}+\binom{m}{2}.$$

唯一的极图（其中等式成立）是最可能均匀分布的，具有 n 个顶点的 $\langle n_1, n_2, \cdots, n_k\rangle$ 型的图；不存在其它的极图．

我们先证构成 $\langle n_1, n_2, \cdots, n_k\rangle$ 的图不含 $k+1$ 顶点的完全子图．按鸽笼原理，象这样的一个图之任何 $k+1$ 个顶点中间，必存在同一个 n_i 独立顶点集中的两顶点，但此两顶点不邻接．

命题 41 表明，要证命题 43，只需证下列命题：对任意的自然数 n 及 k，

(*)若具有 n 个顶点的无 $k+1$ 顶点的完全子图的图 G，有一

极大边数（即，若它是我们问题的一极图），则G是一n顶点的$\langle n_1, n_2, \cdots, n_k\rangle$型的图.

此命题可对k用归纳法证明. 当$k=1$时，对于n的每个值，显然，(*)是成立的（当$k=2$时，可由命题**40**推出）.

设k是一固定的整数，大于1，假定对于$k-1$及对于n的每个值，(*)成立. 我们将证明具有n个顶点并有极大边数的简单图G，它不含$k+1$顶点的完全子图时，必为一个$\langle n_1, n_2, \cdots, n_k\rangle$型的图. 让我们考虑$G$的那些导出子图，它们不含$k$顶点的完全子图. 以$G_0$表示有一极大顶点数的这些子图之一. 以$n_0$表示$G_0$的顶点数，并设$A$是不在$G_0$内的顶点的集合，我们将证明，$G$与$G_0$的极大性可推出：

(1) 在那些具有n_0个顶点的不含具有k个顶点完全图的简单图中，G_0有一极大边数，即G_0是极图.

(2) A的每个顶点与G_0的每个顶点在G内是邻接的，且A是G内的一独立顶点集.

由假设，据(1)，G_0是一$\langle n_1, n_2, \cdots, n_{k-1}\rangle$型的图. 因此，若$A$中的顶点数$n-n_0$以$n_k$表示，则(2)表明$G$是一$\langle n_1, n_2, \cdots, n_k\rangle$的图.

(1)与(2)能以下列方式得证：以e_0记G_0的边数，以e_1记G中至少有一端点在A中的那些边数. 显见，G恰有

$$e_0+e_1$$

条边. G内A的每个顶点的次数至多为n_0，据命题**42**，于是，

$$e_1 \leqq (n-n_0)n_0.$$

应用问题**35**的解的推理，我们得到在情况(2)下，

$$e_1=(n-n_0)n_0.$$

以A_0表示G_0的顶点集. 一个简单图G^*定义如下：G^*的顶点集与G的相同. A_0导出G^*的一子图，它是所有的有n_0个顶点并且无k顶点完全子图的简单图中间的极图. 在G^*内A的每个

顶点邻接于A_0的每个顶点，最后，A是G^*的一独立顶点集.

G^*不含$k+1$顶点完全子图，否则，这样的一完全图至多能有一个顶点在A内，而在此情况下，G^*中由A_0导出的子图将含一个k顶点完全子图. 若G^*的边数是e，G^*的由A_0导出的子图的边数为e_0^*，则

$$e_0 \leqq e_0^* \quad 及 \quad e_0^*+(n-n_0)n_0=e.$$

由于G极大，它的边数e_0+e_1至少是e. 但仅当$e_0=e_0^*$及$e_1=(n-n_0)n_0$时，这才是可能的，这就必然有(1)和(2).

因此，(*)及命题43得证. 对于这一命题，有好多种证法. 它是图论中许多问题的出发点.

对于命题43的极图，极大边数e_{max}，下列关系成立，若$n=h\times k+m \quad (0\leqq m<k)$:

$$e_{max}=\frac{1}{2}(n^2-m^2)\frac{k-1}{k}+\binom{m}{2}=\frac{1}{2}n^2\frac{k-1}{k}-\frac{1}{2}m^2\frac{k-1}{k}$$

$$+\frac{m^2-m}{2}=\frac{1}{2}n^2\frac{k-1}{k}-\frac{1}{2k}(m^2k-m^2-m^2k+mk)$$

$$=\frac{1}{2}n^2\frac{k-1}{k}-\frac{1}{2k}m(k-m).$$

由于$m\geqq 0$及$k>m$,

$$e_{max}\leqq\frac{1}{2}n^2\frac{k-1}{k}.$$

因此，若

$$\varphi(p)>n\frac{k-1}{k}$$

对于n顶点的简单图G的每个顶点p成立，则G的边数大于

$$\frac{1}{2}n^2\frac{k-1}{k},$$

据1.8，必大于e_{max}. 因此据命题43，G必含有$k+1$顶点的完全

子图. 因为 $\varphi(p)$ 是一个整数, $\varphi(p)>n(k-1)/k$ 成立, 当且仅当

$$\varphi(p)>\left[n\frac{k-1}{k}\right].$$

因而, 命题43的下列推论成立(见命题 38, 若 $k=2$):

44. 若 φ_0 是一有 n 个顶点且不含 $k+1$ 顶点完全子图的简单图的极小次数, 则

$$\varphi_0\leqq\left[n\frac{k-1}{k}\right].$$

注意:

这个问题的极图是那么一些简单图, 它们有 n 个顶点, 并且不含 $k+1$ 顶点完全子图, 它们的极小次数是 $[n(k-1)/k]$. 存在大量的这样的图, 例如, 命题 43 的全部的极图在此也是极图, 并且, 若对于 $m\geqq1$, 我们删去关联于其次数大于极小次数的顶点的一边, 那些图仍然是极图. 不过, 从顶点数为 n 的最可能均匀分布图 $\langle n_1, n_2, \cdots, n_k\rangle$ 中, 删去合适的边, 将不产生此问题的所有可能的极图. 例如, 命题 38 的五边形, 不能以此方式得到. 极图图 169 也不能以此方式得到, 这里, $n=7$ 及 $k=3$, 因为此图不含 4 顶点完全子图, 且 $iv_{\max}=2$, 但有 7 个顶点的图 $\langle n_1, n_2, n_3\rangle$, 有 $iv_{\max}=3$, 若从此图删去某边, $iv_{\max}\geqq3$ 仍成立.

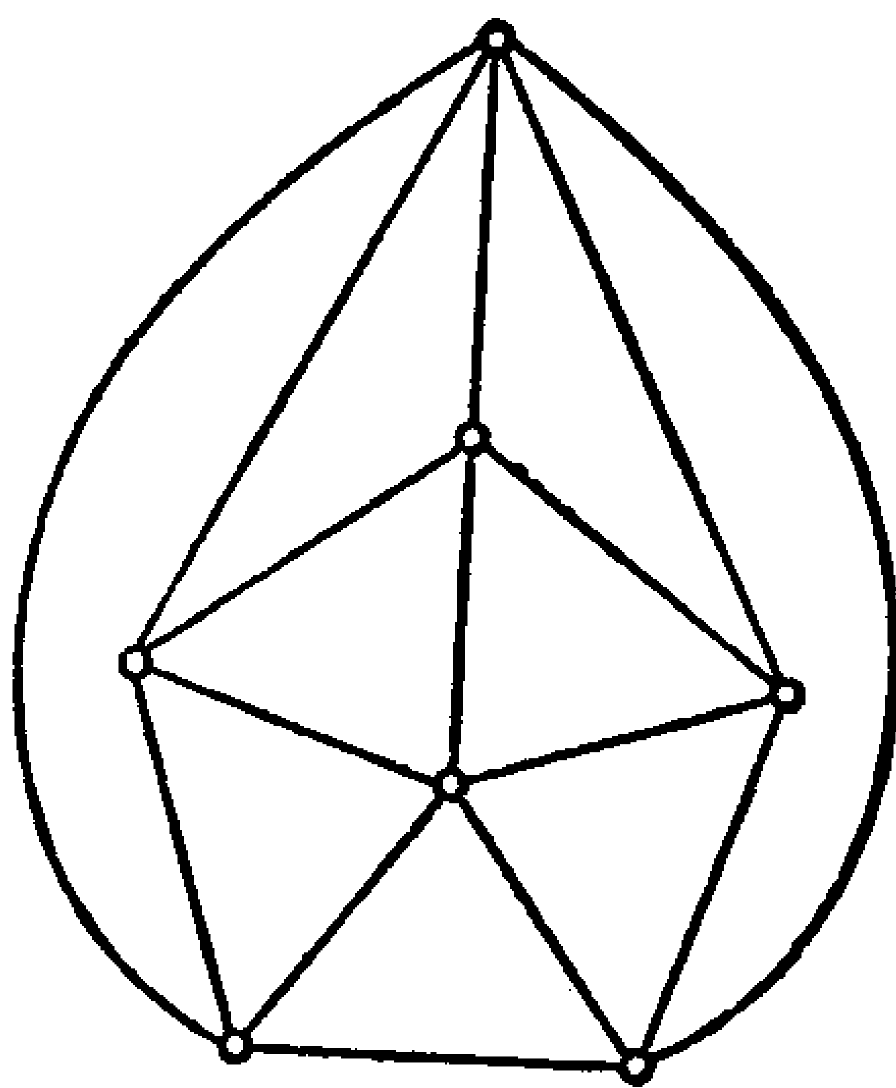


图 169

现在, 我着重考虑(问题 49 中)命题 43 在几何中的一个有趣的应用.

问　题

45. 考虑一直角三角形的最短直角边．(更确切地说：长度不大于另一直角边者．)求证：该三角形斜边的长与此边长之比不小于$\sqrt{2}$．

46. 考虑钝角三角形或退化三角形（即三顶点共线的情形）．求证上一命题在此情况下可推广为：三角形最大边长与最小边长之比不小于$\sqrt{2}$．

47. 求证：平面上任 4 点中，可有 3 点联成一直角三角形，退化三角形或钝角三角形．

48. 平面上的 4 个点中，任两个点间距离至多为 1，求证其中有两个点，其间的距离不大于 $1/\sqrt{2}$．

49. 平面上的 $3s$ 个点中($s\geqq 2$)，其中任两点间的距离至多为 1，考虑全部的各两点间的距离．求证在这些距离中，至多有 $3s^2$ 个大于 $1/\sqrt{2}$．

我们来考虑问题 45 中的直角三角形．以 a，b 与 c 依次记其两直角边与斜边．并假定 $a\leqq b$．因为，

$$c^2=a^2+b^2\geqq 2a^2,$$

所以，

$$\frac{c}{a}\geqq\sqrt{2}.$$

为解问题 46，我们假定 $a\leqq b\leqq c$，对于一钝角三角形或退化三角形的三条边．因为，在同一三角形中，大边对大角，所以，角 C 是钝角(或平角)，它的两边即 b 与 a．让边 a 与 b 绕顶点 C 旋转，使角 C 减少，成 90°(但不改变 a 与 b 的长)，则新三角形的第三边 c' 比 c 短，即

$$\frac{c}{a}>\frac{c'}{a}.$$

又由问题 45,

$$\frac{c'}{a} \geqq \sqrt{2}.$$

这就导出

$$\frac{c}{a} \geqq \sqrt{2}.$$

在问题 47 所指的 4 点中，若有三点共线，则产生一退化三角形．因此，以下可假定任三点不共线．以线段联结 4 点，就得到一三角形或四边形，前者可记为三角形 $P_1P_2P_3$(见图 170)，而 P_4 在此三角形所围成的区域内，因为无三点共线．P_4 到此三角形各顶点的联线把上述三角形划分为 3 个三角形．以 P_4 为顶点的三个角，其和为 360°．因此，其中至少有两个角是钝角，每个都是已知 4 点中的 3 点所联成的三角形的一个内角．另一方面，若已知 4 点联成一四边形，则其内角和为 360°．所以，至少有其中的一个角不小于 90°(为直角或钝角)，它属于直角三角形或钝角三角形，后者由 4 点中的某 3 点组成．

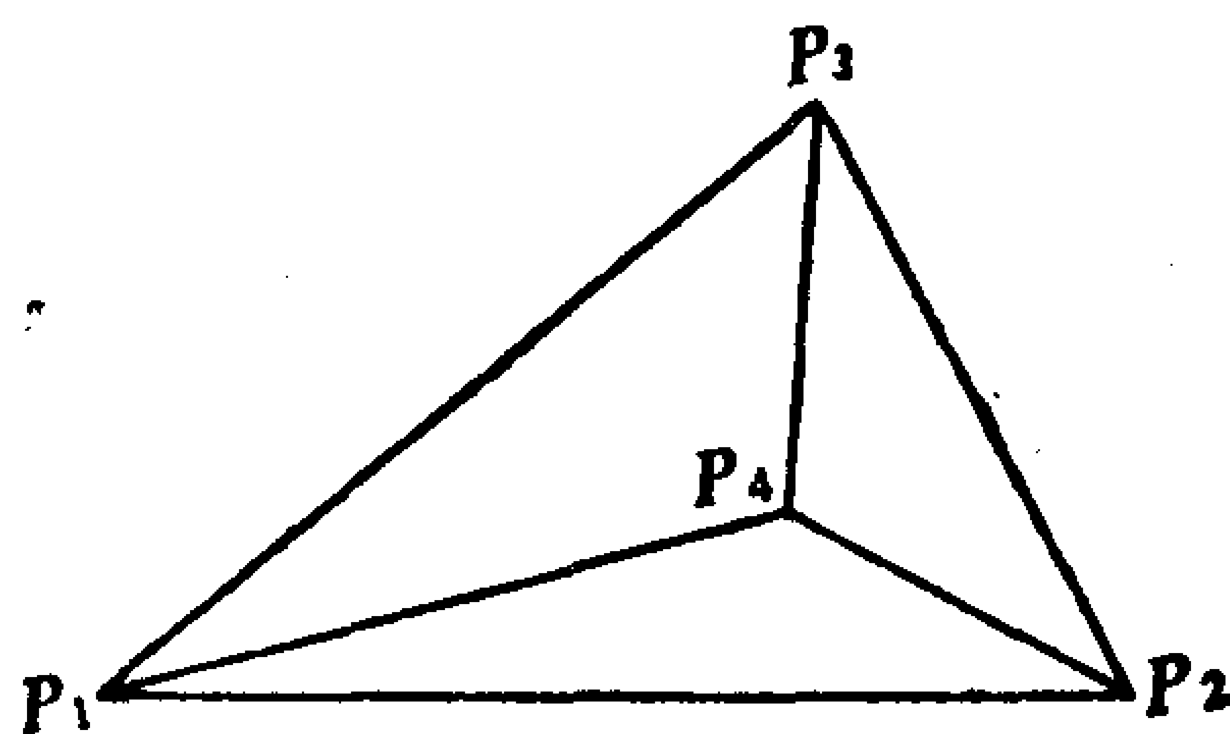


图 170

按照问题 47 所说，我们总能在问题 48 的 4 个点中找到 3 个，由它们组成的一个三角形是直角的，钝角的或退化的．若对于边 a, b, c, 有关系 $a \leqq b \leqq c$, 则据问题 45 及 46, 有

$$\frac{c}{a} \geqq \sqrt{2}.$$

因而，$a\sqrt{2} \leqq c$．因为 $c \leqq 1$, 显然 $a\sqrt{2} \leqq 1$, 所以

$$a \leq \frac{1}{\sqrt{2}},$$

命题 48 得证.

为解问题 49, 定义一个简单图 G 如下: 以平面内的 $3s$ 点集作为 G 的顶点集. 如果两顶点间的距离大于 $1/\sqrt{2}$, 则此两顶点邻接. 我们必须证明, 图 G 至多有 $3s^2$ 条边. 假设不然, 据命题 43, 此时, G 含一个 4 顶点完全子图(这里, $n=3s$, $k=3$ 及 $m=0$). 由此知道(在 $3s$ 个顶点中)存在 4 个点, 其中任 两 点 间 的距离大于 $1/\sqrt{2}$, 但这矛盾于问题 48 的结果.

于是, 作为命题 43 在几何上的应用, 问题 49 获得解决. 下面的评注突出了此结果的有趣的特点. 我们来考虑一有单位边长的正三角形. 若平面上的 $3s$ 个点, 被放置于此三角形的三顶点上, 使每个顶点, 有 s 个点与之重合, 则三 角形的每一边对应于 s^2 个线段, 每个线段联结着两个点. 因此, 点对之间的 $3s^2$ 个距离的每一个都等于 1. 换句话说, 能在平面上放置 $3s$ 个点, 使 $3s^2$ 个点对间的线段的每一个长为 1; 但据问题 49, 不能有 $3s^2+1$ 个线段的长 大 于 $1/\sqrt{2}$, $1/\sqrt{2}$ 是小于 1 的.

练　　习

50. 设 e 及 n 是正整数. 试证不等式

$$\frac{2en}{2e+n} \leq \frac{e+n}{3}$$

成立, 当且仅当

$$0 \leq (e-n)(2e-n),$$

若在第二关系式中等号成立, 则第一式的等号也成立.

51. 考虑命题 43 的极图(n, k 固定, $n=hk+m$, $0 \leq m < k$). 求证此图的补图的边数是

$$\frac{(n-m)(n+m-k)}{2k}.$$

52. 有 n 个顶点，e 条边的简单图 G，或是一个 n 顶点的完全图，或它的每个分支是相同数目的顶点的完全图．求证

$$cv_{\min}=\frac{2en}{2e+n}.$$

下列练习 50 的第一不等式的变换系列导出第二不等式:

$$6en\leqq 2e^2+2en+en+n^2,$$

$$3en\leqq 2e^2+n^2,$$

$$0\leqq 2e^2-3en+n^2,$$

$$0\leqq 2e^2-2en-en+n^2,$$

$$0\leqq 2e(e-n)-n(e-n),$$

$$0\leqq (e-n)(2e-n).$$

在练习 51 中提到的极图的补图有 k 个分支；其中 m 个是 $h+1$ 顶点的完全图，而 $k-m$ 个是 h 顶点的完全图，在这里，$h=(n-m)/k$．因此边数是

$$m\binom{h+1}{2}+(k-m)\binom{h}{2}=\frac{m(h+1)h}{2}+\frac{(k-m)h(h-1)}{2}$$

$$=\frac{h}{2}(kh+2m-k)=\frac{n-m}{2k}(n-m+2m-k)$$

$$=\frac{(n-m)(n+m-k)}{2k}.$$

若练习 52 的图 G 的每个分支有 h 个顶点，则分支数是 n/h．显然，对每个分支有，$iv_{\max}=1$，因此据 5.28，$cv_{\min}=h-1$，所以对于整个图 G，$cv_{\min}=(n/h)(h-1)$，另一方面，

$$e=\frac{n}{h}\binom{h}{2}=\frac{n}{h}\,\frac{h(h-1)}{2}=\frac{n(h-1)}{2},$$

由此

$$\frac{2en}{2e+n}=\frac{n^2(h-1)}{n(h-1)+n}=\frac{n}{h}(h-1)=cv_{\min}.$$

在全部 n 个顶点 e 条边的简单图中，关于值 $cv_{\min}$，**下列命题**指出图 G 是极图.

53. 对于任一有 n 个顶点与 e 条边的简单图

$$cv_{\min}\leqq\frac{2en}{2e+n}.$$

当且仅当 G 是一个具有 n 顶点的完全图，或它的每个分支是顶点数目相同的完全图时等式成立.

为证此命题，设 G 是一个 n 顶点的简单图，以 G^* 表示 G 的补图. 设 e 表示 G 的边数，k 是一个数，使得 G^* 含一 k 顶点的完全图，但不含 $k+1$ 顶点的完全图. 若 $n=hk+m$ 及 $0\leqq m<k$，则据命题 **43** 及练习 **51**，

$$e\geqq\frac{(n-m)(n+m-k)}{2k}$$

若 $m=0$，等式成立当且仅当 G 的每个分支是一 h 顶点的完全图.

因为 G^* 含一 k 顶点完全图但不含 $k+1$ 顶点完全图，对于图 G，$iv_{\max}=k$. 因此，若以 j 表示对于图 G $cv_{\min}$ 的值，则 **5.28** 表明 $k=n-j$，不等式取形式

$$e\geqq\frac{(n-m)(j+m)}{2(n-j)}.$$

因为 $0\leqq m<n-j$，有关系 $m\geqq0$ 及 $n-j-m>0$. 因此

$$(n-m)(j+m)=nj+m(n-j-m)\geqq nj,$$

并且等式

$$(n-m)(j+m)=nj$$

当且仅当 $m=0$ 时成立. 所以

$$e\geqq\frac{nj}{2(n-j)},$$

由此

$$j \leqq \frac{2en}{2e+n}.$$

在此，等号当且仅当 G 的每个分支是一 h 顶点的 完全图时成立. 命题53得证.

作为命题 **53** 的一个应用，我们来证

54. 若 G 是一简单图，有 n 个顶点与 e 条边，则

$$cv_{\min} \leqq \frac{n+e}{3},$$

当且仅当 G 的每个分支是一 2 或 3 顶点的完全图时 等 式成立.

在证明命题 **54** 时，不失一般性，可假定图 G 是连通的，因为一个图的顶点数是它的各分支中的顶点数的和，关于它的边数及极小覆盖顶点数也能这么说.

设 G 是简单连通图，有 n 个 顶 点 及 e 条边，j 是对于 G 的 $cv_{\min}$ 的值. 若 $n=1$，则 $j=0$. 因此，以下可 假定 $n \geqq 2$. 在此情况下，$e \geqq 1$，因为 G 是连通的. 命题 **53** 表明

$$j \leqq \frac{2en}{2e+n},$$

等式当且仅当 G 是一 n 顶点的完全图 时 成 立. 但，据练习 **50**，关系

$$\frac{2en}{2e+n} \leqq \frac{e+n}{3}$$

等价于

$$0 \leqq (e-n)(2e-n).$$

因此，若 $e \geqq n$，后一不等式可推出前一式，所以

$$j \leqq \frac{e+n}{3};$$

这里，等式当且仅当 $e=n$ 且 G 是一 n 顶点的完全图时成立．但在此情况下

$$\binom{n}{2}=n,$$

即，$n(n-3)=0$，由此 $n=3$，即 G 是一 3 顶点完全图．

若 $e<n$，则 $e=n-1$，因为 G 是连通的（见第二章的第一段）．因此，据 **2.5** G 是一棵树．所有的树是双图（因为，此外，它们不含任一奇数长回路），所以

$$j\leqq n/2.$$

由于 $n\geqq 2$，

$$\frac{e+n}{3}=\frac{2n-1}{3}\geqq\frac{n}{2}\geqq j,$$

我们容易证明当且仅当 $n=2$，即 G 是一个 2 顶点完全图时，$(e+n)/3=j$．

于是，命题 **54** 得证。

以下我们把偶数与奇数长的回路，分别简称为**偶回路**与**奇回路**．

命题 **38** 的全部极图，除五边形外都是双图，所以，不会有任一奇回路．若一简单图，有 n 个顶点，不含一长小于 $2k+1$ 的奇回路（$k\geqq 2$，整数），则也不含三角形．在这些图内，极小次数至多为 $[n/2]$．若我们考虑一多边形，$n=5$，极小次数又是 $[n/2]$．但仅当 $k=2$ 时此图属于刚才提到的图组．因此，我们能把命题 **38** 推广如下：

55. 设具有 n 个顶点的简单图不含长小于 $2k+1$（$k\geqq 2$，整数）的奇回路，又设 φ_0 表示图的极小次数．则

$$\varphi_0\leqq\left[\frac{n}{2}\right].$$

极图(这里，等式成立)，对 k 的每个值是$\left\langle\left[\frac{n}{2}\right], \left[\frac{n+1}{2}\right]\right\rangle$型的图，对 $k=2$ 是 5 边形(见图 167 及 168). 不存在别的极图.

对于$\left\langle\left[\frac{n}{2}\right], \left[\frac{n+1}{2}\right]\right\rangle$型的图 $iv_{max}=\left[\frac{n+1}{2}\right]$，对于五边形 $iv_{max}=2$. 因此，在命题 55 的极图中，不等式 $iv_{max}<n/2$ 仅对五边形成立，它对应于 $k=2$的情况. 关系式 $iv_{max}<n/2$ 表明图含一奇回路——如在本章开头所已证的. 以下我们考察，一个"短"奇回路的存在(也许是最短的一个：三角形)能否由选取一简单图的次数或边数，使之充分大，或由限制(或固定) iv_{max} 的值，来加以保证. 下列概念会是有用的:

设 $m\geqq3$，以$((n_1, n_2, \cdots, n_m))$表示一简单图，它具有下述性质：两两不交的顶点集 $B_1, B_2, \cdots, B_m$ 一起构成图的顶点集；集 B_i 内的顶点数是 $n_i(i=1, 2, \cdots, m)$；每个集 B_i 是一独立顶点集；B_i 的每个顶点邻接于 B_{i+1} 的所有顶点(对于 $i=1, 2, \cdots, m-1$)，而B_m 的每个顶点邻接于 B_1 的所有顶点. 这样的图可以用图形来表示，图形的结构类似于$\langle n_1, n_2, \cdots, n_m\rangle$型的图. 图 171 对应于图$((n_1, n_2, n_3, n_4, n_5))$.

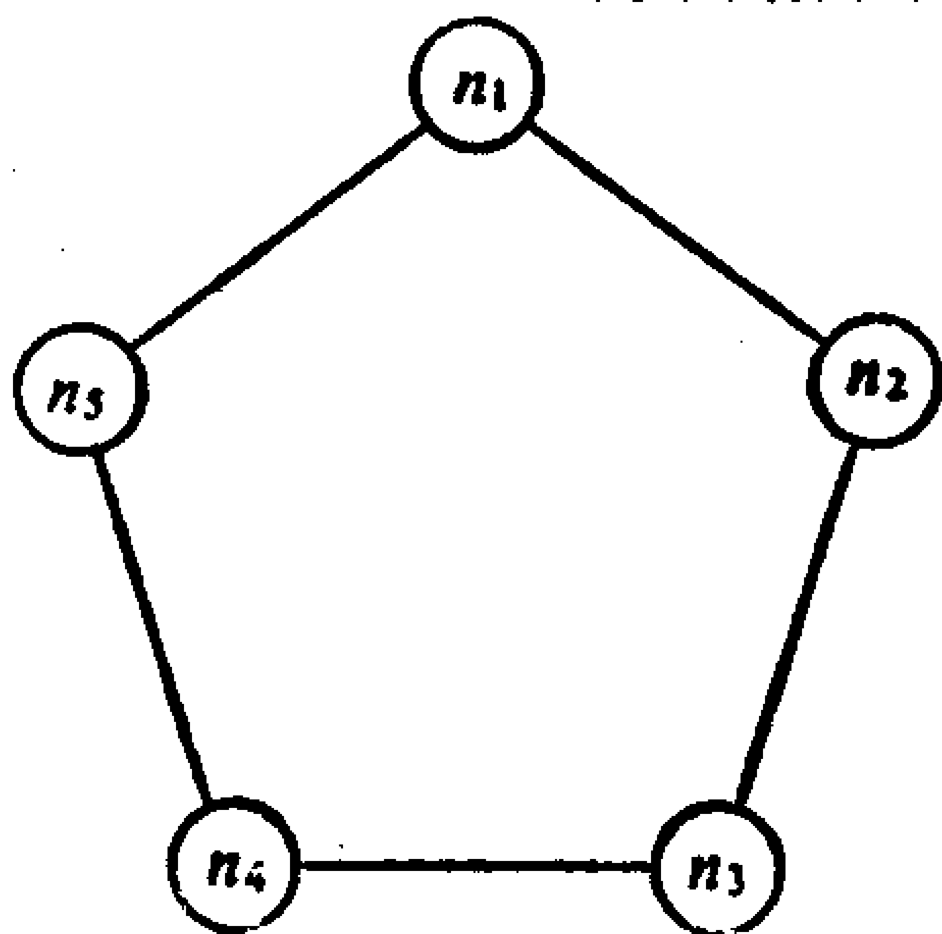


图 171

回路 K 的一条弧指的是仅由K 的边组成的一条路. **回路 K的一条弦**则指这样的一条路，其端点属于K，但其边与内点均不属于K. 一条长为 1 的弦常常叫做回路的一条对角线.

练　习

56. 找出确定$((n_1, n_2, \cdots, n_m))$型的一个图的 iv_{max} 的方法.

57. 设 f 与 d 是整数，有 $f\geqq 2$ 及 $1\leqq d\leqq f/2$. 试确定图 $\left(\left(\frac{f}{2},\ \frac{f}{2},\ \frac{f}{2},\ \frac{f}{4}+\frac{d}{2},\ \frac{f}{4}+\frac{d}{2}\right)\right)$的 $iv_{\max}$. 找出此图的极小次数(显然，$f/2$ 及 $f/4+d/2$ 假定为整数.)

问　　题

58. 设简单图 G 有几个顶点，不含三角形. 以 K 表示 G 的一有极小长度的奇回路，m 表示 K 的长度. 求证下列命题:

(a) 若回路 K 的一长为 h 的弦的端点，把回路切割成长度分别为 h_1 与 h_2 的两个弧. 则 h 不能小于 h_1 同时又小于 h_2.

(b) 以 p 表示 G 的任一顶点，p 至多有两条边联结于 K 的顶点. 若 K 的顶点 p_1 与 p_2 都邻接于 p，则在 p_1 与 p_2 间的弧之一长为 2(p 可属于 K).

(c) 以 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m$ 表示 K 的顶点的次数. 让我们考虑 G 中的 n 个顶点: p_1, $p_2, \cdots, p_n$ 并以 Ψ_i 记联结 p_i 与 K 的顶点的边数($i=1, 2\cdots, n$). 求证:

$$\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_m=\psi_1+\psi_2+\cdots+\psi_n.$$

59. 设在具有几个顶点而不含三角形的简单图内固定值 $iv_{\max}$，使得 $iv_{\max}=f\geqq n/2$. 求在这些图中极小次数的极大值，并确定极图.

60. 求出使 $iv_{\max}=f\geqq n/2$，不含三角形，有 n 个顶点的简单图内的极大边数.

61. 设对于有 n 个顶点而不含三角形的简单图 G，$iv_{\max}=f$ 且 $n=2f+1(f\geqq 2)$. 求证 G 内的边数至多为 f^2+1.

设 G 表示练习 **56** 中的$((n_1, n_2, \cdots, n_m))$型的图. 若考虑 G 的

每个集合 B_i 中一个任意的顶点，则得到 G 中的长为 m 的一回路 K 的顶点. K 中任 $[m/2]$ 个独立顶点构成 K 中一极大独立顶点集. 若 F 是 K 中一极大独立顶点集，含有 F 的一顶点的全部的集 B_i 与 F 一起，则得到 G 内的一独立顶点集. 易证 G 的任一极大独立顶点集出现于 G 的这些(独立)集中. 所求的 iv_{max} 的值能以此法确定.

由此，练习 **57** 也易于得解：由于 $d \leqq f/2$,

$$\frac{f}{4}+\frac{d}{2} \leqq \frac{f}{4}+\frac{f}{4}=\frac{f}{2},$$

且，由于 $[m/2]=2$, 显然，$iv_{max}=\frac{f}{2}+\frac{f}{2}=f$. 在 B_i 中一顶点的次数即在集 B_j 与集 B_l 中顶点数的和，B_j 与 B_l 是"邻接于 B_i"的. 于是，应用上面的关于极小次数 φ_0 的不等式，我们得到

$$\varphi_0=\frac{f}{2}+\frac{f}{4}+\frac{d}{2}=\frac{3f+2d}{4}.$$

因为问题 **58** 的回路 K 是奇回路，在(*a*)中的数 h_1 与 h_2 之一是奇数，而另一则是偶数. 因此，长为 h 的弦与长为 h_1 或 h_2 的一弧构成一奇回路，若 $h<h_1$ 与 $h<h_2$, K 就不能是极小的.

由于 G 是一简单图，命题(*a*)表明 K 没有长为 1 的弦.

假设命题(*b*)不真，假设 K 的任何三顶点 a_1, a_2, a_3 邻接于 G 的顶点 p. 据上述结果，p 不能属于 K. (现在我们考虑图 172) 顶点

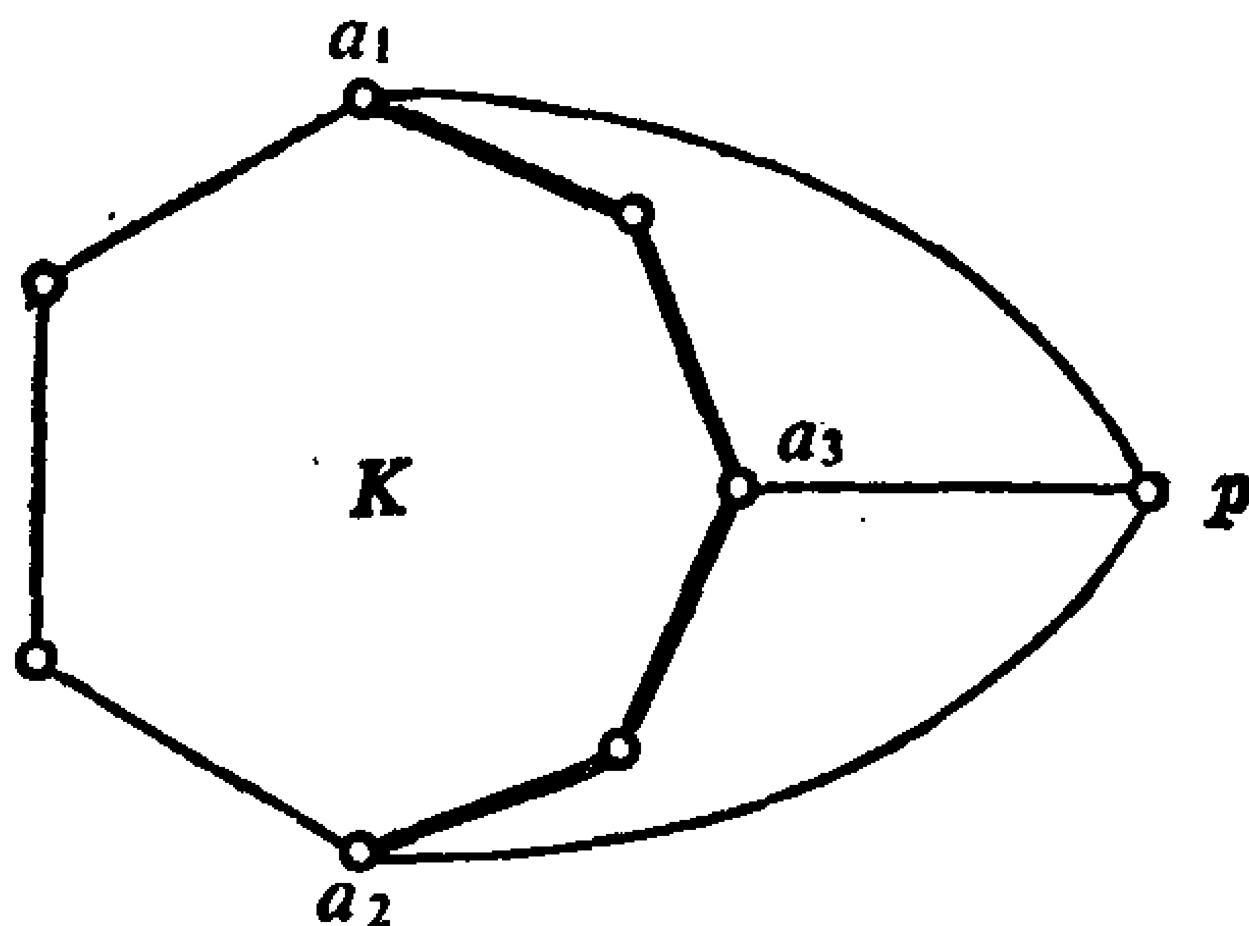


图 172

a_i 把回路K分成三个弧．每个的长至少为 2，因为 G 中无三角形．但K是奇回路，所以这些弧长中至少有一不小于 3，因此，顶点 a_i 中有两个(比如说，a_1 与 a_2)把K分成两个弧，每个长不小于 3.（此两个弧的边分别用粗线与细线表示.）但边$\{a_1, p\}$与$\{p, a_2\}$构K的成长为 2 的弦，矛盾于命题(a).

命题 (b) 的第二部分由 (a) 及 G 中没有三角形这一事实所推出.

为证命题(c)，让我们删除G的不邻接于K的顶点的边．以G_0表示新图，e 记其边数．根据命题(b)，e 至多为 $m+2(n-m)$．K 没有长为 1 的弦．和 $\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_m$比 e 大 m，因为K的边被计算了两遍，而所有其余的边只数了一遍．全部在 G_0 中而不在K内的顶点构成一独立顶点集．同理，和 $\psi_1+\psi_2+\cdots+\psi_n$ 也等于 $e+m$；因此，它至多为 $m+2(n-m)+m=2n$.

为解余下的问题，假定除命题 55 的条件外，有不等式 $iv_{max}<n/2$．可证得下列命题:

62. 对于具有 n 个顶点且不含长度小于 $2k+1$ 的奇回路($k\geq 2$，整数；$n\geq 2k+1$)的简单图G，设 $iv_{max}<n/2$．若 φ_0 表示 G的极小次数则

$$\varphi_0\leq\frac{2n}{2k+1}.$$

若 n 及 k 的值已知，则极图(此时等式成立)是$((n_1, n_2, \cdots, n_{2k+1}))$型的图，这里，$n_1=n_2=\cdots=n_{2k+1}=n/2k+1)$．无别的极图.

我们假定 n 与 k 已知，G 满足命题的条件．因为 $iv_{max}<n/2$，G 含有奇回路(见本章开头部分的推理)．以K表示G的一有极小长度的奇回路，而 $2m+1$ 为 K 的长．此时，$m\geq k$．以 a_1, a_2, $\cdots$, a_{2m+1} 依次地表示沿回路 K 的顶点．由于 φ_0 是 G 中的极小次数，

$$\varphi(a_i)\geq\varphi_0\quad(i=1, 2, \cdots, 2m+1),$$

因此，$\mathfrak{Z}$ 的顶点的次数和至少是

$$(2m+1)\varphi_0.$$

以 ψ_i 记把 G 的顶点 p_i 联结于回路 K 的边的条数，应用上述的结果及问题 **58** 的命题(c)与(b)便得下列关系：

$$(2m+1)\varphi_0 \leqq \varphi(a_1)+\varphi(a_2)+\cdots+\varphi(a_{2m+1})$$
$$=\psi_1+\psi_2+\cdots+\psi_n \leqq 2n.$$

因此，

$$\varphi_0 \leqq \frac{2n}{2m+1} \leqq \frac{2n}{2k+1}.$$

在此关系中等式

$$\varphi_0=\frac{2n}{2k+1}$$

仅当 $m=k$, K 中每个顶点的次数是 $2n/(2k+1)$，且若 G 的每个顶点恰邻接于 K 的两个顶点时成立，若考虑这些两顶点中的任两顶点间的 K 的两条弧，据问题 **58** 的命题(b)，其中之一的长为 2.

现在假设等式是成立的，此时，G 的顶点可唯一地分解为集 $B_1, B_2, \cdots, B_{2k+1}$ 如下：若我们把下标 0 与 $2k+1$ 以及 1 与 $2k+2$ 分别看成是一回事；则一个顶点 p，若它在 K 中的两个邻接点是 a_{i-1} 及 a_{i+1}，则 p 属于 B_i. 这类分解之一，如图 173 所示，其中 $n=14, k=3$(此图不是一个极图). K 的边以粗线标出. 下列性质是可以理解的：每个集合 B_i 是 G 的一个独立顶点集，因为图 G 不含三角形. 若 K 的任一顶点 a_i 与 B_i 中的任一顶点交换，就得到 G 中一个长为 $2k+1$ 的新回路，在此分解中可假定新回路与 K 的作用相同. 因此，B_i 的任一顶点邻接于 B_{i-1} 的每一顶点与 B_{i+1} 的每一顶点，但无别的邻接点. 还有，每个顶点的次数都是 $2n/(2k+1)$. 因此，若 x_i 表示 B_i 中的顶点数，则 B_i 的每个顶点的次数等于 $x_{i-1}+x_{i+1}$. 因此，产生下列等式：

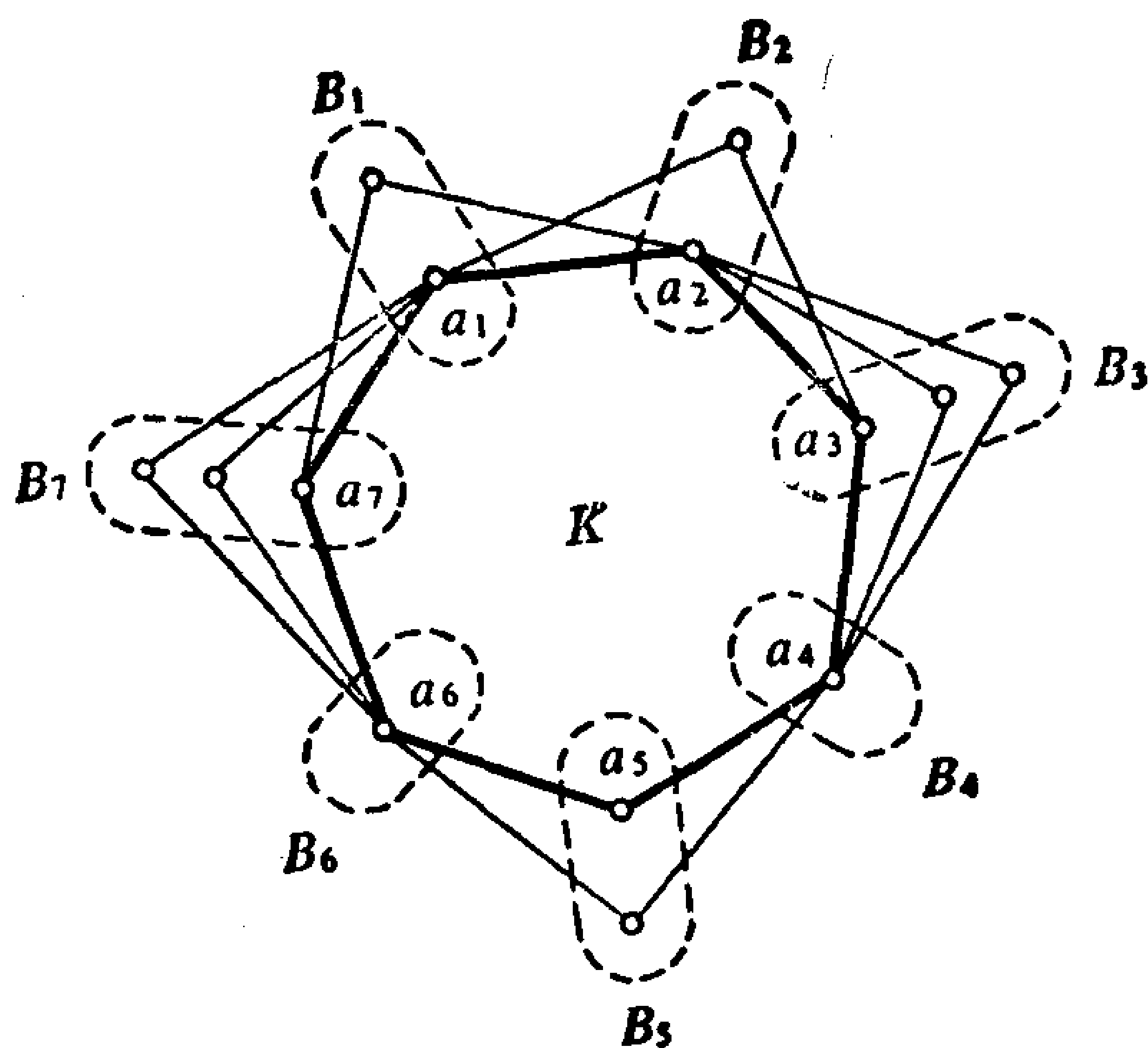


图 173

$$x_i+x_j=\frac{2n}{2k+1},\ 若|i-j|=2.$$

若，例如下列两方程相减，

$$x_1+x_3=\frac{2n}{2k+1}\quad 及\quad x_3+x_5=\frac{2n}{2k+1},$$

我们有

$$x_1=x_5.$$

同法（把有相同未知数的方程相减）得关系

$$x_1=x_2=\cdots=x_{2k+1}.$$

这些量中的任两者之和为 $2n/(2k+1)$；因此，每一个都等于 $n/(2k+1)$. 从而，若 $n_i=n/(2k+1)$，则 G 是 $((n_1, n_2, \cdots, n_{2k+1}))$ 型的图. 对于图 G，现在我们容易证明

$$iv_{\max}=k\frac{n}{2k+1}<k\frac{n}{2k}=\frac{n}{2},$$

命题 62 得证.

设 G 是符合问题 59 的条件的图. 设 φ_0 是 G 中的极小次数.

若F表示G中的一极大独立顶点集，L是G的不属于F的顶点的集合，F含有f个顶点，而对于F的任一顶点p，

$$\varphi(p)\leqq n-f.$$

因此，

$$\varphi_0\leqq n-f.$$

这里，当且仅当对于G的每个顶点p，

$$\varphi(p)\geqq n-f,$$

时等式成立，这表明F的每个顶点邻接于L的全部的顶点；由此推知L也是一独立顶点集，因为G不含三角形. 此时，我们必有$n-f\leqq f$，因为f是极大的，从G的性质知道，$f\geqq n/2$. 因此，F的顶点的次数$n-f$至多等于L的顶点的次数f.

于是

$$\varphi_0\leqq n-f.$$

作为问题 **59** 的一个解，得到下列命题：

63. 设G是有n个顶点且不含三角形的简单图，设$iv_{max}=f\geqq n/2$，则对于G的极小次数φ_0，

$$\varphi_0\leqq n-f.$$

极图(此时等式成立)是$<f, n-f>$型的那些图，不存在别的极图.

若iv_{max}的是一小于$n/2$的定值，则对应的问题更为困难. 问题仅当值是“靠近$n/2$”时得解，例如，若$n=2f+d$且$1\leqq d\leqq f/2$. 此时，f与$n/2$间的差小于$n/10$. 因为，不等式表明关系

$$2n/5\leqq f<n/2.$$

若以$n-2f$替换d；且

$$n/2-2n/5=n/10.$$

在此情况下，下列命题是正确的.

64. 对于有几个顶点且不含三角形的简单图G，若$n=2f+d$与$1\leqq d\leqq f/2$，又若$iv_{max}=f$，φ_0是G中的极小次数，则

$$\varphi_0 \leq \frac{3f+2d}{4}.$$

极图(此时等式成立)是$\left(\left(\frac{f}{2}, \frac{f}{2}, \frac{f}{2}, \frac{f}{4}+\frac{d}{2}, \frac{f}{4}+\frac{d}{2}\right)\right)$型的,不存在别的极图.

练习 57 的解，引导到结果：若 φ_0 达到上界，这些图实际上是极图．有关没有别的极图的证明从略．这多少要费点事，留给读者去证．

为证命题 64 中对于 φ_0 的不等式，以 F 表示 G 中的一极大独立顶点集．F 与 L 中的顶点数分别为 f 与 $f+d$．由于 $f+d>f$，G 中被 L 导出的子图含某些边，我们设$\{a_1, a_2\}$是其中之一．因为 G 不含三角形，此两顶点不能有任何公共邻接点．因此，其中之一，比如说 a_1，至多邻接于 F 的 $f/2$ 个顶点．以 F_1 与 L_1 分别表示在 F 与 L 中的邻接于 a_1 的顶点的集合．以 F_2 记在 F 中而不在 F_1 中的顶点的集合，并类似地定义 L_2(见图 174)．由于 F 是极大的，F_1 至少包含一顶点 b．以 f_1 与 l_1 分别表示 F_1 与 L_1 的顶点数．在此情况下，$f_1 \leq f/2$，L_2 中的顶点数是 $f+d-l_1$，

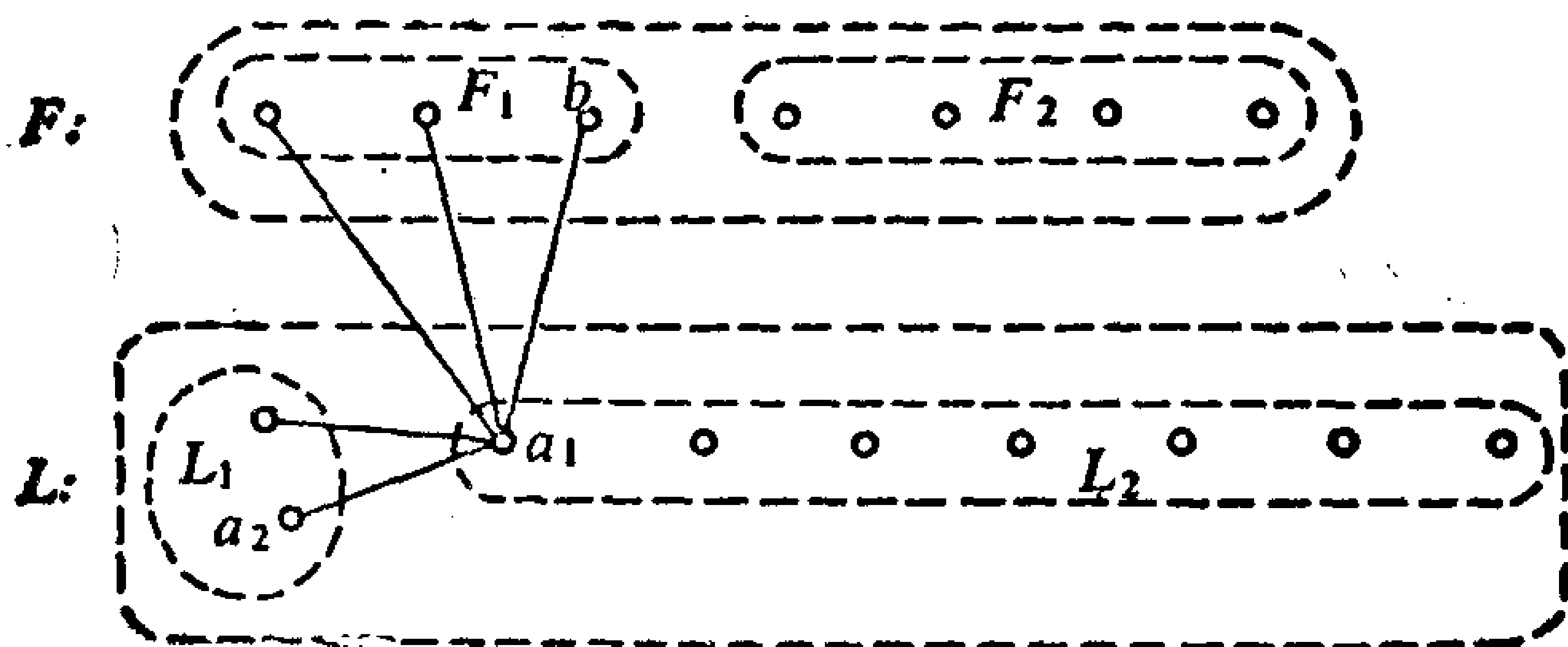


图 174

$$\varphi(a_1)=l_1+f_1.$$

对于G 的任一顶点 p，

$$\varphi(p) \geq \varphi_0,$$

因此，a_1 与 b 的次数和至少是 $2\varphi_0$. 因为 F 如独立，G 不含三角形，F_1 的任一顶点的全部邻接点都在 L_2 中. 因此，对 F_1 的任一顶点 q

$$\varphi(q) \leqq f+d-l_1.$$

因而

$$2\varphi_0 \leqq \varphi(b)+\varphi(a_1) \leqq f+d-l_1+l_1+f_1=f+d+f_1$$
$$\leqq f+d+f/2=\frac{3f+2d}{2},$$

这表明

$$\varphi_0 \leqq \frac{3f+2d}{4}.$$

问题 60 的图不含三角形. 据问题 35, 关系式

$$e \leqq (n-f)f$$

对极大边数成立. 问题 35 的极图是 $<n-f,\ f>$ 型的. 全部这样的图含有 $n-f$ 个顶点的一个独立集；因此，据 f 的极大性，不等式 $n-f \leqq f$ 必成立. 另一方面，这也可由条件 $f \geqq n/2$ 推出. 由于这些图不含奇回路，我们同时还得到：

65. 若简单图有 n 个顶点与 e 条边，使得 $iv_{max}=f \geqq n/2$. 并使得它们不含其长小于 $2k+1$ ($k \geqq 2$, 整数) 的奇回路，则

$$e \leqq (n-f)f.$$

极图 (此时等式成立) 是那些 $<n-f,\ f>$ 型的图，不存在别的极图.

若改变一下问题，要求 $f<n/2$, 则解还不大清楚，且更为困难. 这样的情况发生于问题 61, 即 $k=2$, $f=(n-1)/2$. 以 F 表示在此图 G 中的一极大独立顶点集，以 L 表示在 G 中而不在 F 中的顶点的集合. F 与 L 内的顶点数分别是 f 与 $f+1$. 因为 $f+1>f$, G 中由 L 导出的子图含某些边；设 $\{a_1, a_2\}$ 为其中之一. 因为 G 不含三角形，此两顶点不能有一公共邻接点. 这样 a_1 与 a_2 至多共有

F 中的 f 个邻接点，以 L^*表示 L 的不同于 a_1 与 a_2 的顶点的集合(见图 175)L^*中的顶点数是 $f-1$. 据命题 **17**, G 的每个顶点的次

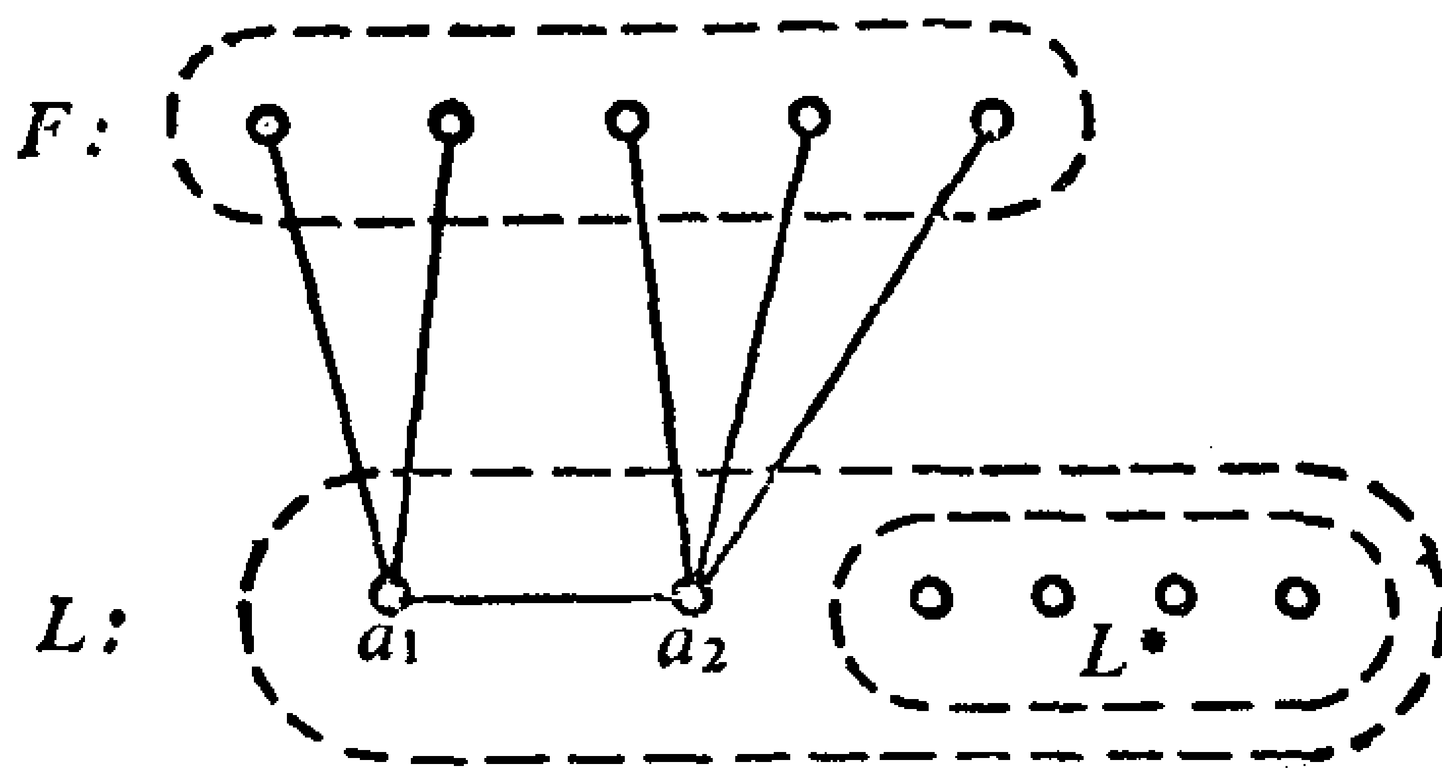


图 175

数至多为 f; 因此，至多能有 $(f-1)f$ 条边关联于 L^*的顶点. 考虑图 175 中的边，数值上至多为 $f+1$, 关联于 L^*的顶点的每条边，G 的全部的边至少被算上一次，因此

$$e \leqq f+1+(f-1)f=f^2+1.$$

此结果含于下面的命题中. 在此命题中所提及的图实际上都是极图，且无别的极图. 但其证明留给读者.

66. 对于有 n 个顶点与 e 条边而不含三角形的简单图，若 $n=2f+1(f\geqq 2)$ 及 $iv_{\max}=f$, 则

$$e \leqq f^2+1.$$

极图(此时等式成立)是那些$((n_1,\ n_2,\ n_3,\ n_4,\ n_5))$型的图，其中 $1\leqq n_1\leqq f/2$, $n_2=f-1$, $n_3=f-n_1$, $n_4=n_5=1$. 无别的极图.

用图 176 表示这些极图，其中 n_1 分别等于 1 与 $f/2$.

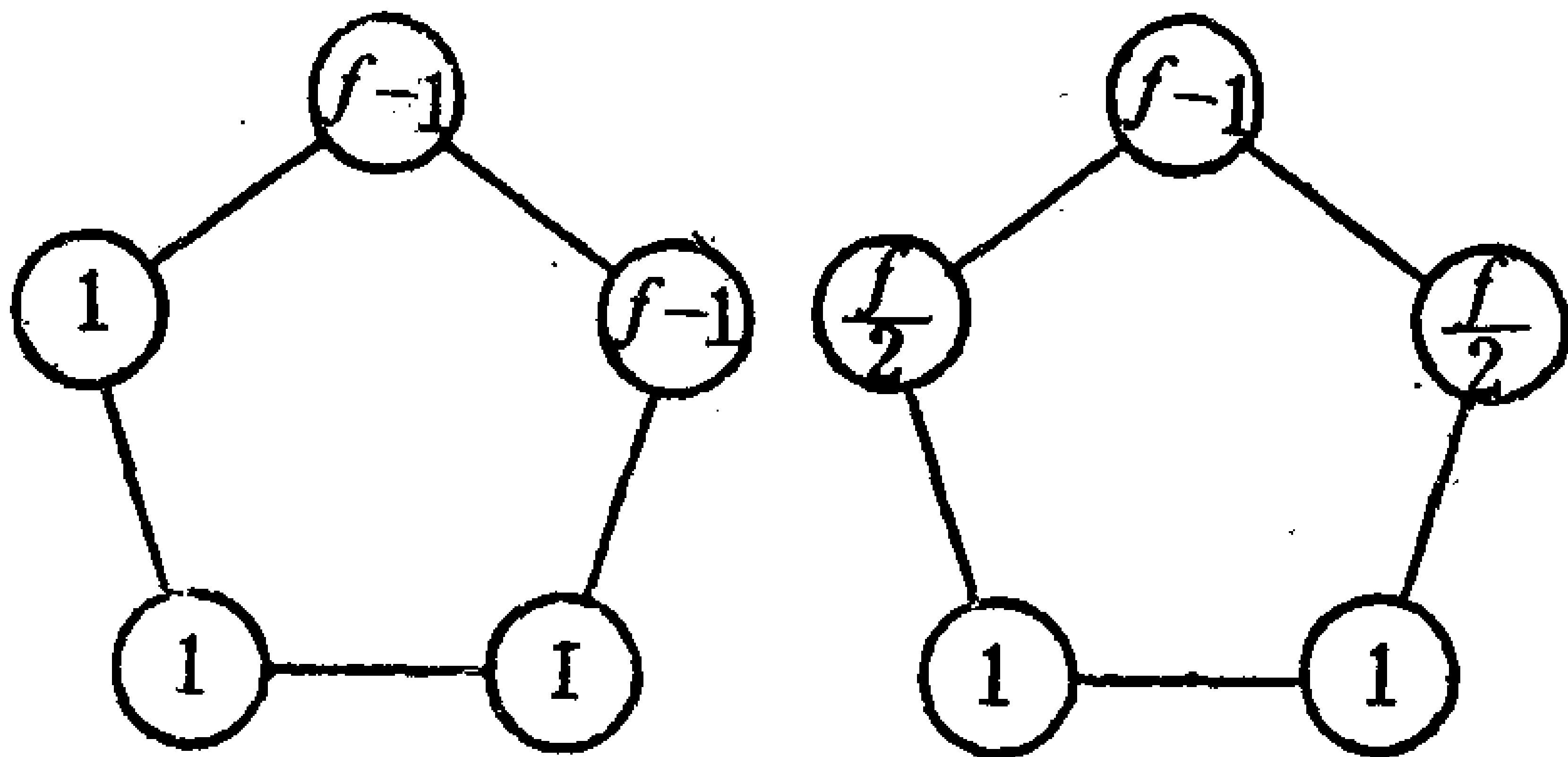


图 176

问　　题

67. 图的序列 G_1, G_2, …定义如下：G_1 是一个 k 顶点的完全图($k \geqq 2$)．为了得到 G_2, 我们考虑一个与 G_1 无公共顶点的新的 k 顶点完全图，然后，我们粘合每图的一顶点而把它们联结在一起．又粘合G_2的一顶点及 k 顶点的新完全图的一顶点而得 G_3(先前与 G_2无公共顶点)．以下的图可类似地导出(例如，图177 所示的 G_5, 对于 $k=4$)．求证 G_m 的边数是$(n-1)k/2$, 其中 n是 G_m 的顶点数，又证 G_m 不含长度大于 k 的回路．

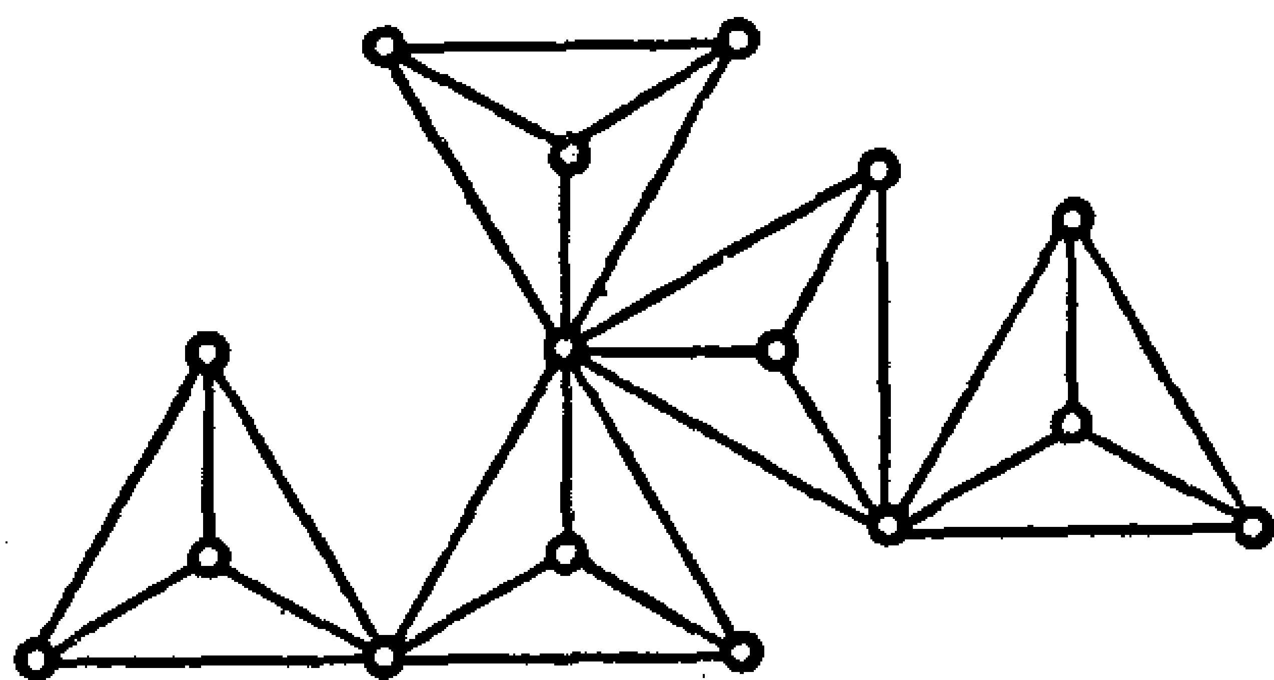


图　177

68. 求证：至少有 5 个顶点的简单连通图，若它的每个顶点的次数至少为 2, 必含一长为 4 的路．

69. 求证：任一简单图，有 8 个顶点及多于 12 条的边，必含一长为 4 的路．

若问题 67 的图 G_m 有 n 个顶点，则

$$n = k + (m-1)(k-1).$$

因此

$$m = \frac{n-1}{k-1},$$

所以，G_m 中的边数是

$$\frac{n-1}{k-1}\binom{k}{2} = \frac{(n-1)k}{2}.$$

易证粘合顶点是问题 67 的图的割点．象这样地“割”一顶点，

就使原来的况状(粘合这些顶点以前)得以恢复：G_m 产生一有m个分支的图，其每个分支都是 k 个顶点的完全图.

图 G_m 是分离的、不同的“块”拼成的，图分解为块可一般地来考察．先以 $m(m>0)$ 表示图中一顶点 p 的次数．删去顶点 p 及它的关联边的端点，放上 m 个新顶点，$q_1, q_2, \cdots, q_m$，使在关联于 p 的边一端关联于一新顶点 q_i．若这些顶点 q_i 中的某些属于此新图的同一分支，则把它们粘合于单个的公共顶点．称所得的图是截割顶点 p 所成的图．图 178 分步地演示截割 p 的过程．显

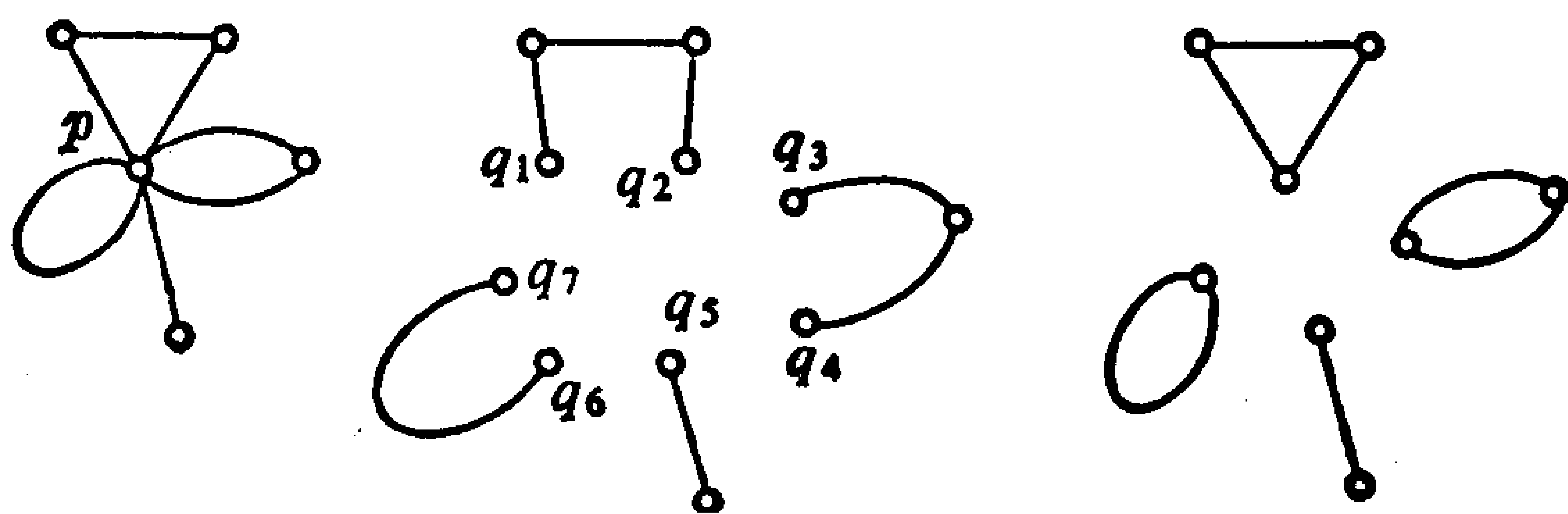


图 178

然，图经截割顶点 p 而有所改变当且仅当 p 是 G 的含 p 的分支中的一割点.

让我们考虑这样的一个顶点 p_1，它是图 G 中一个分支的割点．截割此顶点产生图 G_1．然后，让我们通过截割 G_1 的顶点 p_2 来构造图 G_2，p_2 是 G_1 的一分支内的一个割点．尽可能地继续这一过程．以 G_k 表示这些图的最后一个，并以 $K_1, K_2, \cdots, K_m$表示它的各分支．每个 K_i 是连通的，且均无割点．让我们标出 G 中属于 K_i 的边及其端点．以 T_i 表示 G 的由标出的顶点及边组成的子图 $(i=1, 2, \cdots, m)$．若 K_i 只含一单个的孤立顶点，则令 T_i 恒同于它，称子图 $T_1, T_2, \cdots, T_m$ 为 G 的块．每个块是连通的，任一块中均无割点，可以证明同组的图 K_i 总能得到相同的块，与所选的截割的顶点之顺序无关．显然，G 的每边恰属于 K_i 之一，

所以恰属于图的一块. 若 G 的回路 K 的一顶点 p 于某特定的一步被截割，则 K 的边在截割后成一条路，它的端点在新图中重新得到组合. 因而，若 K 是图 G 的一回路，则 K 的全部的边属于 G 的同一块. 因为截割一顶点 p，当且仅当 p 是 G 的一分支中的割点时图 G 才改变，每个割点将出现于至少两块内，同时所有别的顶点恰出现于一块内. 例如，图 179 的图的块，标上数字对应于同一块的边. 此图有 14 块（孤立顶点是其中之一），割点以黑点来表示. 问题 67 的图 G_m 有 m 块，其中每块是一个 k 顶点的完全图.

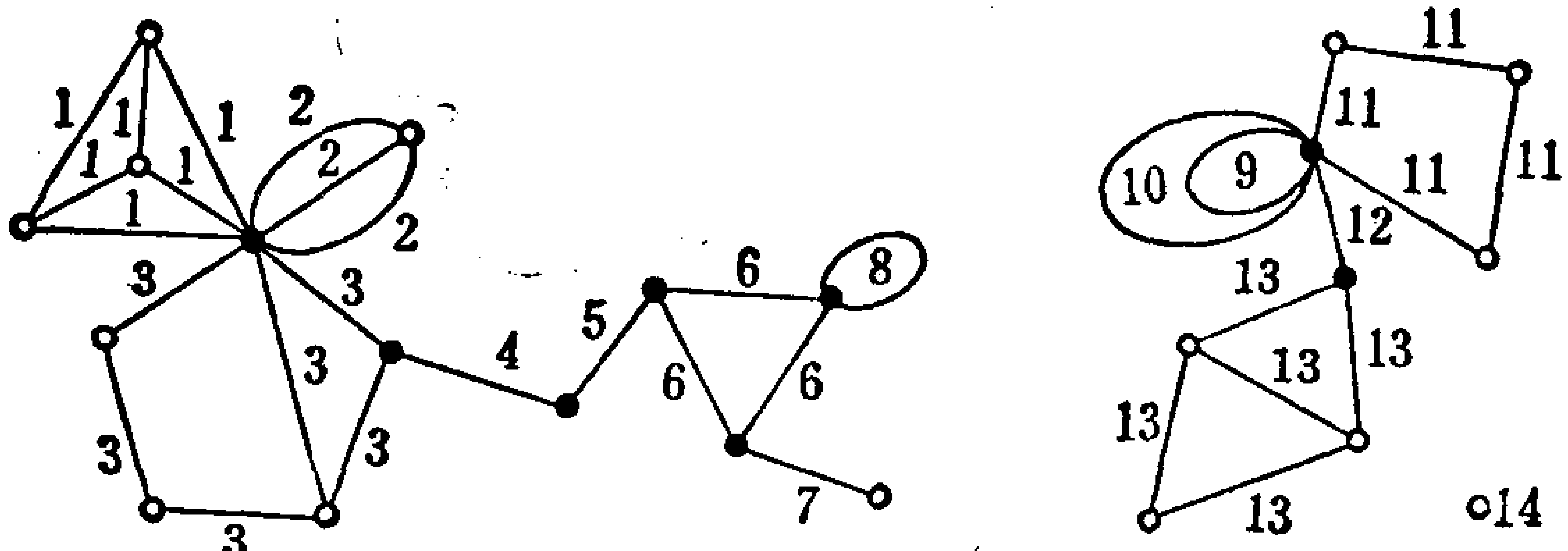


图 179

一个图的块的概念用于说明命题 72 的极图.

为解问题 68，我们观察得图 G 含一回路. 据 1.23，若 G 有一长至少为 5 的回路，于是存在一长为 4 的路. 若 G 的最长回路之一是四边形，据 1.25，则图 180 的图作为一子图含于 G. 在此情况下，存在一长为 4 的路，如粗线所示. 最后，若 G 的最长回路是一三角形，则存在图 181 的子图. 因为 b 的次数至少为 2，它有

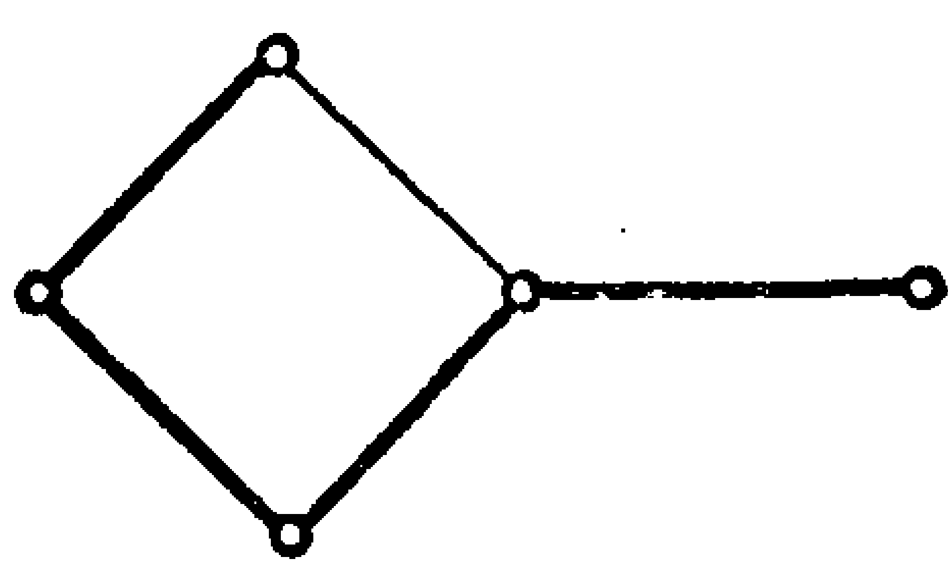


图 180

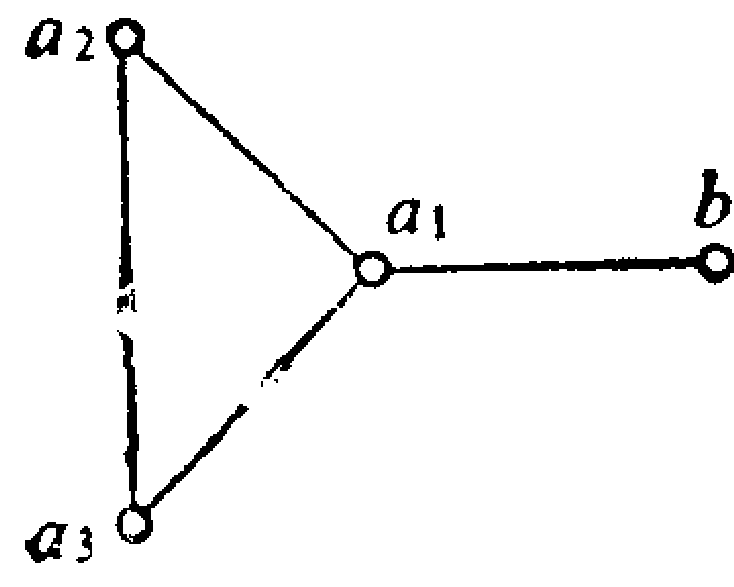


图 181

一邻点 c，异于 a_1．但 c 也异于 a_2 与 a_3，因为否则就存在一长为 4 的回路．因此，在 G 中含有如图 182 的子图，其中有一长为 4 的路，如粗线所示．

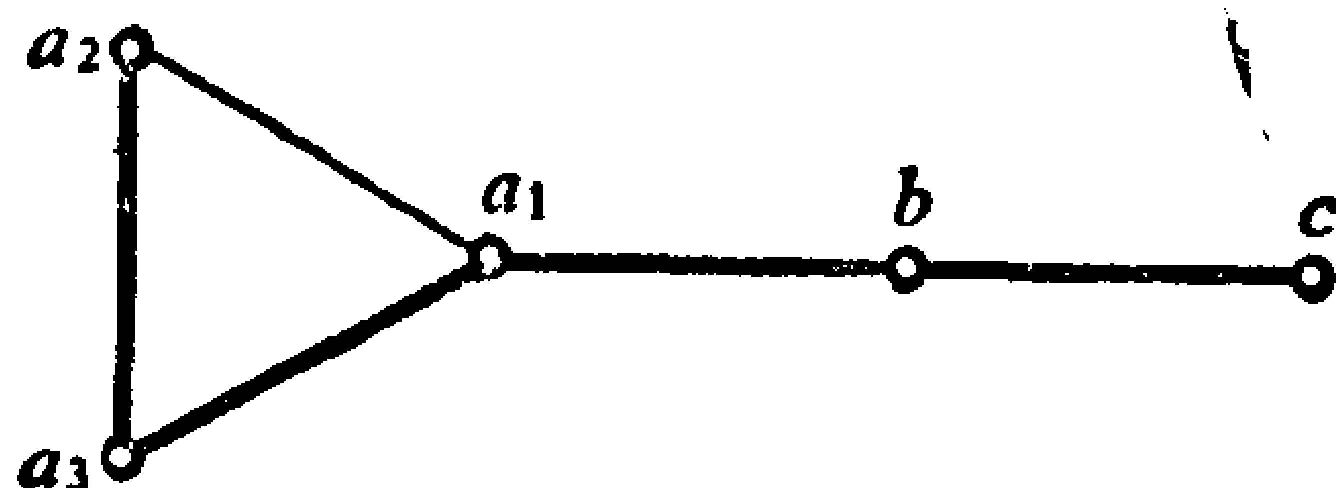


图 182

现在，我们来证下列问题 68 的推广：

70. 若一连通简单图，至少有 $2k+1(k\geqq 1)$ 个顶点，每个顶点的次数至少为 k，则图含有长为 $2k$ 的路．

以 L 表示图 G 的一极长的路，G 满足此命题的条件，并设 a_1，a_2，…，a_m 表示沿 L 的顶点．我们需证 $m\geqq 2k+1$．假设不然，即 $m\leqq 2k$．因为 L 是极大的，全部的 a_1 与 a_m 的邻接点必定出现于路 L 的顶点中间．将证明存在一个下标 i 使得 a_i 邻接于 a_m 且 a_{i+1} 邻接于 a_1．因而得到一长为 m 的回路（见图 183 中的粗线）．因为，至少回路的顶点之一必定邻接于不在回路内的一顶点（见命题 1.25，因为 G 是连通的），这就存在一长为 $m+1$ 的路，因此，矛盾于 L 的极大性．

若不存在这种性质的下标，则 a_1 不能邻接于顶点 a_{j+1}，a_{j+1} 是 a_j 的后继顶点，这里 a_j 邻接于 a_m．因此，由于 a_m 在 L 内至少有 k 个邻接点，至少存在 L 内的 k 个顶点，不能邻接于 a_1，或甚至在 L 内至少有 $k+1$ 个顶点具有此性质（因为 a_1 也在其中）．所以，a_1 至多能有 $2k-(k+1)=k-1$ 个在 L 内的邻接点，这是一个矛盾，因为全部的 a_1 的邻点（数目至少为 k）必在 L 内．

为了解问题 69，以 G 表示一简单图，有 8 个顶点及多于 12 条边，假设没有长为 4 的路．若全部的 G 的顶点的次数至多为 3，则

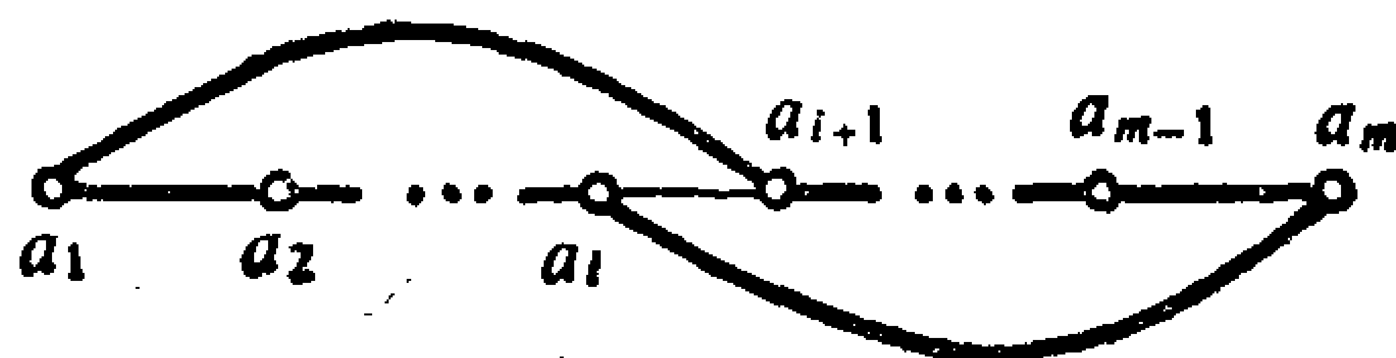


图 183

G 至多有 $8\times3/2=12$ 条边．因此，G 有次数至少为 4 的一顶点，即 G 有一至少为 5 个顶点的一个分支．若这么一个分支的每个顶点的次数至少是 2，据命题 **70**，则 G 包含一长为 4 的路．因此，G 内必存在一次数为 1 的顶点 p_1．让我们删去 p_1，以及关联于它的边．产生的图 G_1 有 7 个顶点，多于 11 条边，不含一长为 4 的路．同理可知，G_1 必有一次数为 4 的顶点，并且因而有次数为 1 的一顶点 p_2．从 G_1 删去 p_2 以及关联于它的边，产生一图 G_2，也能证明有一次数为 1 的顶点 p_3．删去了它使得图 G_3 有 5 个顶点及多于 9 条的边．G_3 不能是一完全图，否则于其中将有一长为 4 的路；因此，它不能有多于 9 条的边，这是一个矛盾．

我们可以注意，存在一简单图有 8 个顶点及 12 条边，没有长为 4 的路．此图有两个分支，其中的每个都是一个 4 顶点的完全图．

现在，我们证明问题 **69** 的下列推广：

71．若一简单图有 n 个顶点，不含长度大于 k 的路 $(k\geq1)$，则它的边数是

$$e\leq\frac{nk}{2}.$$

对于 k 的一个固定值，极图（其中等式成立）是这样图，即其中每个分支是一个 $k+1$ 顶点的完全图．不存在别的极图．

此命题将对 n 用归纳法证明，同时 k 是固定的．若 $n\leq k+1$，即 $n-1\leq k(k\geq1)$，则所考虑的图不能有一长度大于 k 的路，它的边数至多等于 n 顶点的完全图的边数，即，

$$e \leq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \leq \frac{nk}{2}.$$

这里，当且仅当若图是一有 $k+1$ 个顶点的完全图时等式 $e=nk/2$ 成立.

现在，我们假设 n 与 k 是固定的，$k \geq 1, n > k+1$，并假设我们的命题对于此 k 的值，以及对于少于 n 个顶点的每个图成立. 我们将对于 n 个顶点的全部简单图证明命题. 以 G 表示有 n 个顶点，e 条边，无长度大于 k 的路的简单图.

首先，我们假设 G 是不连通的. 若 $G_1, G_2, \cdots$ 表示 G 的分支，对于一切 i，若 n_i 是 G_i 的顶点数，则据假设，命题 71 显然对每个分支是真的，因为没有一个能包含一长度大于 k 的路. 因此

$$e \leq \frac{n_1 k}{2} + \frac{n_2 k}{2} + \cdots = \frac{(n_1 + n_2 + \cdots)k}{2} = \frac{nk}{2},$$

且等式 $e=nk/2$ 是当且仅当每个图 G_i 是有 $k+1$ 个顶点的完全图时成立.

现在，假设图 G 是连通的. 我们将证明在 G 内存在一顶点 p 使得

$$\varphi(p) \leq k/2.$$

在证明它的存在后，命题将以下列方式导出：我们从 G 删去顶点 p 以及所有关联于它的边，得到一个新图 G'. 此图有 $n-1$ 个顶点，它的路没有一条是长度大于 k 的. G 不能含一个 $k+1$ 顶点的完全子图，否则，据命题 1.25，此子图长为 k 的路之一能扩大为 G 内长为 $k+1$ 的一条路. 因此，据假设，对于 G' 的边数 e_0，下列关系正确

$$e_0 < \frac{(n-1)k}{2},$$

由此

$$e = \varphi(p) + e_0 < \frac{k}{2} + \frac{(n-1)k}{2} = \frac{nk}{2}.$$

所以，还需证明 G 有一次数不大于 $k/2$ 的顶点. 让我们假设不然. 有两种情况必须分开考虑: k 或是偶数，或是奇数. 即分别有 $k=2m$ 或 $k=2m+1$. 在任何情况下，对 G 的每个顶点 p，都有

$$\varphi(p)\geqq m+1.$$

若 $k=2m$ 则 $n\geqq 2m+2$，因为 $n>k+1$. 甚至若 $n\geqq 2m+3$，则据命题 70，G 含一长度至少为 $2m+2=k+2$ 的路；若 $n=2m+2$，则据 4.14，G 有一哈密尔顿回路，表明也存在一长为 $2m+1=k+1$ 的路.

若 $k=2m+1$，则由 $n>k+1$ 推出 $n\geqq 2m+3$，则据命题 70，G 有一长为 $2m+2=k+1$ 的路.

两种情况都产生一矛盾，所以 G 有一次数不大于 $k/2$ 的一顶点. 因此，命题 71 得证.

一相似的，但稍困难的推理导出结果：若一简单图，有一固定的顶点数，有一相当大的边数，则它含一十分长的回路. 下列命题更确切地表达这些结果，证明从略.

72. 若一简单图，有 n 个顶点与 e 条边，不含长度大于 k 的回路($k\geqq 2$)，则

$$e\leqq\frac{(n-1)k}{2}.$$

极图(其中等式成立)是连通的，它的块全是完全图，每个有 n 个顶点.

图 G 的回路 K_1 与 K_2，称它们是**边不重的**，若它们无公共边；称它们是在 G 中**顶点不交的**，若它们无公共顶点. 显然，在后一情况，它们也不能有公共边.

练　习

73. 试确定下列 n 顶点的简单图 G 的边数($n\geqq 3$)：G 含一

三角形 H. 以 P 表示 G 的不在 H 内的顶点的集合. P 是 G 的一独立顶点集，且 P 的每个顶点邻接于 H 的所有的顶点. 以<③, $n-3$>表示此图. 图<③, 4>如图 184 所示.

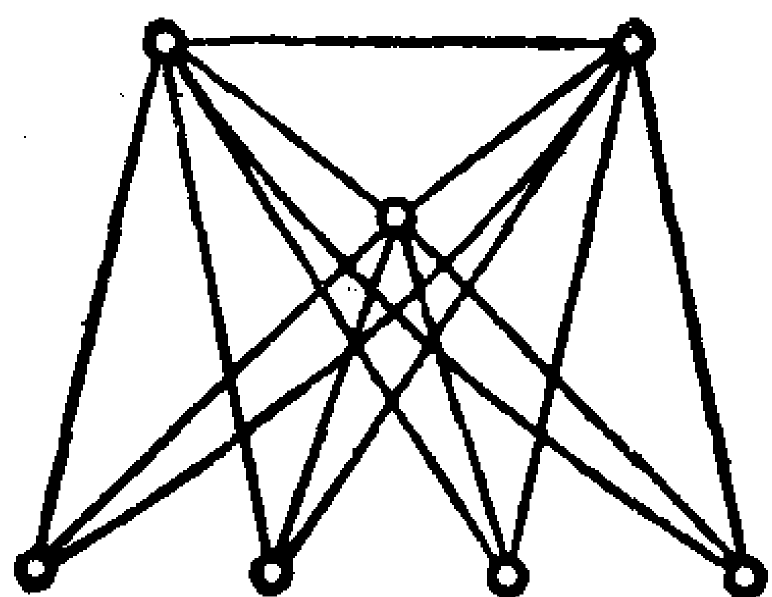


图 184

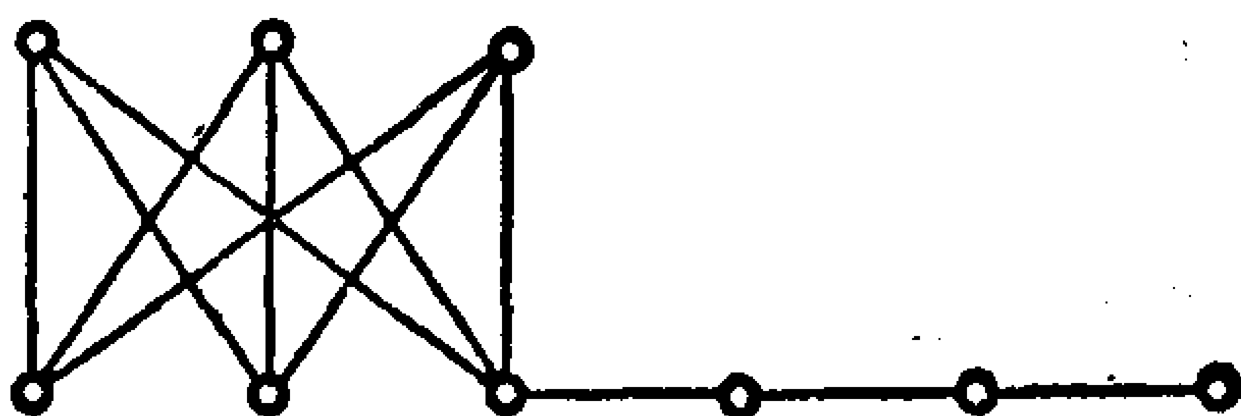


图 185

74. 试确定下列 n 顶点的简单图 G 的边数 ($n\geqq 6$): G 或者是<3, 3>本身或是从<3, 3>以一原先与它无公共顶点的一路的端点与它的一顶点粘合而得的图. 图 185 表示此类型的有 9 个顶点的图.

问　　题

75. 在练习 73 的图<③, $n-3$>内是否存在边不重或顶点不交的回路?

76. 求证: 若简单图 G, 有 n 个顶点($n\geqq 5$), e 条边, 无三角形, 不含顶点不交的两个回路, 则

$$e\leqq 3n-9.$$

77. 求证图 150 的图的每个回路的长至少为 5.

78. 一图, 至多含 9 个顶点. 求证: 若它的每个顶点的次数至少是 3, 则图有一长度不大于 4 的回路.

79. 在练习 74 的图内是否存在任何边不重或顶点不交的回路?

练习 73 中 n 顶点图的边数是 $3+(n-3)3=3n-6$,

练习 74 中 n 顶点图的边数是 $9+n-6=n+3$.

对问题 75 的图 G，若 $n=5$，有两个边不重的回路(若 $n\geqq5$，也行). 现在，我们来证，无论 n 为什么值，G 都没有两个顶点不交的回路. 因为，在练习 73 中提到的集 P 是 G 内的一独立顶点集，又因为 G 是简单的，G 的每个回路至少含有 H 的两个顶点，这证明了本命题.

若在问题 76 内 n 顶点的图 G 不含一回路，则据问题 2.4，它至多有 $n-1$ 条边，又若 $n>4$ 时，$n-1<3n-9$. 所以，假定 G 含有某回路，以 K 记极小长的回路，以 m 记 K 的长，设 G_0 是 G 的子图，它由 G 中不属于 K 的顶点所导出. 在任何情况下，都有 $m\geqq4$.

K 必不能有一对角线，即长为 1 的弦 L，因为若它有长为 1 的弦，K 可由 L 的端点分成两弧. 因为两弧均有长至少为 2. 以 L 去替换其中之任一弧将产生更短的回路.

由于 G 不含顶点不交的两回路，G_0 没有回路. 因此，据问题 2.4. G_0 至多有 $n-m-1$ 条边.

类似地，若 $m\geqq5$，K 也不能有长为 2 的弦，因为若它有，以此弦替换 K 中长至少为 3 的一弧，便会得到一比 K 更短的回路，这是一个矛盾. 因此，若 $m\geqq5$，G_0 内不能有在 K 内有两个邻接点的顶点. 另一方面，若 $m=4$，则 G_0 的任一顶点至多能邻接于 K 的两个顶点. 因为，不然，G 将含一长为 3 的回路. 因此，G 的边是 K 的或 G_0 的边，或者是联结 G_0 的一顶点与 K 的一顶点的那些边，所以，在 G 内的边数至多为

$$m+(n-m-1)+2(n-m)=3n-2m-1\leqq3n-9.$$

因此，问题 76 得解. 注意，也能假设 $n\geqq8$，因为，否则，一无三角形的图不能含顶点不交的两回路.

重述问题 76 我们能说，若一简单图，有 n 个顶点($n\geqq5$)，有多

于 $3n-9$ 条边，不含顶点不交的两回路，则它含一三角形. 出现的问题是：在一 n 顶点的简单图内，若它不含任何顶点不交的回路，其极大边数是多少？可以证明此数是 $3n-6$；更确切地说，下列命题将得证：

80. 若简单图，有 n 个顶点与 e 条边，不含顶点不交的两回路，则

$$e \leqq 3n-6.$$

极图（其中等式成立）是那些型为 <③，$n-3$> 的图. 不存在别的极图.

这些图确实是对于不等式 $e \leqq 3n-6$ 的极图（见练习 **73** 与问题**75** 的解）.

为证命题 **80**，设 G 有 n 个顶点，无顶点不交的两回路. 根据问题 **76** 可以假设 G 含有 3 个顶点的完全图 T_3.

设 G_3 是 G 的子图，由在 G 内而不在 T_3 内的顶点构成. 因为 G 不含顶点不交的两回路，G_3 根本无回路，所以，根据问题 **2.4**，它的边数至多为 $n-3-1=n-4$. 若 G 没有 4 顶点的完全图，则 G_3 的任一顶点至多有 T_3 中的两个邻接点. 因此，G 中的边数至多为 $3+(n-4)+2(n-3)=3n-7$.

现在，假定 G 含有 5 个顶点的完全子图 T_5. 以 G_5 表示在 G 内但不在 T_5 内的顶点构成的子图，显然，G_5 不能含有回路；因此，它的边数至多为 $n-5-1=n-6$. G_5 的任一顶点至多能有 T_5 内的一邻接点，因为不然，G 内将存在两顶点不交的回路（如图186 的粗线所示的边）. 因此，若 $n \geqslant 6$，G 内的边数至多为

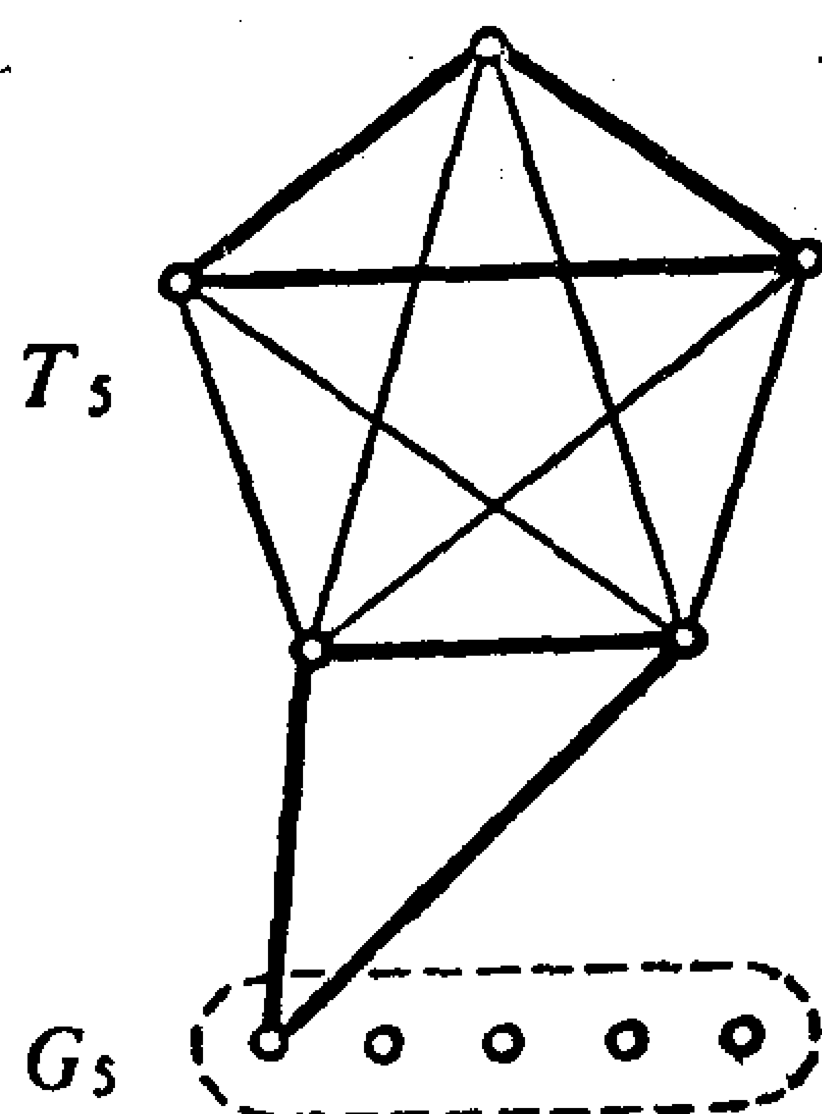


图 186

$$10+(n-6)+(n-5)=2n-1,$$

且 $2n-1\leq 3n-7$.

因此，可以假定G含有4顶点完全子图T_4，但不含任何5顶点完全子图. 以G_4记G的子图，它由在G内而不在T_4内的顶点导出. G_4不含回路，因而它的边数至多为$n-4-1=n-5$. 若G_4的任一顶点至多邻接于T_4的两顶点. 则G内的边数至多为

$$6+(n-5)+2(n-4)=3n-7.$$

G_4中无顶点邻接于T_4的全部顶点，因为G内无5顶点的完全子图. 唯一余下的情况是，G_4有一顶点p_2，它邻接于T_4的三个顶点，比如说，是a_1, a_2及a_3，但不邻接于它的第四个顶点p_1. 若G_4有这样的一顶点p_3，它邻接于此5顶点中的3个，则此三个p_3的邻接点必为a_1, a_2与a_3. 因为不然，在G中就有了顶点不交的两回路(可能的情况之一，见图187内粗线所示的回路，对于别的情况，

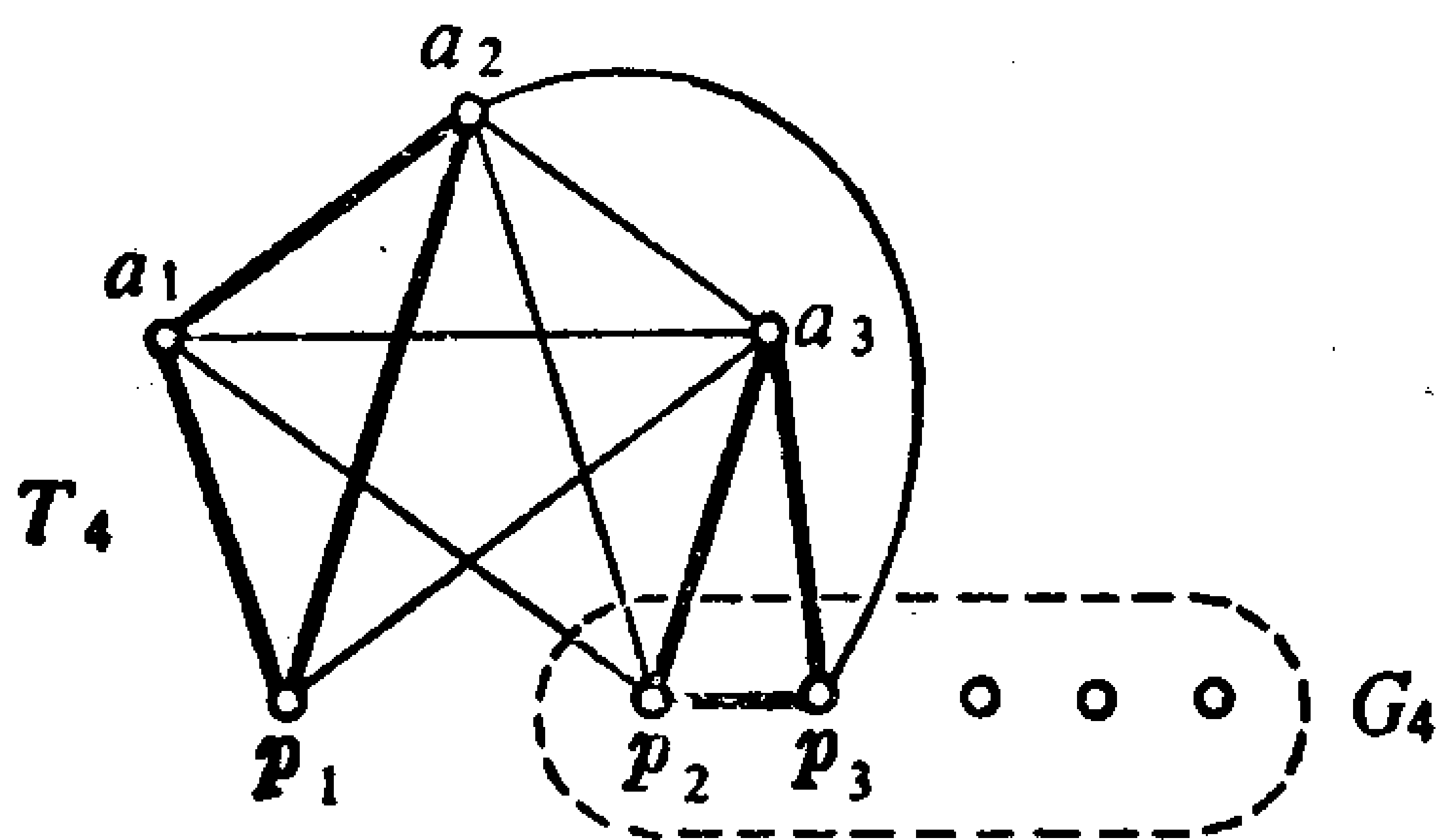


图 187

类似的图形也一样地能画出). 若在G_4中存在任一顶点p_4，邻接于已指出过的6顶点中的至少的3个. 同理，p_4的这三个邻接点也必然是a_1, a_2, a_3. 若此过程对于G_4的所有顶点继续下去，则G仅仅为一<③, $n-3$>型的图. 假设p_k是此过程中标出的最后一个顶点，G_4还有别的顶点. 设G'是G的由这些顶点导出的子图，于是，此图的任一顶点至多邻接于两个标出的顶点. 图G'有$n-k-3$个顶点，不含回路，因此，它的边数至多为$n-k-4$. G的由标

出的顶点导出的子图是一 <③, k> 型的图，有 $3+3k$ 条边，因此，$\bar{G}$ 中的边数至多为

$$(3+3k)+(n-k-4)+2(n-k-3)=3n-7.$$

于是，命题 80 得证.

问题 77 的图中，每个顶点的次数是 3. 我们先来证此图没有含边 $e=\{a, b\}$ 的三角形或四边形(见图 188 中的粗线). 图中没有三角形含边 e，因为关联于 a 与 b 的异于 e 的边无公共顶点，异于 a 与 b 的四条边的端点，在图 188 中以黑点标出，构成图的一独立顶点集；因此，不能有含边 e 的长为 4 的回路. 因为图的任一边能被 e 所替换，总存一 4"黑"顶点的集合存在，此集也总是独立的. 因此，我们的图的全部回路的长至少为 5. 据图的对称性，只需再考虑两种情况：e 在"外"五边形 K 内或是不含 K 内顶点的"五角星"的边.

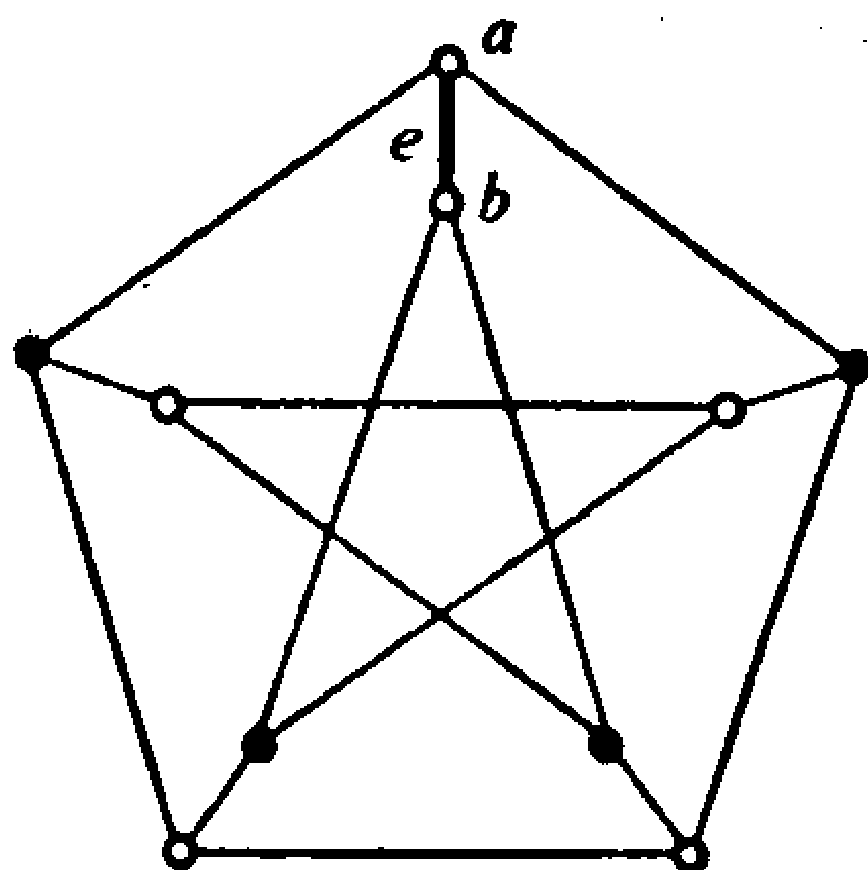


图 188

为证问题 78，我们假定图 G 至多有 9 个顶点，每个顶点的次数至少为 3. 设 K 是 G 的一极小长的回路. 假设 K 的长至少为 5. K 不能有一长小于 3 的弦(参看用于问题 76 的解中的推理). 因此，由于每个顶点的次数至少为 3. K 的每个顶点至少邻接于不在 K 中的一顶点. 但据上述的推理，K 中没有两顶点能有一不在 K 中的公共邻接点. 因此，必至少存在不属于 K 的 5 个顶点；但只存在 4 个. 由此，K 的长至少为 5 的假设不真.

注意问题 78 的命题对于具有 10 个顶点的图不真(见问题 77 的命题).

为解问题 79，以 G 表示练习 74 的图之一. G 的每个回路显

然是G的图<3, 3>的一子图. 因为, G是一简单图, 又<3, 3>是一双图, G的每个回路的长至少为4. 因此, G的任两回路有(至少两个)公共顶点. 现在若K_1与K_2是G中的两边不重的回路, 则它们的公共顶点将在子图<3, 3>中有至少为4的次数; 但图<3, 3>内不存在次数为4的顶点. 所以, G中没有边不重的回路.

现在, 来证练习74的图, 在不含边不重的回路的图中有极大边数(即, 是极图). 也即, 我们证明

81. 每个具有n个顶点及至少有$n+4$条边的图含有两个边不重的回路.

此命题将对n用归纳法证明. 当$n=1$, 命题是真的. 设$n>1$的值是固定的, 假设对于每个$n-1$顶点的图命题为真. 我们来证对于n顶点的图命题同样为真.

设G是n顶点的图, 至少有$n+4$条边. 据问题2.4, G含一回路. 若在G内存在一长至多为4的回路, 则删去它的边得到一n顶点的图G_0, 至少有n条边. 据2.4, G_0也含一回路, 此回路与前一回路无公共边(前一回路的边已删去).

现在, 我们设G的每一回路长至少为5. 则, 此时G是一简单图. 若G中存在次数至多为1的一顶点, 则从G删去此顶点得到图G_1, 有$n-1$个顶点及至少$n+3$条边. 据假设, G_1必有边不重的两回路, 它们也是G内边不重的两回路. 若G有一次数为2的顶点p, 则考虑它的两邻接点q_1与q_2. 这些顶点都不邻接(因为G内不存在长小于5的回路). 让我们删去顶点p(及关联于它的两边)添加一边$\{q_1, q_2\}$. 所得的图G_2有$n-1$个顶点及至少$n+3$条边. 因此, 据假设, G_2有边不重的两回路, 只须以边$\{q_1, p\}$及$\{p, q_2\}$替换$\{q_1, q_2\}$, 这也导致G内的边不重的两回路.

最后, 若G的每个顶点的次数至少为3, G有多于$n+4$条边, 则让我们从G删去(不删顶点)若干边使所得的图G_3恰有$n+4$条

边. G_3 或者有一顶点其次数小于 3, 在此情况下, 上述推理必可用上, 或者每个顶点的次数至少是 3. 在后一情况下, G_3 至少有$3n/2$条边, 即

$$n+4 \geqq \frac{3n}{2}.$$

此时, $n \leqq 8$. 但另一方面据问题 78, 在 G_3 内存在一长不多于 4 的一回路, 因而, 在 G 中也如此; 这是一个矛盾, 因为G 中只有长至少为5 的回路.

由此, 命题 81 得证.

*

练　　习

82. 试证: 存在一有 6 个顶点的简单图G, 使G与它的补图均恰含一三角形.

83. 试证图 189 中的图不含任何三角形.

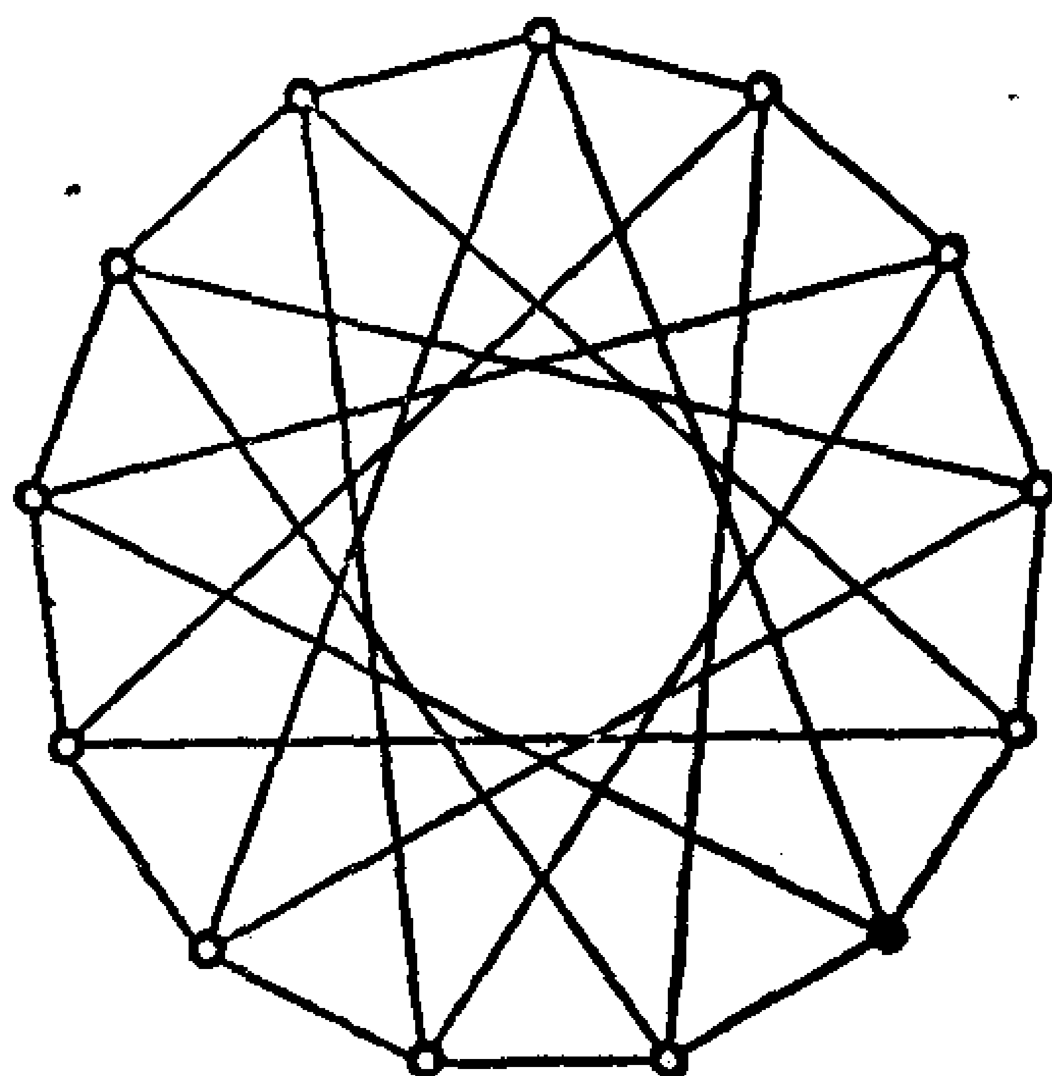


图 189

84. 让我们在一平面上固定 8 个点, 使其中无三点共线. 至少需画出多少直线段以联结点对, 使所得的图中至少含一三角形(其顶点在此 8 个点中)? 若使所得的图含一四边形包括其两对角线呢? 类似地, 于平面中固定 9 个点, 回答同样的问题.

85. 求证对于具有 n 个顶点与 e 条边的简单图, 有

$$iv_{\max} \geqq n^2/(2e+n).$$

何时等式成立?

86. 设 f 与 d 是整数, $f \geqq 3$ 与 $1 \leqq d \leqq f/3$. 回顾图 171 中的

图，对于下列的图，计算 $iv_{\max}$ 的值：

$$\left(\left(\frac{f}{3},\ \frac{f+d}{4},\ \frac{f}{3},\ \frac{f+d}{4},\ \frac{f}{3},\ \frac{f+d}{4},\ \frac{f+d}{4}\right)\right)$$

$$与\left(\left(\frac{f}{3},\ \frac{f}{3},\ \frac{f}{3},\ \frac{f}{3},\ \frac{f}{3},\ \frac{f}{6}+\frac{d}{2},\ \frac{f}{6}+\frac{d}{2}\right)\right).$$

试确定这些图的最低次数．求证这些图既不含三角形也不含长为 5 的回路．

87. 下列的图有 n 个顶点：

$$\left(\left(1,1,1,\frac{n-3}{2},\ \frac{n-3}{2}\right)\right)\quad 及$$

$$\left(\left(1,1,\frac{n-1}{4},\ \frac{n-3}{2},\ \frac{n-1}{4}\right)\right).$$

计算它们的边数并确定值 $iv_{\max}$．求证这些图不含三角形．

88. 描述 n 顶点的图，有尽可能多的边，不含回路或长度大于 2 的路．

89. 描述 4 顶点的简单图，有尽可能多的边，不含长为 4 并有一对角线的回路．

90. 图 190 中的连通图，无一含长为 4 并有一对角线的回路．求证：每个<m, m>型的图有同一性质，又若 $2m$ 顶点的简单图是这些图之一，则它恰有 m^2 条边．

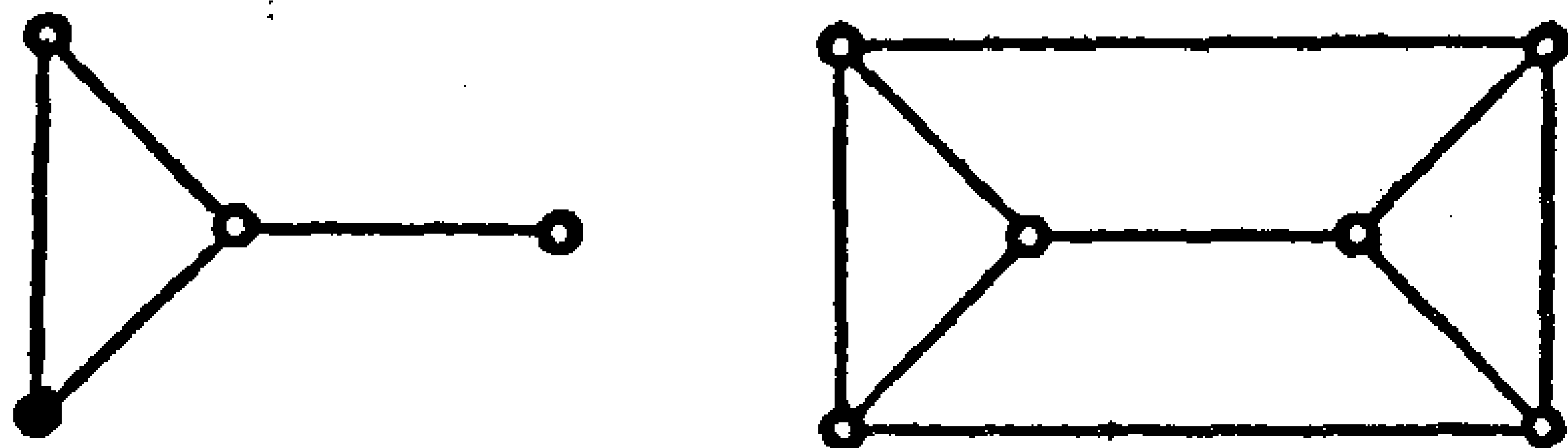
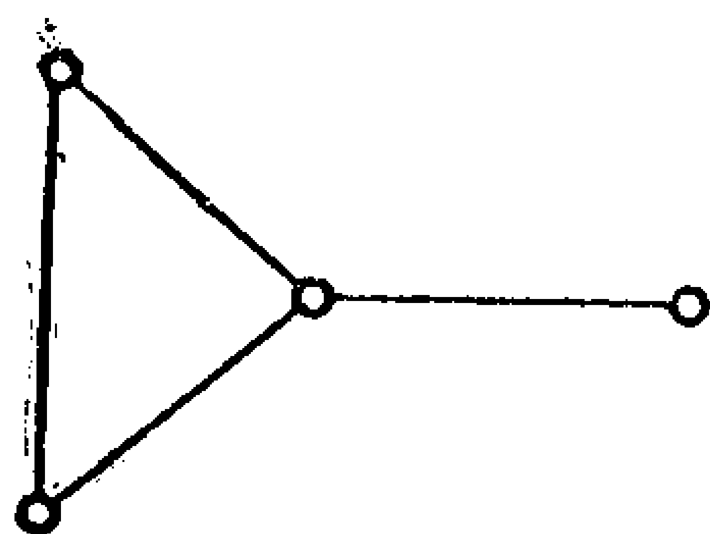


图　190

91. 图 191 中的连通图，无一有一对角线的回路．求证每个<$2, n-2$>型的图有与此相同的性质．又若一 n 顶点的简单图是这些图之一，则它恰有 $2n-4$ 条边．



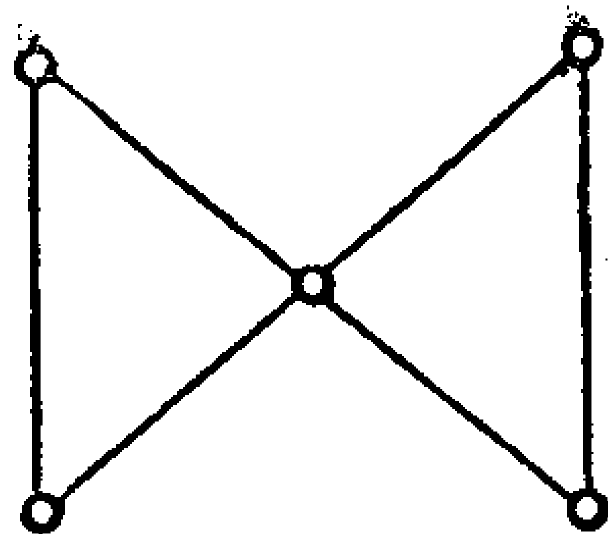


图 191　　　　　　图 192

92. 在图 192 的图中，能找出多少个不同的极大独立顶点集？

问　　题

93. n 个顶点的不连通的简单图可能的极大边数是多少？描述此问题的极图，即有极大边数的那些图.

94. 已指出过(本章开头)长为 5 的回路是定义数 $n(3,3)$ 的问题的一极图. 求证这是此问题的唯一的极图.

95. 求证 6 顶点的简单图与它的补图一起至少含两个三角形.

96. 求证对于图 189 中的图，$iv_{max}=4$.

97. 求证 $n(3,5)=14$.

98. 对于问题 26 中定义的数 $f_s(n)$，求证：若 $n\geqq 3$ 是奇数，则

$$f_{n-1}(n)=3.$$

99. 对于 $m\geqq 1, k\geqq 1$，以 $g(m,k)$ 表示具有下列性质的最小整数：对于具有 $g(m,k)$ 个顶点的任一简单图，或者图含一长为 m 的路，或者它的补图含一长为 k 的路. 求证

$$g(m,k)\leqq m+k.$$

100. 求证：若以 k 表示有 n 个顶点且不含三角形的简单图的 iv_{max} 的值，则

$$n\leqq k(k+1).$$

101. 求证下列命题: 设 $n=2f+d$ 与 $1\leqq d\leqq f/3$, 又对有 n 个顶点且不含长度小于 7 的奇回路的简单图 G, 有 $iv_{max}=f$. 若 φ_0 是图 G 中的最低次数, 则

$$\varphi_0\leqq\frac{f+d}{2}.$$

102. 简单图 G 有 n 个顶点与 e 条边, 不含任何三角形. 假定 G 不是双图, 求证:

$$e\leqq\frac{(n-1)^2}{4}+1.$$

103. 求证图的任两块至多有一公共顶点.

104. 假设图有 $2m+1$ 个顶点($m\geqq1$ 是整数)至少有 $3m+1$ 条边, 无环, 求证它含一偶数长回路.

105. 求证: 若一连通简单图, 至少有 4 个顶点, 每个顶点的次数至少为 2, 且不含任何割点, 则图含一长至少为 4 的回路.

106. 命题 71 对于某些图的边数给出一个上界 $\frac{nk}{2}$, 说明此界只能由可被 $k+1$ 整除的 n 的值所达到. 对于 $k=1$ 与 2, 求出对任意的 n 值均能达到的一上界, 并找出全部的极图.

107. 一个具有 n 个顶点的简单图($n\geqq10$), 有 4 个次数不小于 $n-2$ 的顶点. 求证 G 含顶点不交的两回路, 每个回路长为 4.

108. 找出问题 76 的极图.

109. 求证下列命题: 若一个简单图, 有 n 个顶点($n\geqq4$)及 e 条边, 不含任何有一对角线的回路, 则

$$e\leqq2n-4;$$

极图(此时等式成立)是 $\langle 2, n-2\rangle$ 型的那些图, 又图 191 的两个连通图, 分别对于 $n=4$ 与 $n=5$. 不存在其它的极图.

110. 求证下列命题: 若具有 $2m$ 个顶点及 e 条边的简单图(m 是一整数 $\geqq2$)不含长为 4 的任何有一对角线的回路, 则

$$e \leq m^2;$$

极图(此时等式成立)是$<m, m>$型的那些图，又图190的两个连通图，分别对于$m = 2$与$m = 3$. 不存在别的极图.

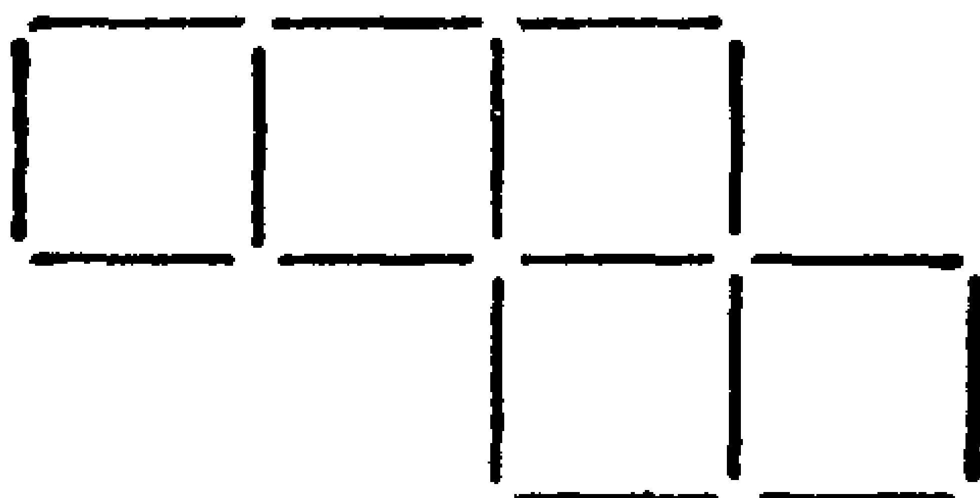


图 193

111. 图193所示的5个方格由火柴组成：方格的每一边即一单根的火柴. 能否移动两根火柴以使方格的个数由5减少到4? (不允许并排地放火柴或把一根放到另一根上；每根火柴必须是一方格的边.)存在多少个解?

第七章　练习与问题的解答

第　一　章

27. 先考虑具有 0、1 或 2 条边的图，因为具有 4 个顶点的完全图应含 6 条边，所以，这些图的补图分别有 6 、 5 及 4 条边．这里只细察具有 3 条边的图．其中仅一者含有回路，就是由一个三角形组成的．在画出它的补图后，还剩下一个图：其中含有长为 3 的一条路．所求的解含有 11 个图(请看图 194)．其中的任意两个图是不同构的，而具有 4 顶点的任一简单图同构于它们中的一个．图形中同一列的两个图是互补的．

28. 从刚得到的练习 27 的解，直接表明图 194 最右的图是唯一的具有 4 个顶点且同构于自己的补图的简单图．

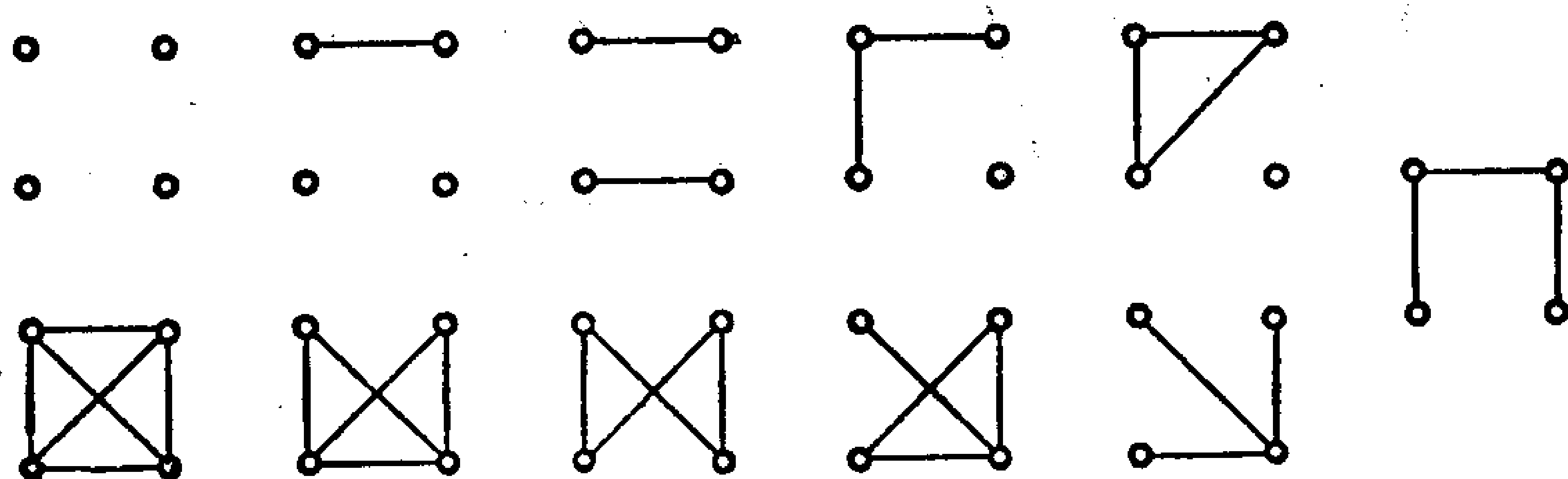


图　194

29. 图 195 中的图表出本练习第一部分的解．现在，我们假设简单图 G 的顶点数大于 6 ．让我们考虑 G 的任意的 6 个顶点，而删去所有其余的顶点以及与之关联的边．所得的图 G'，据问题 14，要么含有一个三角形，它也是 G 的子图，不然就含有三个互相不邻接的顶点．在后一情况，它们在 G 中，也是不邻接的，因为若一条边的两个端点都在 G' 内，那么，这条边不曾删去．

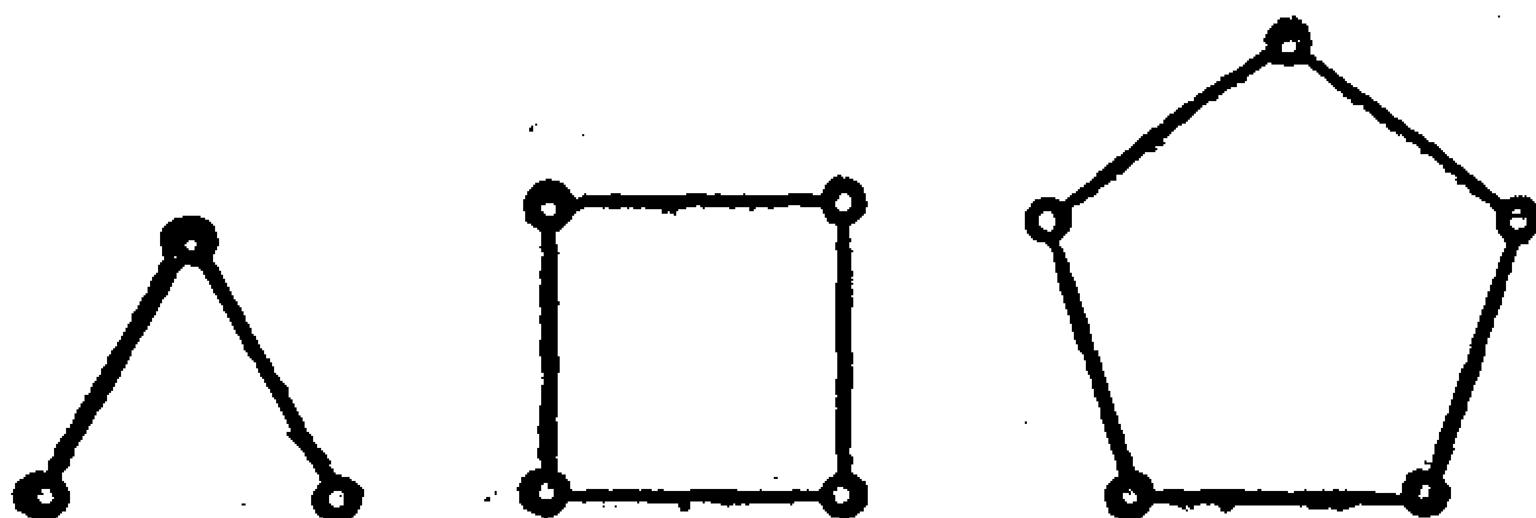


图 195

30. 这样的图的分支是一个孤立顶点、一条路或一个回路，而不存在其它的可能性.

31. 在所讨论的图的每个分支至少应有 4 个顶点. 在练习的第一部分，可能的图只有两个分支，每个分支都是具有 4 个顶点的完全图；第二部分，有三个图是可能的，其中之一如图 196 所示. 另外的两个图，可以在具有 5 个顶点的分支中添加边$\{a, b\}$，或边$\{a, b\}$与$\{c, d\}$而得到.

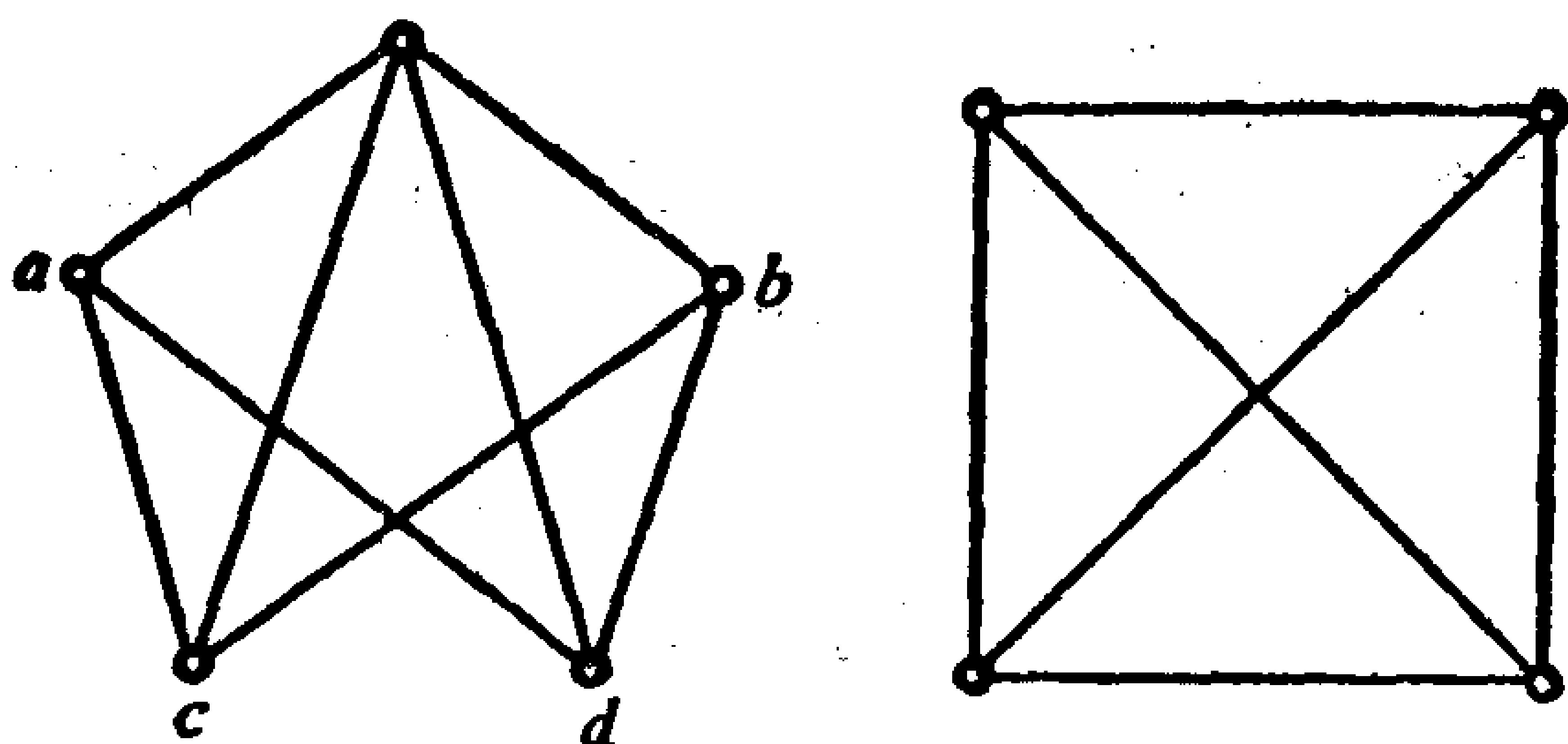


图 196

32. 设G是一个合要求的不连通图. 又设G_1是它的分支之一，G_2是其它分支一起合成的图. 于是，把G_1的一个顶点联结于G_2的一个顶点的边一定属于G的补图. 这些边的数目是1×6、2×5或3×4，依G_1的顶点数而定. 因此，G的边数与具有 7 个顶点的完全图的边数$6\times7/2=21$之差，与上述几个乘积中的一个一样大. G的边数是 15；因而只有第一种情况才是可能的. 而G_1与G_2都是完全图. 各有 1 个与 6 个顶点.

33. 必须证下述命题：若具有n个顶点的图至少有$n+1$条边，

则图中有一顶点其次数至少为3．不然，对于具有 n 个顶点的图 G 中，若其每个顶点的次数至多为 2，则 G 的次数和至多为 $2n$．由于任一图中，次数和之半即为边数，它至多有 n 条边．产生矛盾．

注意：具有 n 个顶点与 n 条边的图不一定有次数为 3 的顶点，例如，长为 n 的回路．

34. 若 A 包含图 G_1 的全部顶点，则 $k=0$，据命题 9，命题成立．以下假定 A 不包含 G_1 的全部顶点．G_1 的一条边，若没有一个端点属于 A，就删去这条边．在删完这些边后，把所有不在 A 内的顶点组合成单一的新顶点 b．以 G_2 记新图(参看，比如，图 197) A 的每个顶点的次数在 G_1 中与在 G_2 中是相同的．而在 G_2 中，$\varphi(b)=k$；这个值等于关联到顶点 b 的边数．在 G_2 中与在任何图中一样，奇次顶点数是偶数，因此，如果在 A 中的奇次顶点数为偶数，$\varphi(b)$ 必为偶数；否则，$\phi(b)$ 是奇数．

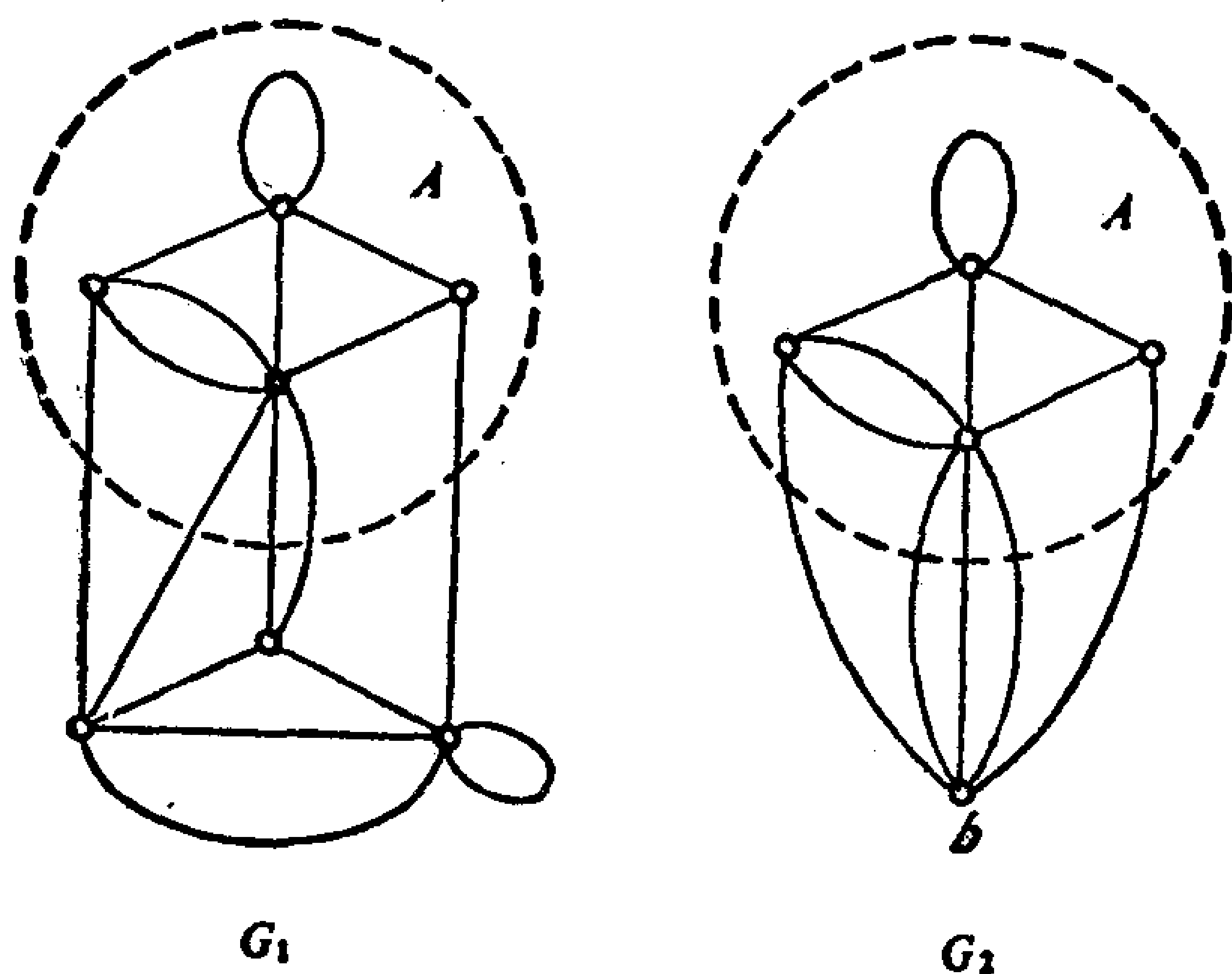


图 197

35. 让我们探求问题的一个合适的图．以所考虑的 $2n$ 个点为图的顶点，只要存在一个圆，它覆盖着对应的两点，则此两顶点是邻接．这个图是简单的，有 $2n$ 个顶点，每个顶点的次数不小于 n．

每条边之所以能画出，就表明它能整个地被一个圆所覆盖．我们只须再证图是连通的；但这一性质与问题 **19** 有关，已经证过了．

36. 取一沿图的边的路，证此命题．

37. 存在唯一的合要求的图，它含有两个分支，其每个都是三角形．

38. 如果满足问题中第一部分的条件，问题 **36** 表明全部分支是回路．据问题 **37**，发现两个图．这些图的补图满足问题中第二部分的条件．因此，图 198 中的四个图回答了问题．

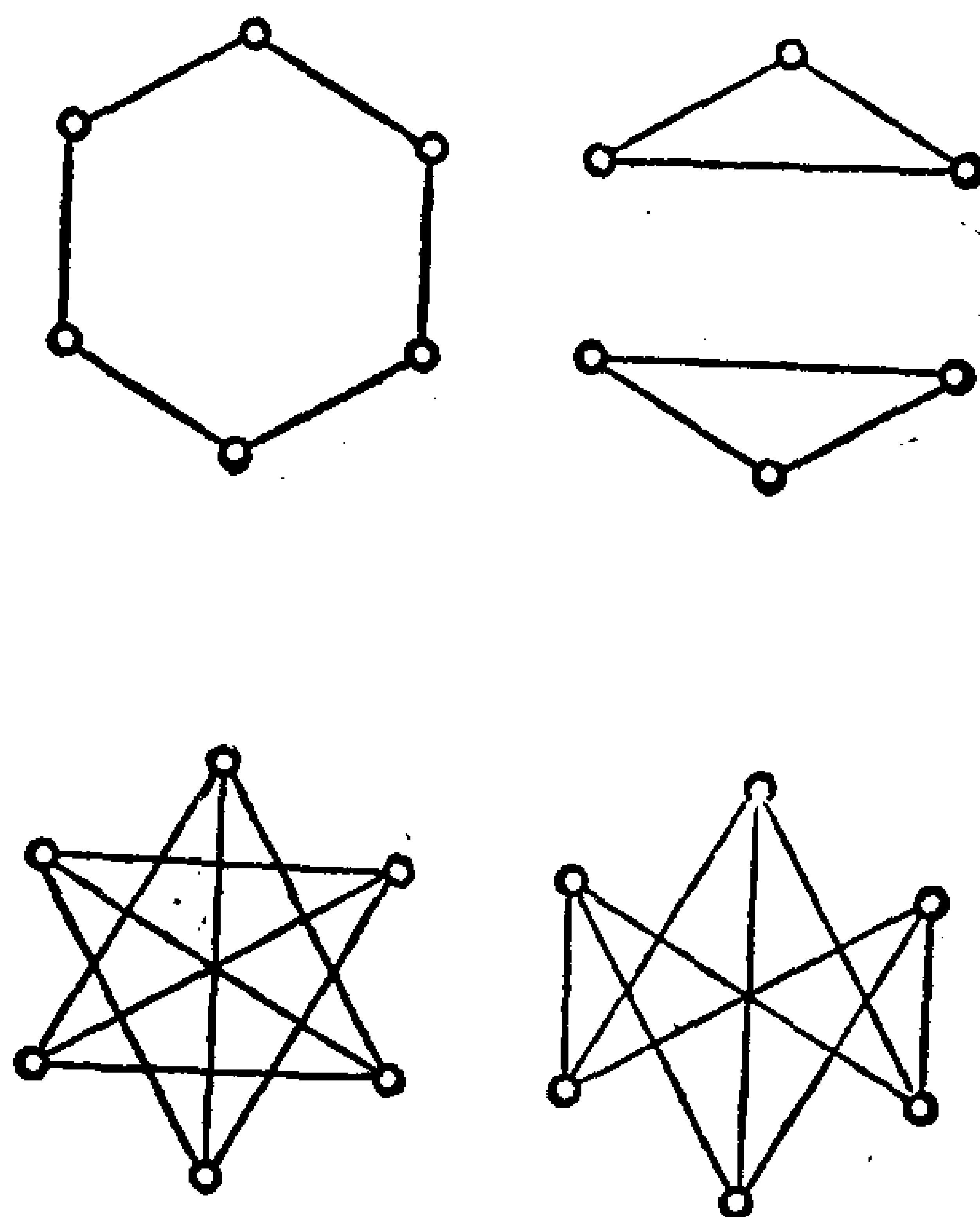


图　198

39. 此问题的第二部分的图，显然是其第一部分的图的补图．我们先找具有 4 条边而不含回路的图．长为 4 的路是这样的图．现在我们找不含长度大于 3 或 2 的路的图．然后，我们找含有长度为 3 或 4 的回路的图．图 199 中的 6 个图适合问题的第一部分，同时它们的补图则是具有 5 个顶点与 6 条边的简单图．

40. 显然，每个合适的图有 5 条边．为了简化问题的解，让我们先找出全部具有 5 条边的简单图．图 200 表示具有 5 个顶点与

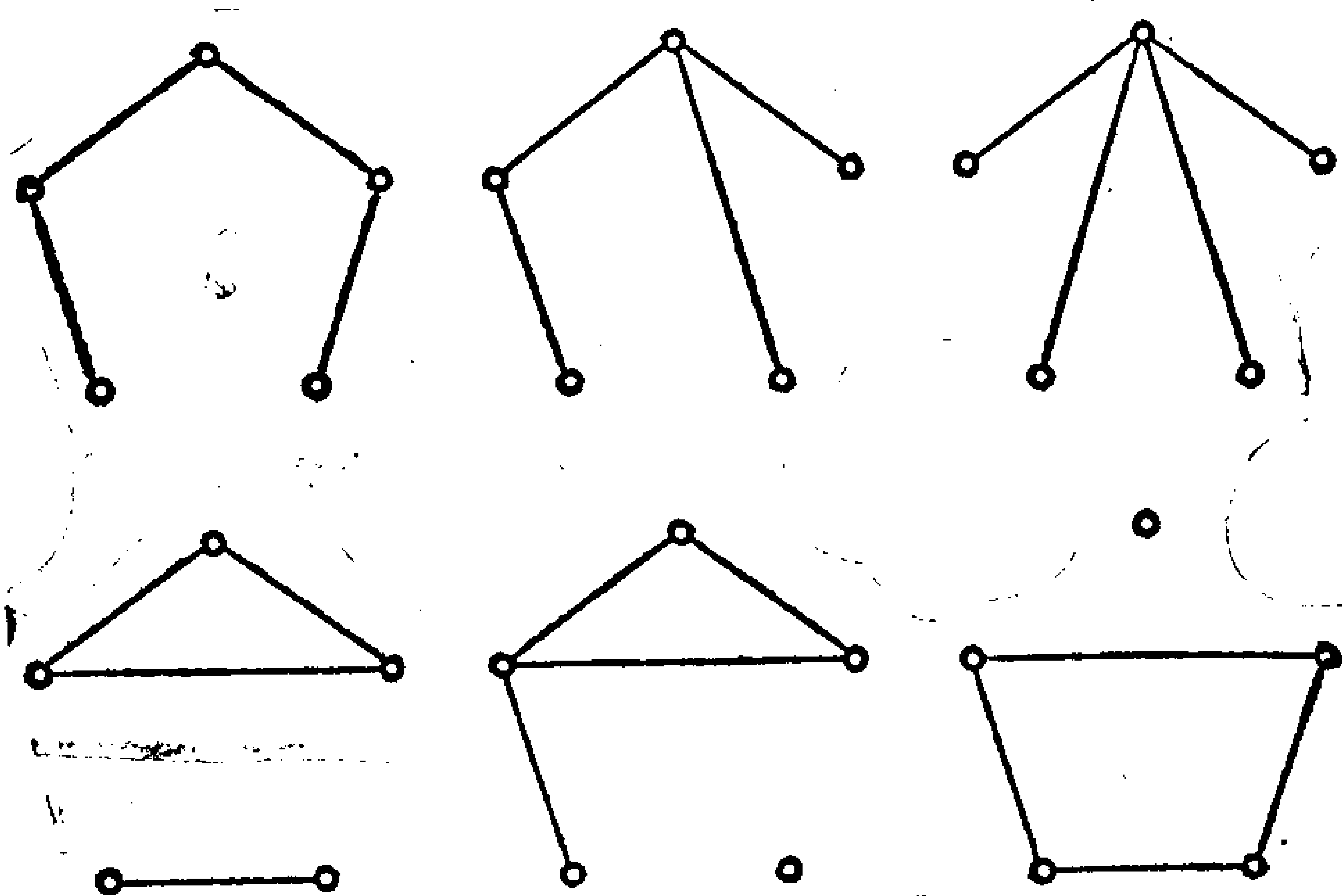


图 199

5 条边的全部简单图——先列举出那些分别含有长为 5、 4 与 3 的回路的图. 图 200 的同一列的图是互补的. 最左边与最右边的图适合本问题.

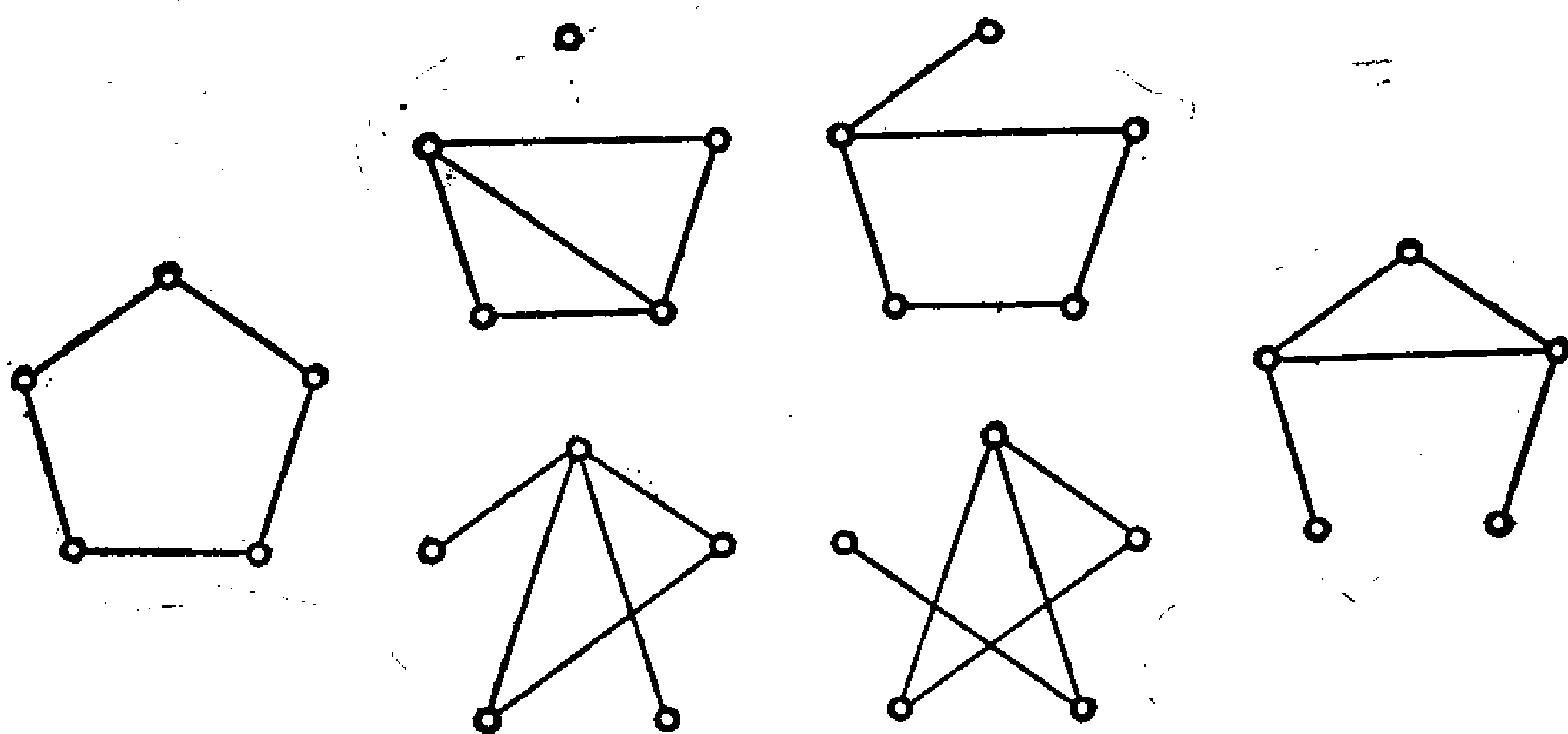


图 200

41. 考察问题 **39**、**40** 与练习 **12**. 只需再找具有 5 个顶点及 0、1 或 2 条边的图. 由于它们的补图分别具有 10、9、8 条边，像这样的图有 4 个，所以后一类型的图有相同的数目. 总计全部实质上不同的,具有 5 个顶点的简单图的个数为 34.

42. 为了证明此命题，设简单图 G 是不连通的. 这情况如图

201 所示；G 的分支 G_1、G_2、G_3 及 G_4(虚线暂不予考虑)．以G^* 表示 G 的补图．可证 G^* 是连通的，即任一顶点可以从另一顶点沿 G^* 中的路到达．如果两顶点在G 的不同分支中，则它们在G^* 中是邻接的(因而能被 G^* 中的一条路所连通)．如果 两顶点 a 与 b 在同一分支 G_i 内(在图形中，$i=1$)，则设 c 是G 的不在G_1中的任一顶点(在图形中，c 在 G_2 内)．边$\{a, c\}$及$\{c, b\}$都是 G^*的边(图中的虚线)，这就表明能找到在 G^* 内 a 与 b 间的路．

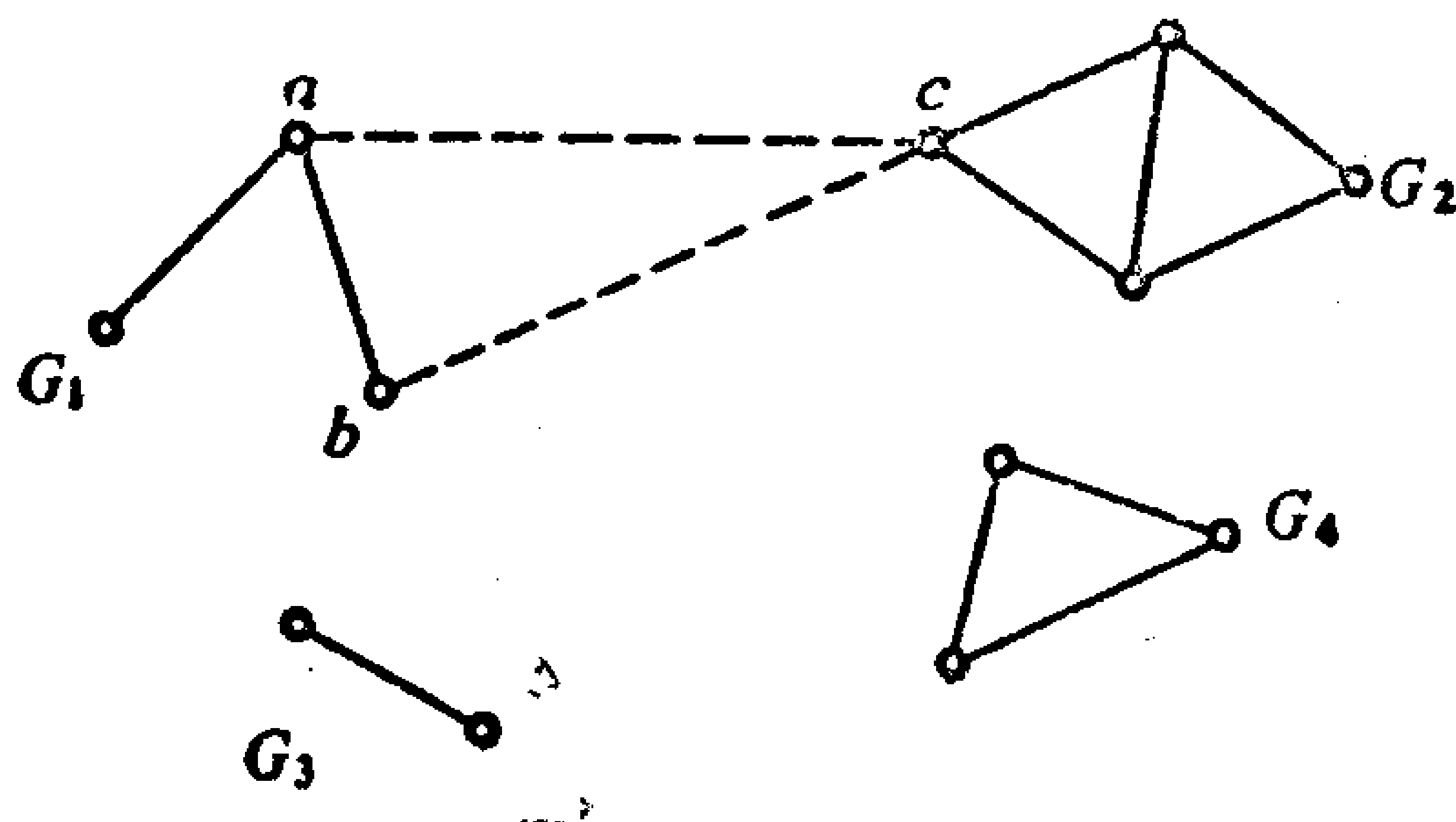


图　201

43. 假设命题不真．就是设 L_1, L_2 都是连通图 G 内的路，长度都是 m，没有公共点(参 看图 202)．以 a 、b 分别记 L_1, L_2 的端

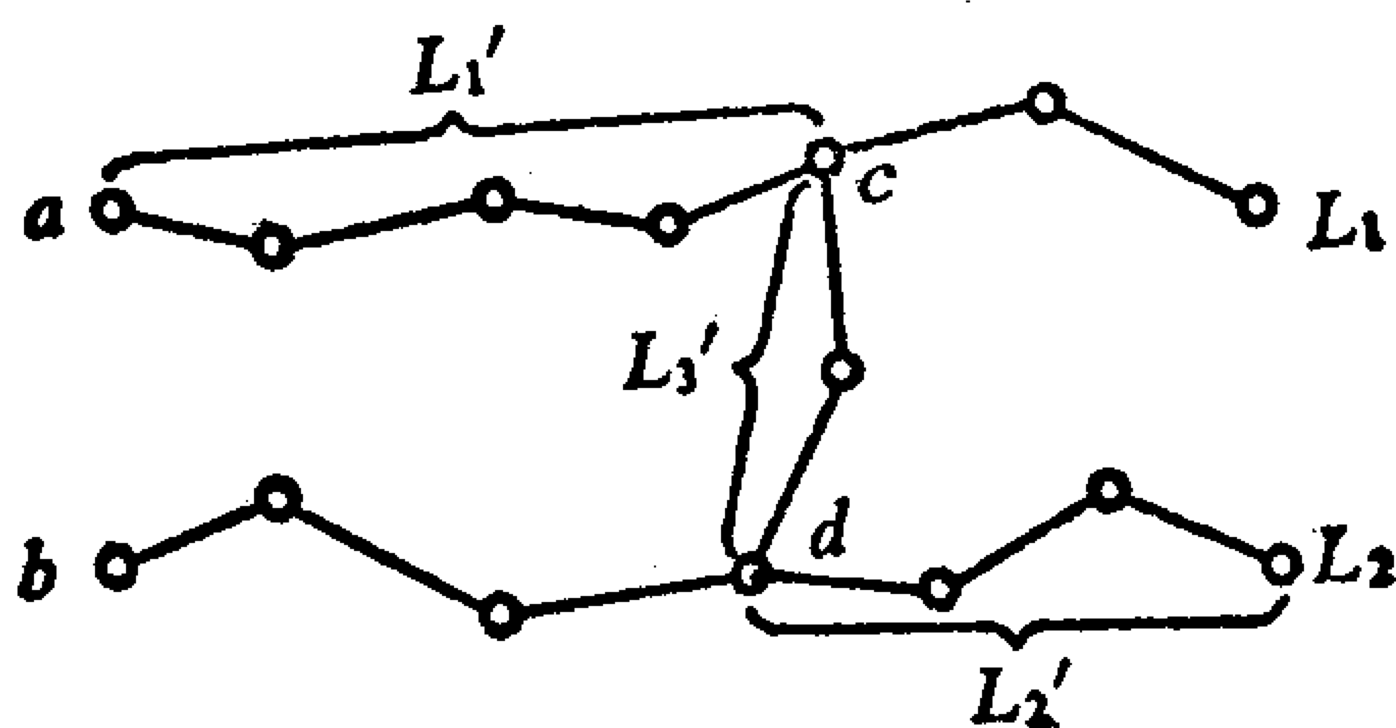


图　202

点．由于G是连通的，在 a，b 间存在着一条路 L_3．于章末我们强调指出过最先与最后的接触顶点的重要作用．现在就来利用这一方法．从 a 出发沿 L_3 走，设 c 是与 L_1 接触的最后一个顶点，d 是离开 c 后，最先接触到L_2的顶点．(据“最长路方法”的原则，c 与

d 都不能是 L_1 或 L_2 的端点.)以 L'_3 记 L_3 在 c、d 间的那部分. 顶点 c、d 分别地把路 L_1、L_2 分成两部分. 每条路中有一部分其长度不小于 $m/2$; 以 L'_1、L'_2 依次表示 L_1 与 L_2 中的这样的部分. 路 L'_1、L'_2 及 L'_3 合成 G 中的一条路, 其长不小于

$$\frac{m}{2}+1+\frac{m}{2}=m+1,$$

因为 L'_3 的长度不小于 1. 由于 G 不含长度大于 m 的路, 这就产生矛盾. 所以, 图 G 中任意两条长为 m 的路必至少有一公共顶点.

44. 这里也使用"最长路方法". 设 L 是所考虑图的最长路之一, 又设 a 是其端点之一. 由于 $\varphi(a)\geq 3$, 存在关联于 a 而不属于 L 的两条边. 以 e_1、e_2 表示这样的两条边, 并以 b、c 分别表示它们的不同于 a 的端点. 若 $b=c$, 则此两边组成长为 2 的一个回路. 因此, 只需考虑 $b\neq c$ 的情况. b 与 c 必属于 L. 图 203 表示这一情况. 路 L 在 a 与 b 间的那部分的长记为 i, 在 b 与 c 间的部分记为 j. 若 i 是奇数, 则 L 在 a 与 b 间的部分与边 e_1 合成一偶数长的回路. 若 j 是偶数, 则又一偶数长的回路, 它由 e_1、e_2 及 L 在 b 与 c 间的部分合成. 最后, 若 i 是偶数同时 j 是奇数, 则 $i+j$ 是奇数. L 在 a 与 c 间的部分与边 e_2 合成一偶数长的回路. 于是问题得证.

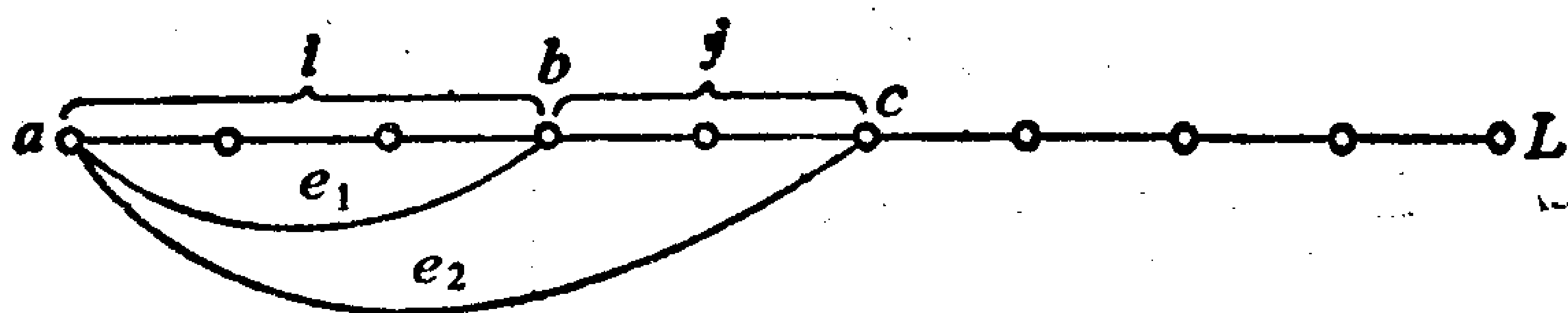


图 203

45. 若此图含有环及多重边, 命题显然成立. 因为一个大于 2 的数是不能整除数 1 或 2 的. 因此, 我们可以把注意力集中于简单图. 我们再一次使用"最长路方法". 所以, 能够证明图 203 中

的图作为我们的图的一个子图而出现. 由此,就找到三个回路,其长分别为 $i+1$, $j+2$ 及 $i+j+1$. 若 $i+1$及 $j+2$ 有一大于 2 的公因子 k,则 k 必也为它们的和 $i+j+3$ 的因子. 所以, k 不能是 $i+j+1$ 的因子, $i+j+1$ 比这个数少 2.

第 二 章

20. 若树不是一个孤立的顶点,则所求的差总是 2. (这是一般性的结果,参看问题 25.)

21. 下列答案是可能的:

1. 一个非环的边,及其两关联顶点一起.
2. 已知图本身.
3. 同构于图 204 的图.

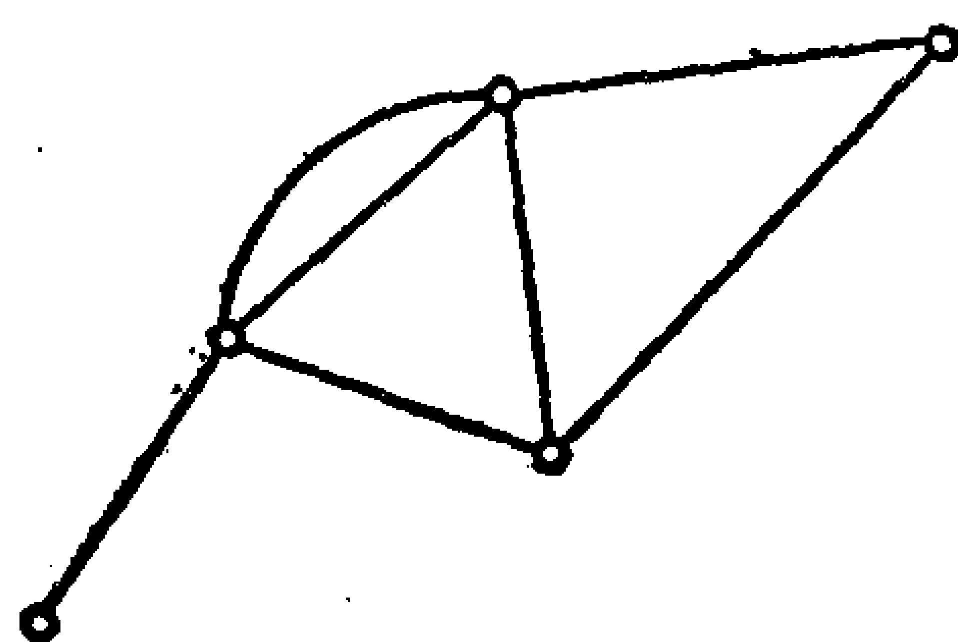


图 204

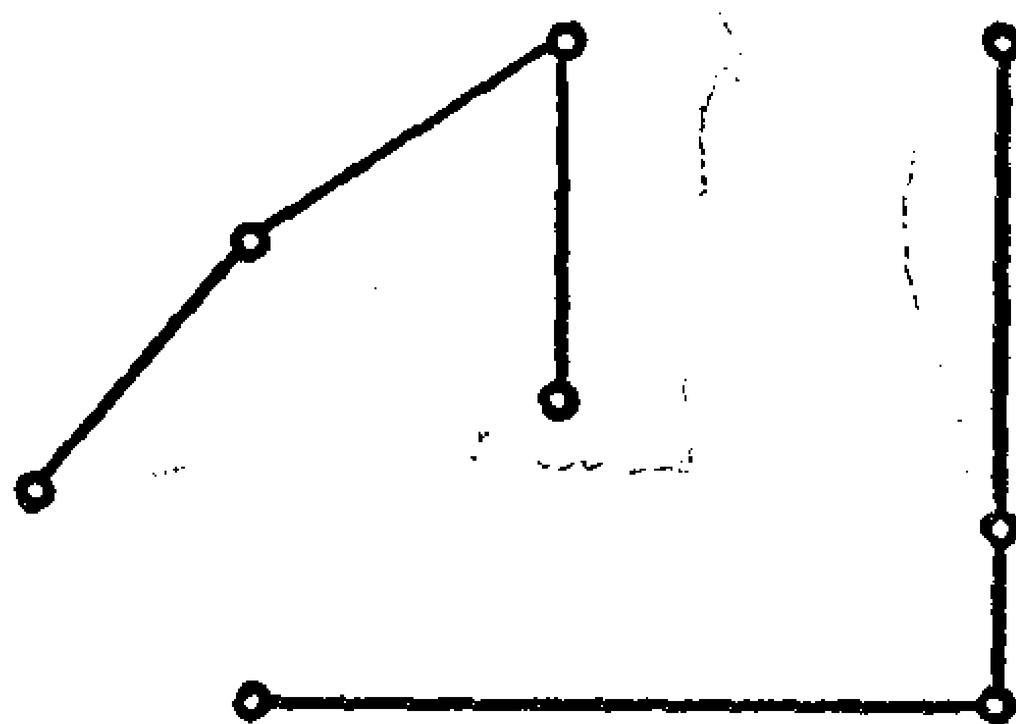


图 205

4. 同构于图 205 的图.

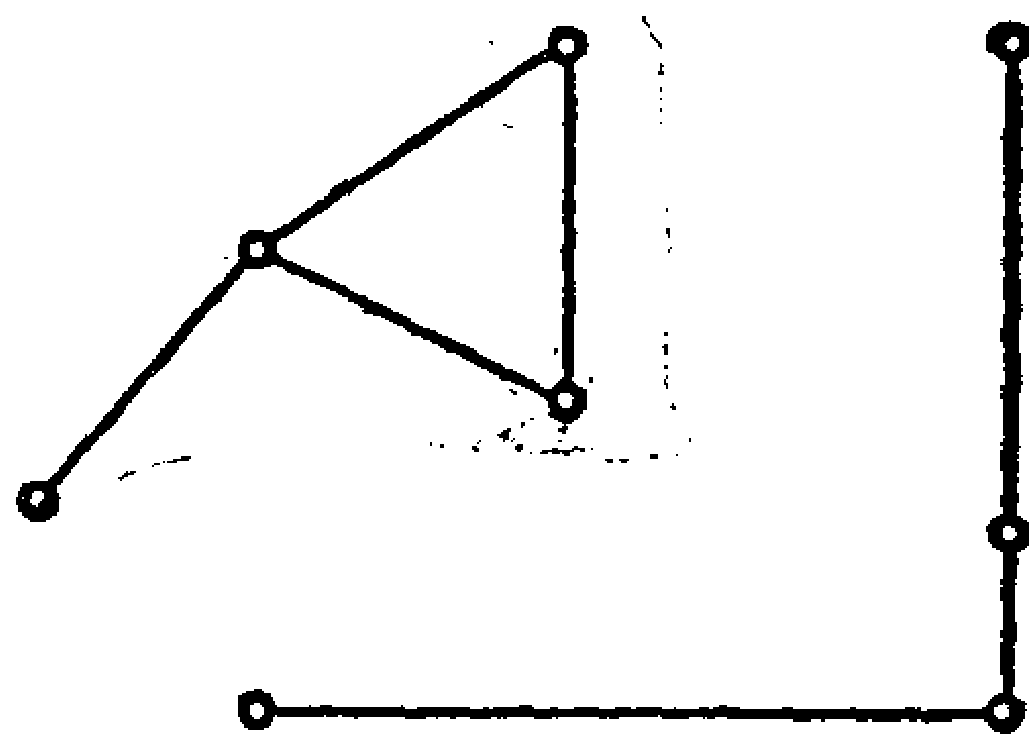


图 206

5. 同构于图 206 的图.

22. 图 207 及图 208 分别是具有极小值与极大值的生成树,

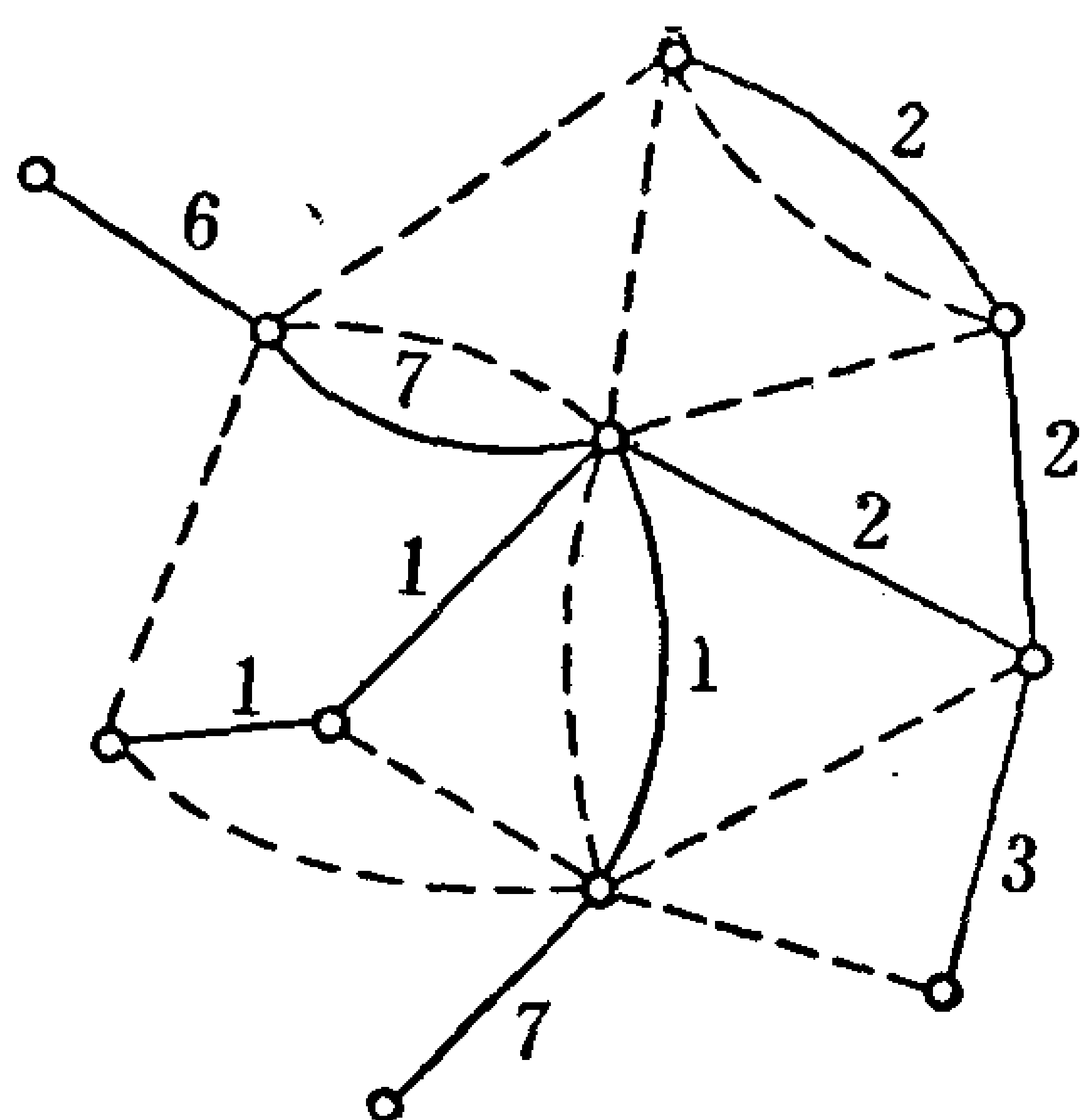


图 207

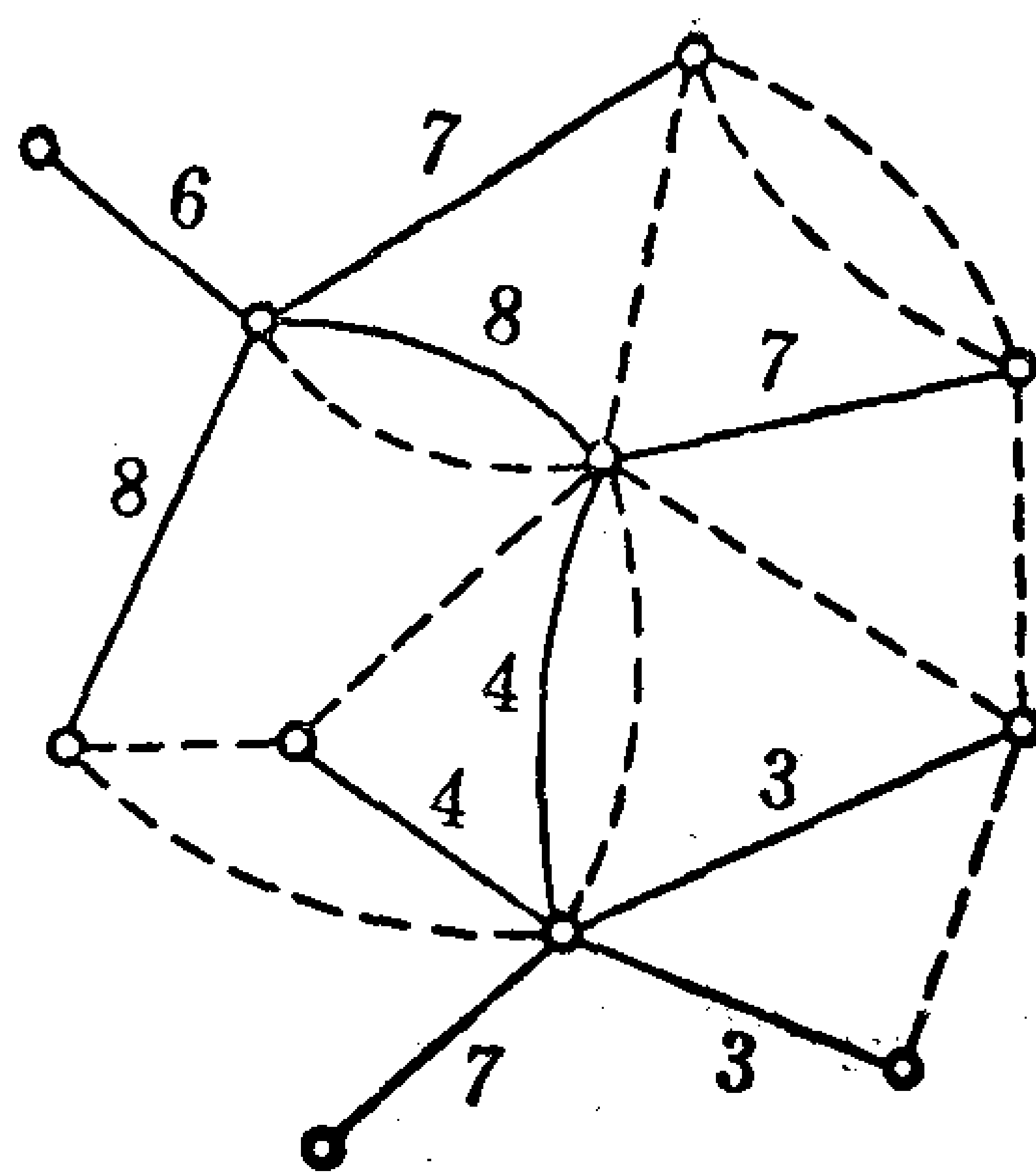


图 208

其值为 32 与 57.

23. 我们选取关联 p_1 的边组成的生成树，关于此树的基本回路组. 应用 K. C. L. 于顶点 p_1, p_2 与 p_3. 三电流方程与两电压方程如下:

(1) $$-I_1-I_2+I_4=0,$$

(2) $$I_1+I_3=0,$$

(3) $$I_2-I_5=0,$$

{1} $$I_2+2I_4+I_5=16,$$

{2} $$-I_1+2I_3-2I_4=0.$$

此方程组的解为 $I_1=-2, I_2=5, I_3=2, I_4=3$ 及 $I_5=5$.

24. 只需证明至少有两顶点的任一树有两个次数为 1 的顶点. 应用(在第一章中提出的)最长路方法. 树的任一最长路的端点在图中的次数为 1. 因为它不含回路.

25. 以 f_k 记图中次数为 k 的顶点数，顶点数是

$$f_1+f_2+f_3+\cdots.$$

由于任一图的边数是顶点次数和的一半 (第一章的命题 **8**).

所以，此时的边数为

$$\frac{1}{2}(f_1+2f_2+3f_3+\cdots).$$

由于我们的图是树，据命题6有

$$f_1+f_2+f_3+\cdots=\frac{1}{2}(f_1+2f_2+3f_3+\cdots)+1.$$

显然，

$$f_1+2f_2+3f_3+4f_4+5f_5+\cdots\geqq f_1+2f_2+3(f_3+f_4+f_5+\cdots),$$

应用前面的方程，知道

$$f_1\geqq f_3+f_4+f_5+\cdots+2=c+2.$$

要使等式

$$f_1=c+2$$

成立，只需

$$f_4=f_5=\cdots=0,$$

即需树中不含次数大于3的顶点(但有次数为1的顶点). 这也说明了练习20的结果之一般性.

26. 回顾练习21，在其四个性质中，仅2与4一起能确定子图中的生成树. 我们要证明此两性质确实表明子图是生成树.

G的一个子图G'如果满足条件1,2与3就是一棵生成树. 若下列命题得证，则问题26得以解决(G'为G的任一子图)：

(a) 若G'是连通图，无回路，恰有$n-1$条边，则它恰有n个顶点.

(b) 若G'恰有$n-1$条边，无回路，则它是连通图.

(c) 若G'是连通图，恰有n个顶点、$n-1$条边，则G'无回路.

命题(a)是显然的，因为G'是一棵树，据命题6，它有n个顶点.

为证命题(b)，以$G'_1, G'_2, \cdots, G'_k$表示G'的分支，G'_i有n_i个顶点. 我们必须证明$k=1$. 由于G'是G的一个子图，

$$n_1'+n_2'+\cdots+n_k'\leqq n.$$

子图 G_i' 全是连通图，当然其中无一回路．自然，因此它们都是树．所以，据命题 **6**，G_i' 有 n_i-1 条边（$i=1,2,\cdots,k$）．因为，边数 $n-1$ 在 G' 内是各分支的边数和，所以，

$$n-1=n_1'-1+n_2'-1+\cdots+n_k'-1=n_1'+n_2'+\cdots+n_k'-k.$$

考虑上述不等式及 $k\geqq1$，得到

$$n_1'+n_2'+\cdots+n_k'-k\leqq n-k\leqq n-1.$$

由最后的两关系式，有

$$n-1\leqq n-k\leqq n-1.$$

得到 $k=1$.

命题（c）是命题 **5** 的一个推论.

27. 据问题 **4**，具有 n 个顶点与 n 条边的图 G 含有回路；以 K 记这些回路之一，若从 K 删去一条 G 的边，则所得图 G' 是 G 的子图，具有 n 个顶点，$n-1$ 条边，并且根据问题 **3**，它是连通的．因此，据前一问题的解中的命题（c），G' 不含回路．所以，G 没有异于 K 的回路.

28. 一个图是简单的，即它不含环，也不含重边．设简单图 G 内的顶点数 $n>4$．G 的补图也含 n 个顶点．它们都有生成林．每者至多能有 $n-1$ 条边（若图是连通的，就恰为 $n-1$ 条边）．若我们能证明 G 或其补图至少有 n 条边，则据问题 **14**，知道 G 或其补图含有回路．但图 G 及其补图一起与具有 n 个顶点的完全图有相同的边数，即 $n(n-1)/2$．由此，G 或其补图至少有 $n(n-1)/4$ 条边．于是，我们只需再证：当 $n>4$ 时，有

$$\frac{n(n-1)}{4}>n-1,$$

即 $$n^2-5n+4>0,$$

或 $$(n-1)(n-4)>0,$$

而此关系当 $n>4$ 时是成立的.

29. 设 G' 是 G 的一个无回路的连通子图. 若 G 不含回路, 则 G 本身是所求的 G' 的扩大图. 若有一回路 K 含于 G 内, K 必有一边不在 G' 内, 因为 G' 不含回路. 从 G 删去边 e 得图 G_1. G' 也是 G_1 的子图, 因为 e 也不在 G' 内. 据问题 **3**, G_1 是连通的, 并且含有 G 的全部顶点. 若有一回路 K_1 含于 G_1 内, 则存在 K_1 的一条边 e_1, 它不在 G' 内. 从 G_1 删去 e_1 得一新图 G_2, 据问题 **3**, 它仍是连通的, 含有 G 的全部顶点并以 G' 为其子图. 继续这一过程, 直到所得的图 G_m, 不再有回路, 则 G_m 就是 G 的一棵生成树. 因为它是连通的, 含有 G 的全部的顶点、且不含回路. 而 G' 同样是 G_m 的子图; 所以, G_m 是 G' 的一个所求的扩大图.

30. 以 F 记原来的图, 它是树. 则 G_1 与 G_2 也是树. 连通图 G_3 内任两顶点 p_1 与 p_2 的路必含于 G_3, 因为 p_1 与 p_2 是 G_1 与 G_2 的又是 F 的顶点. 由问题 **9** 知道, 这三图之任一个均恰有一条路使它们连通, 因此, F 内的所说的路也必重合于 G_1 与 G_2 中的路, 即它们是同一条路. 它的边全是 G_1 与 G_2 的公共边, 所以这路也属于 G_3.

31. 以 G_0 表示自 G 删去 G' 的边后所得的图, G_0 不含回路因为 G 中每一回路至少有一边已被删去. 这样, 据问题 **29**, G_0 可以扩大为 G 的生成林(将其每个分支扩大为生成树). 由于 G 的每个生成林具有 $n-k$ 条边, 所以 G_0 至多含 $n-k$ 条边, 而 G' 的边数至少为 $e-(n-k)=e-n+k$.

32. 让我们对于图 G 应用寻找经济的生成树的第二种方法. 在前 s-1 步中, 可以在所讨论的回路 K 中选边. 可能有 s 种不同的选法, 所得的经济生成树互不相同, 因为 K 的每一边, 除一条外, 都得出现.

33. 本问题可用类似于问题 **10** 的解法来解. 只是需要注意

本问题的图G中的边可能相交——虽然，这一事实对于求解并非必需．下述情况也可能出现，例如，有4个点在一平面内等同如下：我们先画出一正方形的4顶点．考虑对角的两顶点，我们以不同的“小”角度绕中心旋转这两个顶点．（角度要小得使对角线仍相交，且必须互不相同以保证任两点间的距离不等．）这两个点与正方形中没动过的另两顶点，就是所需的4个点．

34. 每家公司都须提出费用估计．以下列方式画出图来：G的顶点对应于城镇．由每家公司推荐的每个管线都对应于一条边，其建造费用写在边旁．我们现在来识别G中具有极小值的生成树．对应于此树之边的管线将被建造．每一管线将由推荐它的承包者来建设．

问题的有趣的特点是判给最低投标的公司承包时，从我们的观点看来，并不一定是最优的．例如，分别由图209中的虚线与实线表示的两家公司提出的计划．所估计的总费用分别是21与23．但极小生成树，在费用上加有圆圈所表示的图形需由两家公司来建造，其总费用仅16．

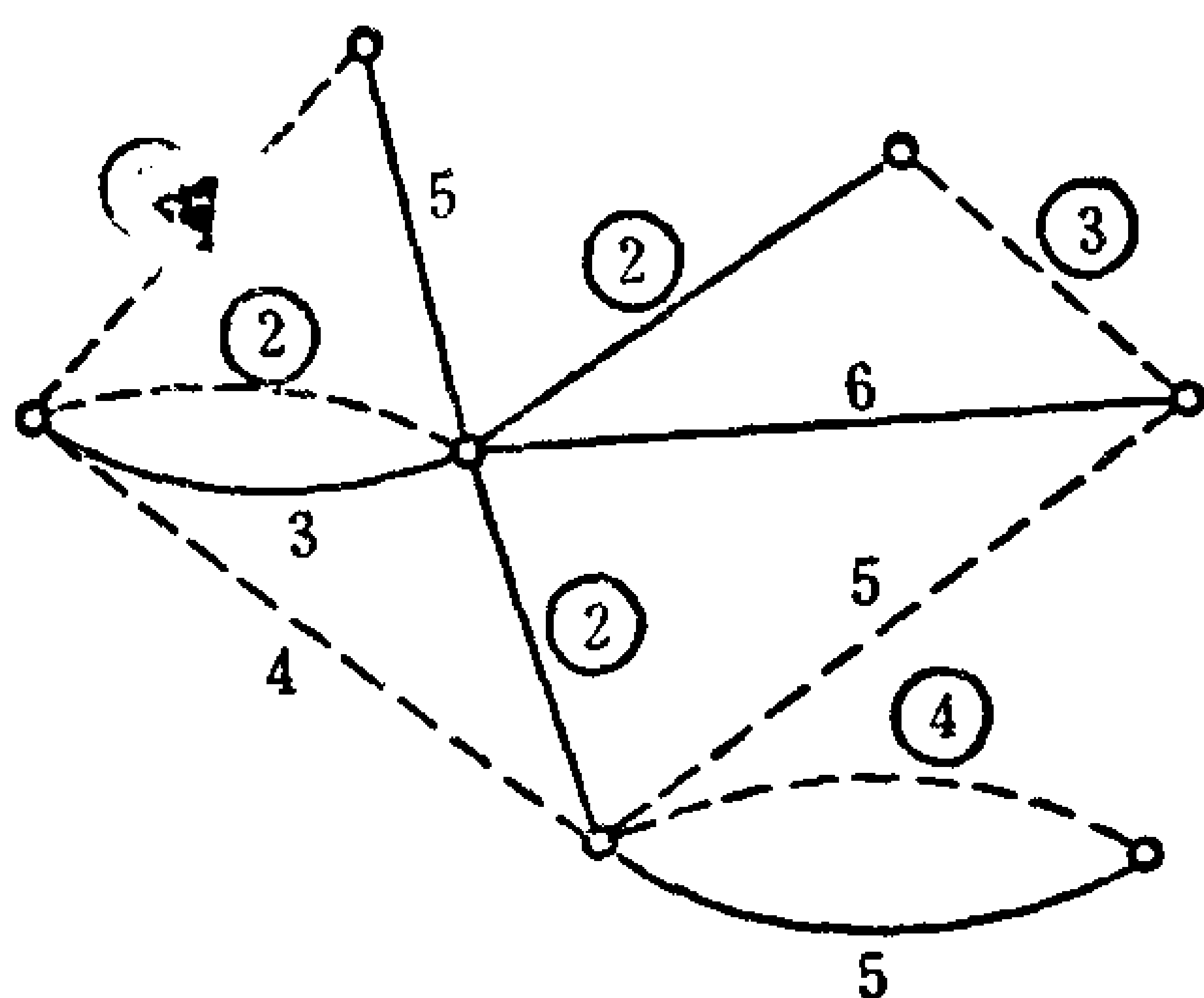


图 209

35. n是网络图的结点数，我们在每个K.C.L.方程中的全部的量收集到方程的左边，并以$f_1, f_2, \cdots, f_n$记这些方程的左边．

则 K. C. L. 方程能写成：

$$f_1=0,$$
$$f_2=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$f_{n-1}=0,$$
$$f_n=0.$$

我们来证 $f_n=0$ 可由其它方程推出．这也是问题的一般情况，因为可把任一方程的下标定成 n.

对于每一 k，边 e_k 的电流 I_k，恰在 $f_1+f_2+\cdots+f_n$ 中出现两次：且以“＋”号及“－”号各出现一次．因为电流 I_k 从 e_k 的一端流向另一端．于是不管各个量的值如何，都有

$$f_1+f_2+\cdots+f_n=0,$$

即

$$f_n=-(f_1+f_2+\cdots+f_{n-1}).$$

因此，前 $n-1$ 个方程的公共解也满足方程 $f_n=0$，即此方程可由其它方程推出.

第 三 章

25. 我们必须沿图 210 的图的边走，如有可能，每边只经过一次；边对应着人行道．我们的图是连通的，每个顶点的次数是偶数；所以，它有一闭欧拉线．沿着任一闭欧拉线都是适合题意的，例如，下面给出的边列：21, 17, 11, 9, 6, 3, 5, 4, 1, 2, 7, 8, 12, 13, 10, 14, 15, 16, 20, 22, 19, 18.

26. 图 211 表示了所求的通行路线.

27. 沿着图 212 的有向图的边的路线即为所求，如果可能，按边的方向经过每边仅一遍．因为，图是连通的，每个顶点的入次数等于它的出次数，图有一闭欧拉线，它就引出一个经济的解．图形

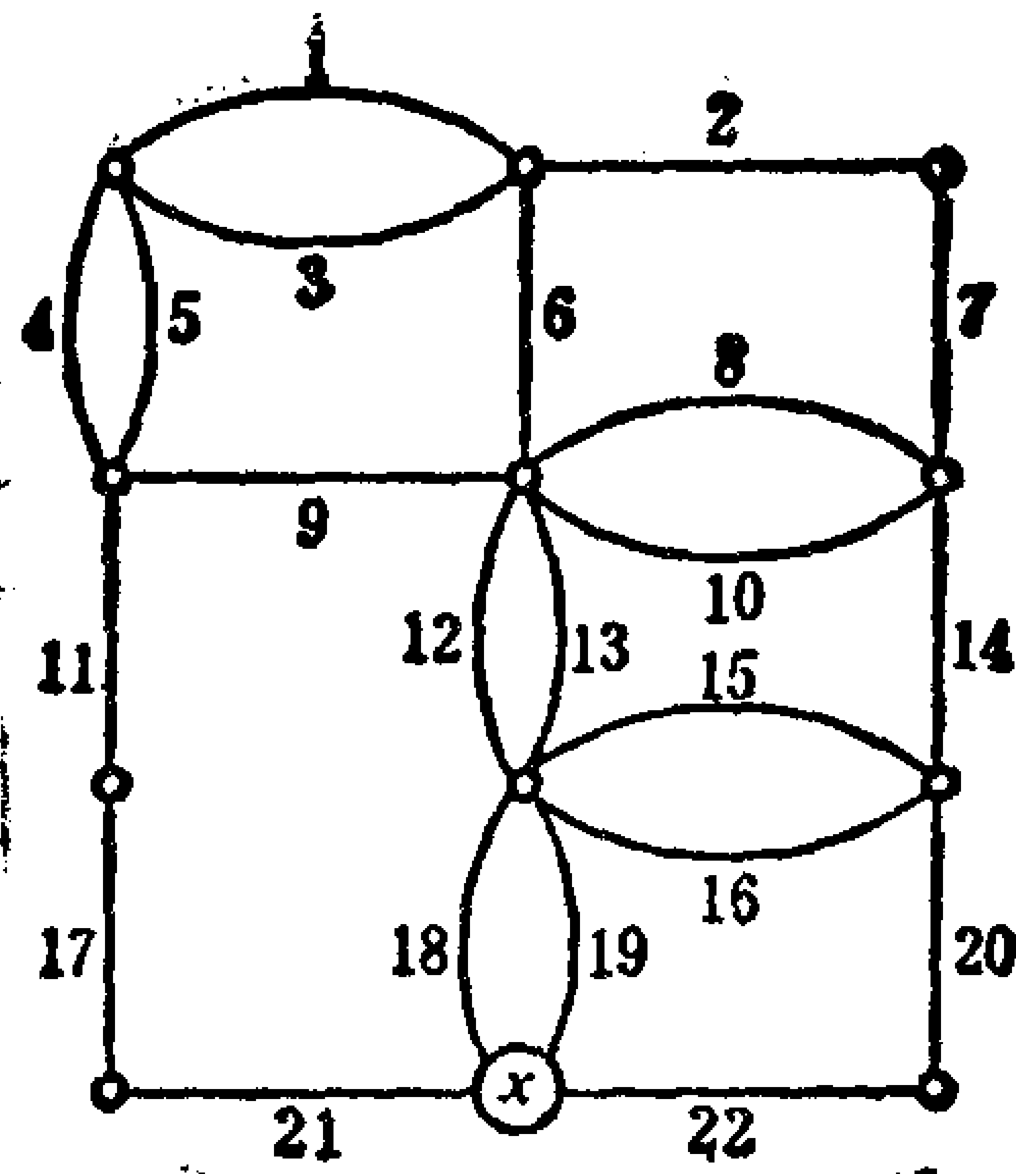


图 210

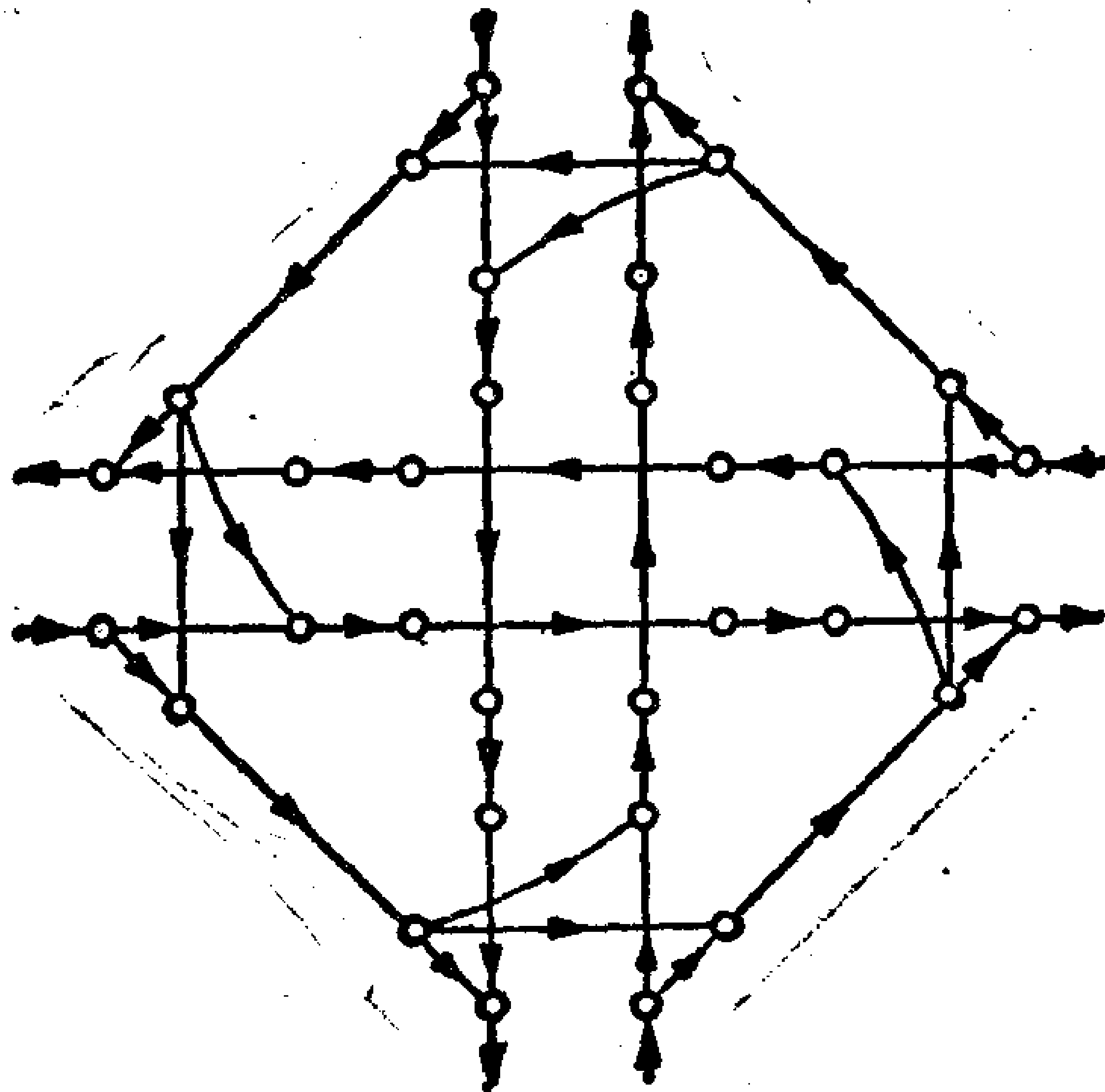


图 211

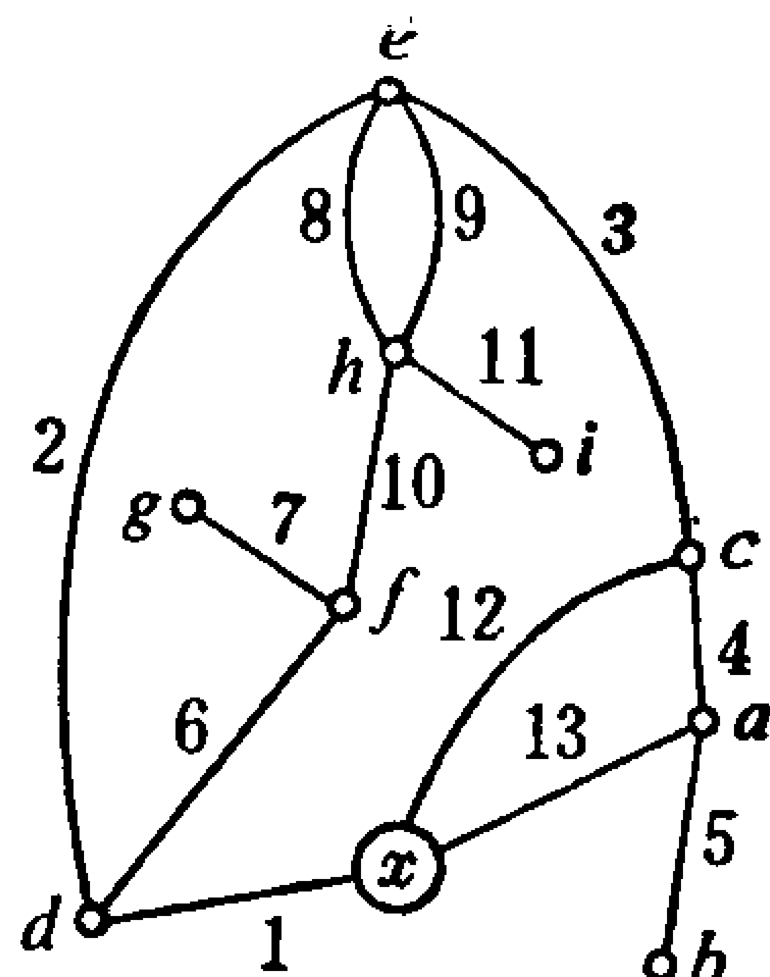
中边旁的数字指出了可能的序列之一.

28. 我们注意,除街道岔口 x 外,经一岔口可从别的岔口沿单行道到达,而不违反交通规则. 因此,我们只需保证: 在对应的通衔图中,顶点 x 必至少是一边的头,且至少是一边的尾.

29. 图 213 表示对应的迷宫的图. 例如, 应用第二个迷宫规则,边的序列是: 1, 2, 3, 4, 5, 5, 13, 12, 12, 13, 4, 3, 9, 10, 6, 6, 7, 7,

10, 11, 11, 8, 8, 9, 2, 1.

30. 若 $k=1$，则此问题的命题即命题 7 的第一部分；同一想法帮助我们同样地解此问题．让我们把 $2k$ 个奇次顶点配成一些对子，各以一条新边联结每一对子中的两个顶点．则新图仍是连



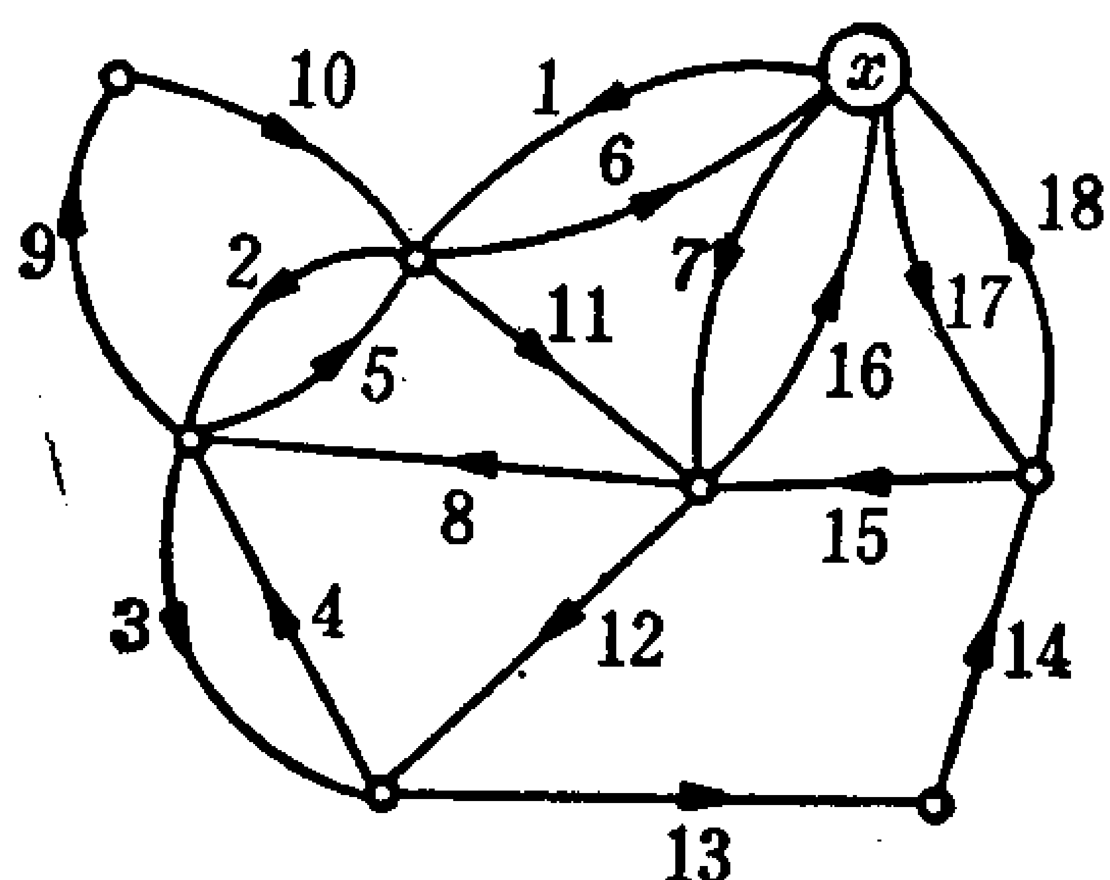


图 212

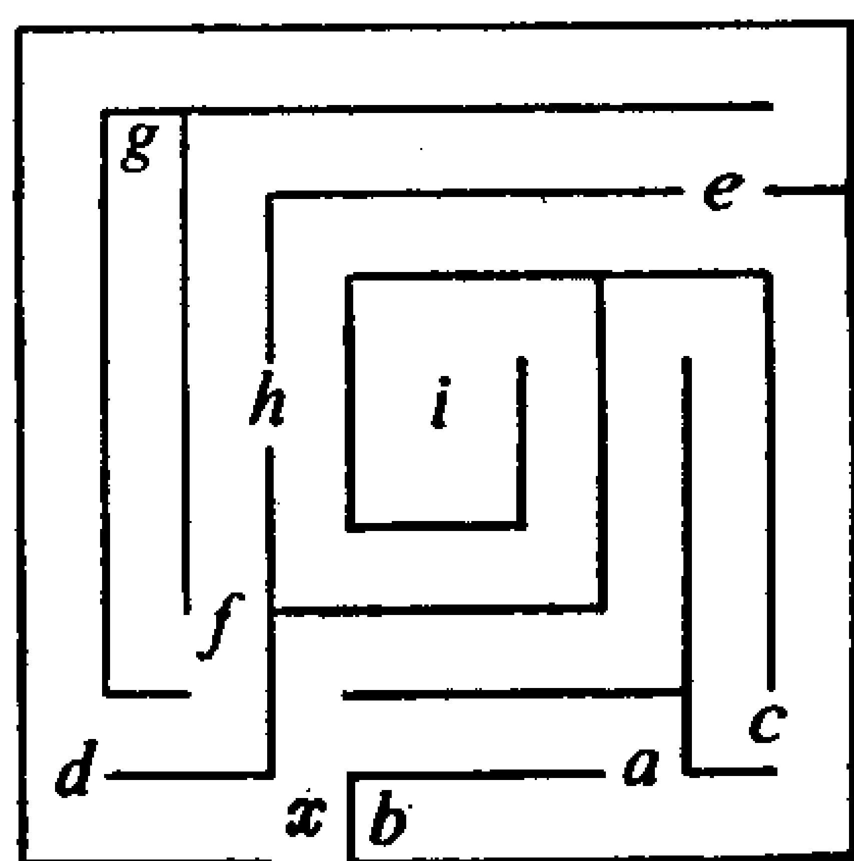


图 213

通的，每个顶点是偶次的；因此，它有一闭欧拉线．如果从欧拉线中删除那 k 条新边，就得到适合问题要求的 k 个开边列．

31. 所讨论的图中，每个分支有一闭欧拉线．在每个分支内的边数是偶数，比如为 $2n$（据第一章的命题 **8**，若图的 n 个顶点中的每个有次数为 4)．现在让我们沿着一条闭欧拉线交错地给边染上红、蓝两色．这种颜色的配置即合要求．

32. 多米诺（骨牌对）的数目应等于具有 $n+1$ 个顶点的完全图的边数，即 $n(n+1)/2$．多米诺组成一个环链，若 $n+1$ 个顶点的完全图是欧拉图，即当且仅当 n 是偶数．因为具有 $n+1$ 个顶点的完全图的每个顶点的次数是 n．

33. 若 $p_1, p_2, \cdots, p_m$ 是 A 的顶点，则

$$\varphi_{\text{out}}(p_1)+\varphi_{\text{out}}(p_2)+\cdots+\varphi_{\text{out}}(p_m)$$
$$=\varphi_{\text{in}}(p_1)+\varphi_{\text{in}}(p_2)+\cdots+\varphi_{\text{in}}(p_m).$$

让我们删去图中的这样一些边，它的头与尾都在 A 内．作为删除的结果，方程的两边减少同样的数目．本命题得证．

34. 应用命题 17

$$
\begin{aligned}
&\varphi_{\text{out}}(p_1)+\varphi_{\text{out}}(p_2)+\cdots+\varphi_{\text{out}}(p_n)\\
&=\varphi_{\text{in}}(p_1)+\varphi_{\text{in}}(p_2)+\cdots+\varphi_{\text{in}}(p_n),
\end{aligned}
$$

或

$$
\begin{aligned}
&[\varphi_{\text{out}}(p_1)-\varphi_{\text{in}}(p_1)]+[\varphi_{\text{out}}(p_2)-\varphi_{\text{in}}(p_2)]+\cdots\\
&\qquad+[\varphi_{\text{out}}(p_n)-\varphi_{\text{in}}(p_n)]=0.
\end{aligned}
$$

考虑括号内的差．若正项的和为 k，则负数的和是 $-k$．因此，问题中给定的和是 $2k$．

35. 若上一问题的和内，有一部分的和为非零，则出现于正的与负的部分和中的顶点分别组成集合 P, N．对于 P 的任一顶点有尾的边比有头的边要多，对于 P 中的全部顶点，这些差的和恰为 k．另一方面，对于 N 的任一顶点，有头的比有尾的边多，N 的全部顶点的这些差的和恰为 k．因此图 $\vec{G}$ 可由 k 条合适的边所扩大，此 k 条边全部的尾在 N 中，而全部的头在 P 中；全部的差将成为零，图的每个顶点的入次数等于同一顶点的出次数．命题 19 第一部分的条件对于这新图成立，它表明一个闭欧拉线的存在．若从图的任一欧拉线中删去 k 条新的有向边，就得到 k 个开边列，这正是所要求的．

36. 以 $1, 2, \cdots, n$ 表示无环图 G 的顶点，给各边以一个定向，使每边尾上的记数小于同一边的头上的记数．所得的图 $\vec{G}$ 不含有向回路．因为，不然，从 $\vec{G}$ 的任一有向回路的任一顶点出发，将到达越来越大的数所对应的顶点，从而回不到起点．

37. 假设所有的局中人都在一间屋里．其中有一人，送出全部被他战胜的人（也许无一人），而他自己也得离开此屋；若还有人在屋里，又有其中的一人连同被他战胜的所有的人一起离开此屋；

这过程直继续至某人送走了其余所有的人为止．则此人已战胜了全部最后离开的人，战胜了那些先前送走了一些别的人的人(因为他自己没有被送出)；但这些别的人又已战胜了所有那些被他送走的人．因此，这最后的一人能列举出所有其余的人．

这问题也可以借助于有向图作如下叙述：以局中人对应于图的顶点，联结每一对顶点，使得一条边的头与尾分别对应于相应赛局中的输者与赢者．这样的命题立即归结为问题 **16** 的命题．

注意，在问题 **16** 的第一个解中，也可以看出任一赛局中的赢者(在一和局的情形内)适合于问题 **37**．而且，不仅赢者能适合，在某些情形中，输者也适合问题 **37**，比如，由图 214 的有向图及其对应于比赛结果的表所表示的情形下．图形也反映在某些情况下所有局中人都能适合问题 **37**．

	a	b	c	d	e
a	—	1	1	1	0
b	0	—	1	0	1
c	0	0	—	1	1
d	0	1	0	—	1
e	1	0	0	0	—

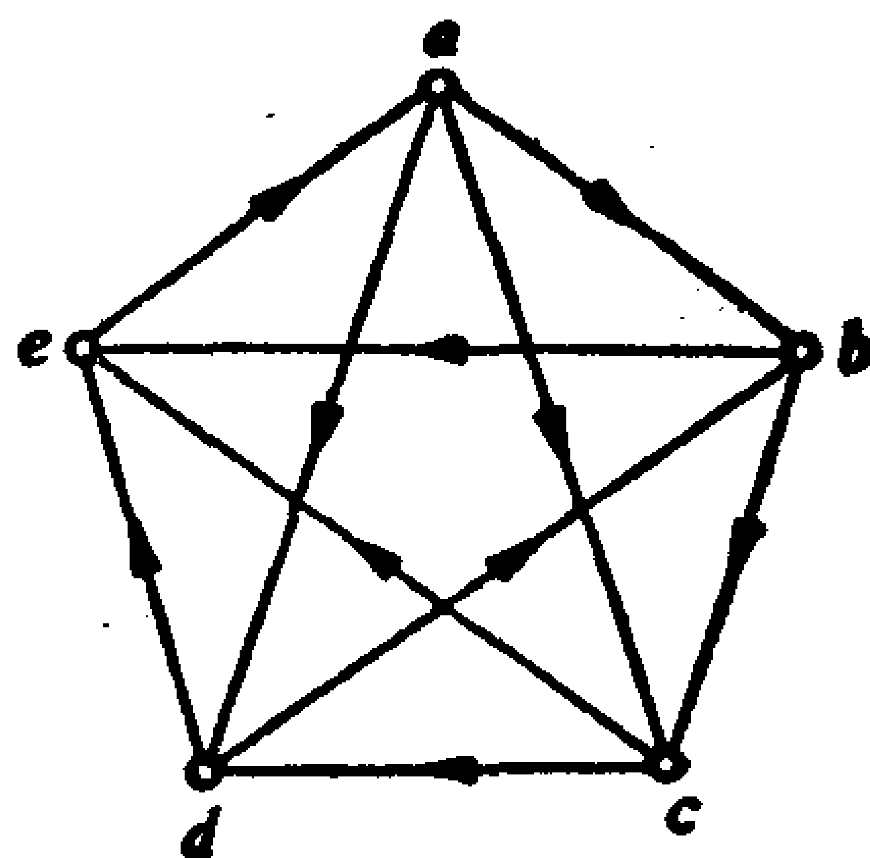


图 214

38．假设 $\vec{G}$ 含有 $k(k>0)$ 个从 a 通向 b 的两两边不相重的有向路．让我们从图中删去这些路的边，就得到了一个有向图 $\vec{G}'$ 使得

$$\varphi_{\text{in}}(a)-\varphi_{\text{out}}(a)=\varphi_{\text{out}}(b)-\varphi_{\text{in}}(b)=k,$$

对于一个任意的不同于 a 与 b 的顶点 p，仍有

$$\varphi_{\text{out}}(p)=\varphi_{\text{in}}(p).$$

这个事实表明 G' 中存在一个分支 G''，它含有 a 与 b，因为，否则，给这样的分支的边恢复定向，该分支只含 a 与 b 中一个顶点，则人

次数之和与出次数之和就将不同，这与命题 17 相矛盾．让我们给 G'' 的边以原有的定向，则据问题 35，$\vec{G}''$ 中存在 k 个开边列，使 $\vec{G}''$ 的每边恰含于这些边列之一．若从这些边列删去有向回路的边，就得到 k 个从 a 通向 b 的两两边不重的有向路．因为问题 35 的解中的集合 P 与 N 仅由分别为 b 和 a 的单个顶点所组成．于是，若存在 k 个两两边不重的，从 a 通向 b 的路，则同样地在 $\vec{G}$ 中至少存在 k 个两两边不重的从 b 通向 a 的路．若 $k=0$，此命题也真．因为对换 a 与 b，由同样的推理可知，命题仍成立，于是命题得证．

39. 若图 G 是以 x, y 及 z 为始点的随意欧拉图，则按命题 24 所描述的结构，这些顶点之一，比如说，z 的次数是 2．由于 z 的次数是 2，G 同样是 x, z 为始点的随意欧拉图，仅由它们之间的两条路所组成，它们没有公共内点，再一次据命题 24，G 是一个回路．

第 四 章

23. 游戏可沿着图 215 中粗线或虚线所示的哈密尔顿回路成功地继续下去．

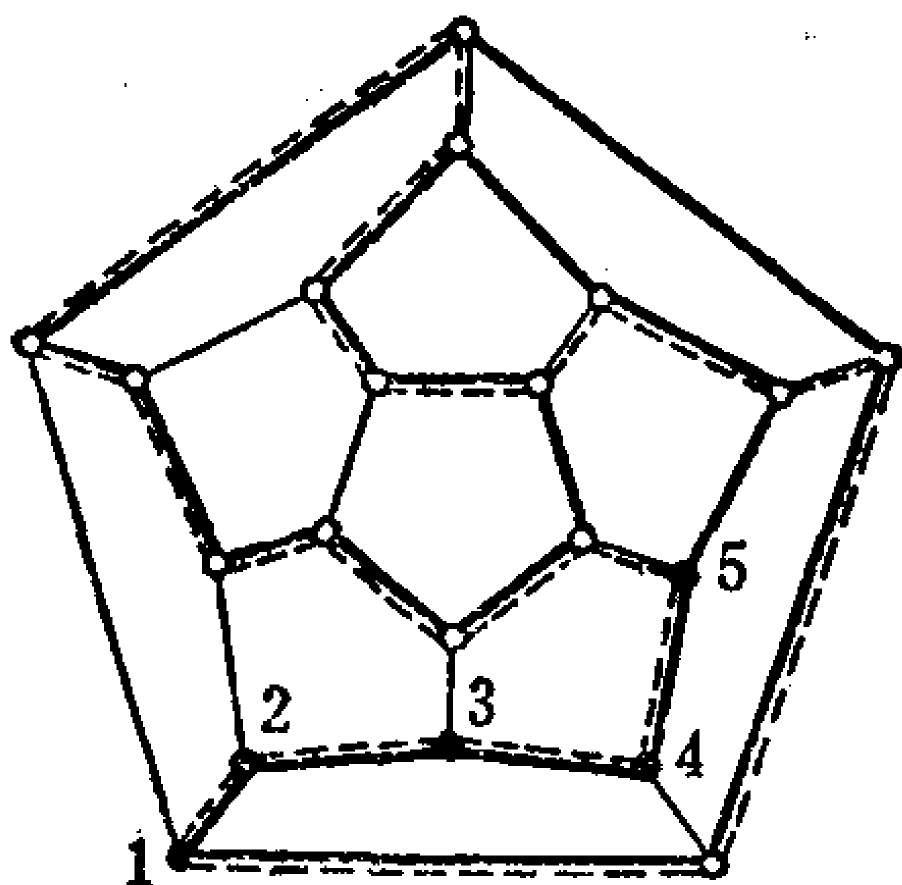


图 215

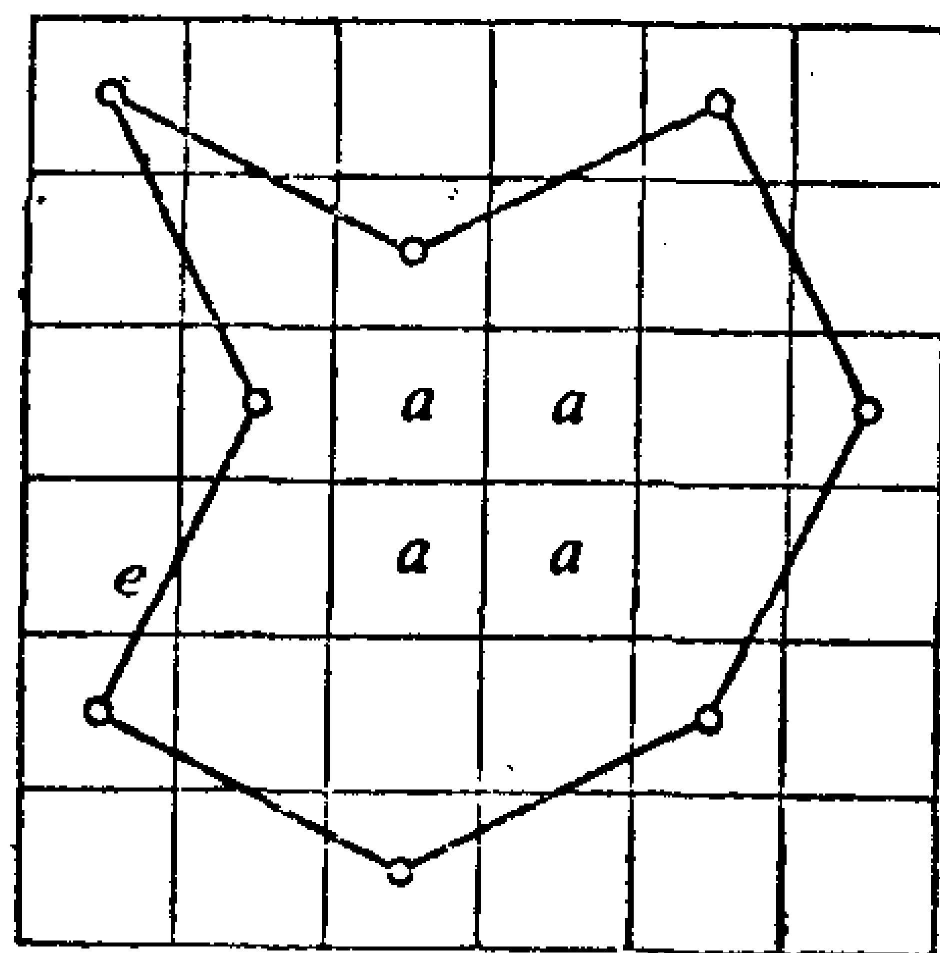


图 216

24. 图 G 的边表示 36 格的"棋盘"上马的可能的跳步．我们来寻求 G 的一个哈密尔顿回路．把棋盘中央的 4 格都记为 a．若删去与之对应的 G 的 4 个顶点，则剩下的图包含 4 个回路，没有两个是有公共顶点的．图 216 所示是此 4 回路之一，其它 3 个可将

图形绕中心旋转 90°, 180° 或 270° 得来. 这样的回路的边不能全含于一个哈密尔顿回路中, 但关联于每个角点的两边必含于任一哈密尔顿回路中, 因为这些顶点在 G 中的次数也是 2. 让我们考虑这 4 个回路并在每个回路上删去不关联于角点的一条边. 所得的 4 条路都记为 L, 这些路共包含 32 个顶点. 全部 4 个顶点 a 必含于任一哈密尔顿回路中. 因此若用顶点 a 及关联于它们的边(每个两边)把路 L 联结到一个回路上去, 就得到了一个哈密尔顿回路. (这联结路的方法以图 217 来表示; 路 L 的端点用小圈来标记.)用此方法可以得到好几个哈密尔顿回路, 图 218 的那个, 是由删去边 e 而构造出来的; 参看图 216.

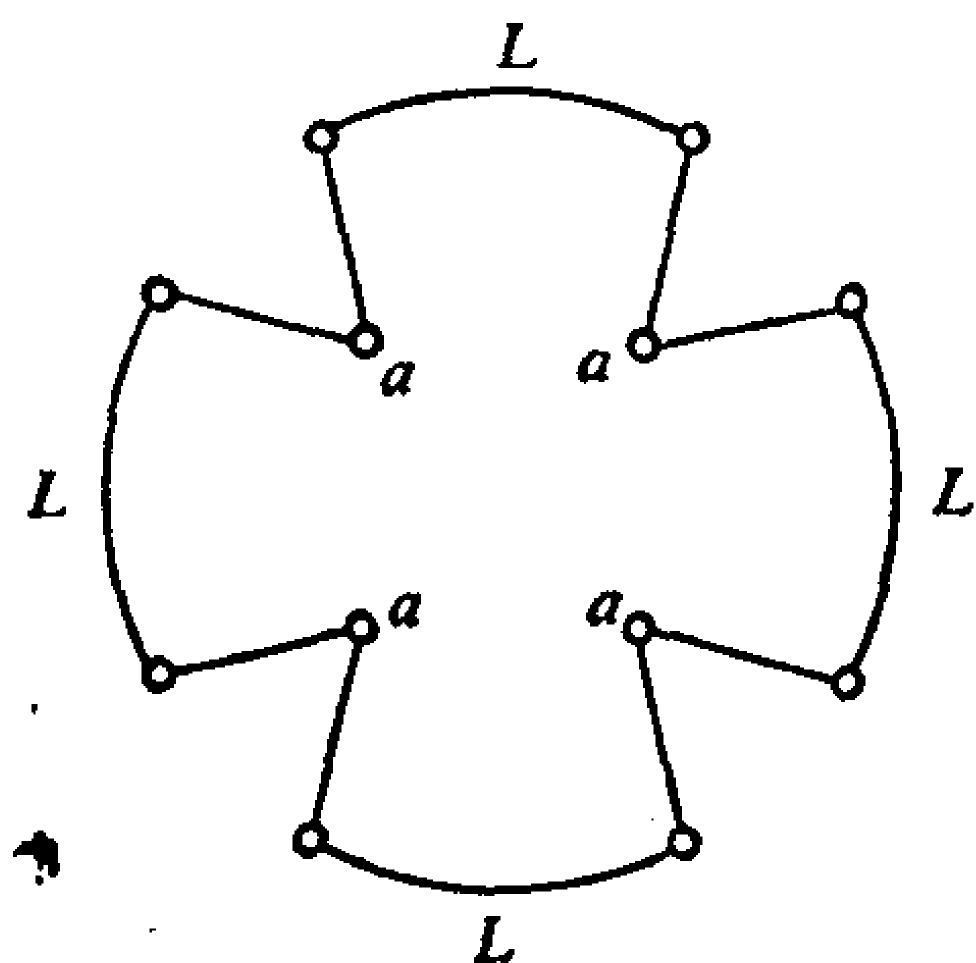
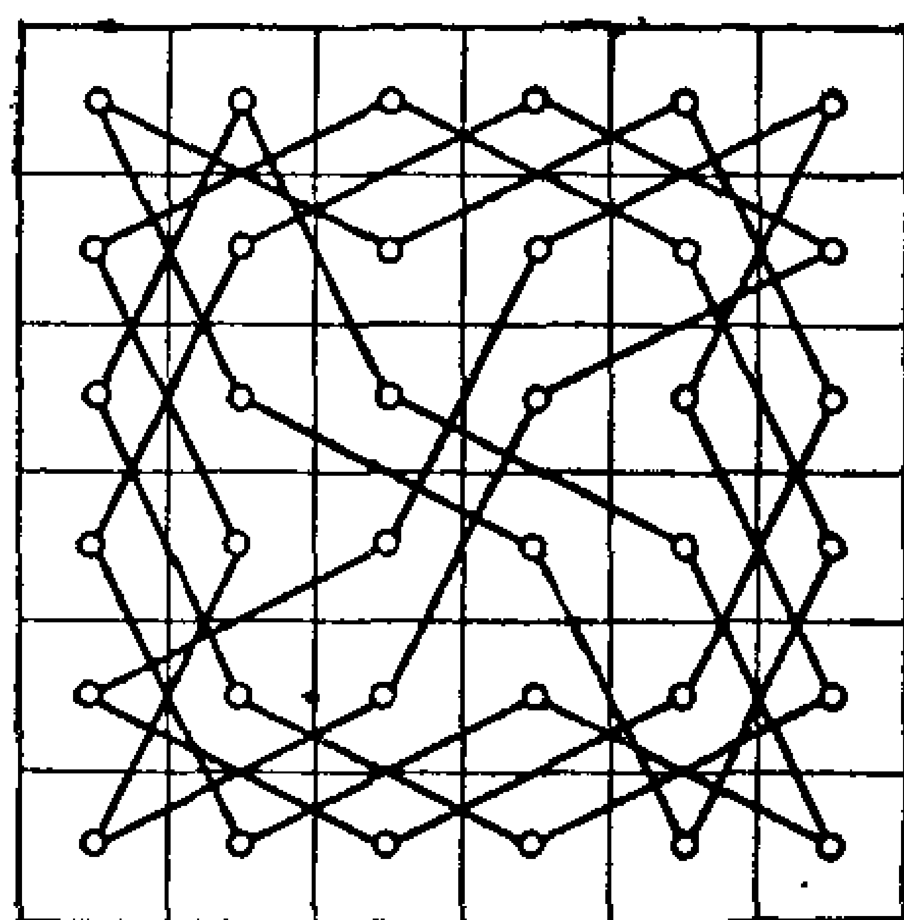


图 217


图 218

25. 如果两完全图恰有一顶点公共, 则此图无哈密尔顿回路. 可以确信图 219 的图是唯一合适的图.

26. 若把图的顶点划分为两个集合, 若给边以定向, 使得所有联结着不同集合中顶点的边, 它们的尾(或它们的头)在同一集合内, 则不能有有向哈密尔顿回路, 因为沿一哈密尔顿回路走时, 可以从任一顶点到达任一别的顶点. 图 220 的有向图就是这样构造出来的; 虚线表示顶点的划分.

27. 图 G 的边表示棋盘上马的可能跳步. 我们来找 G 的哈密

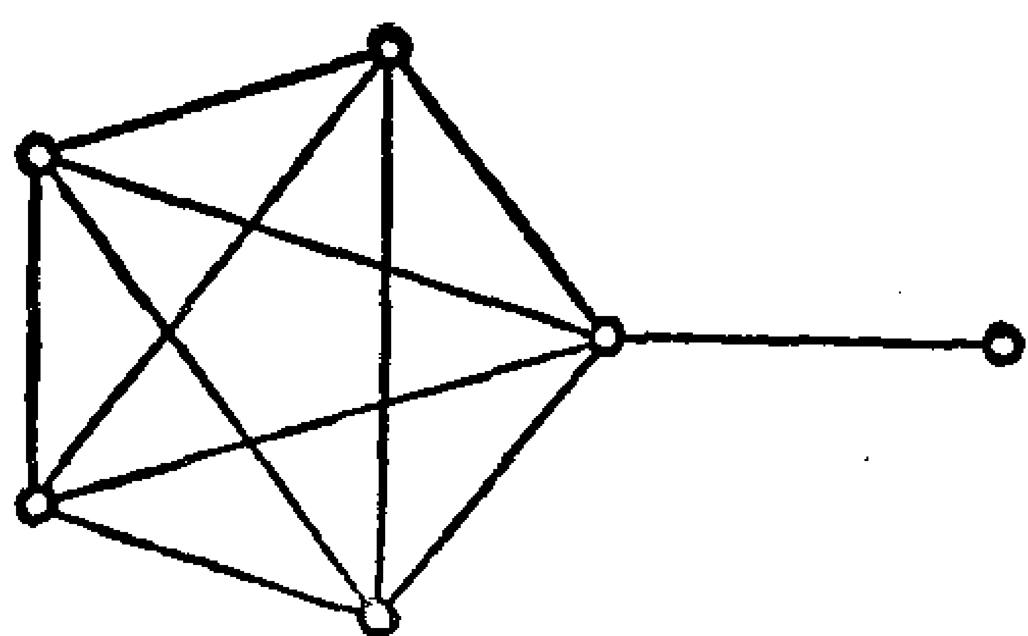


图 219

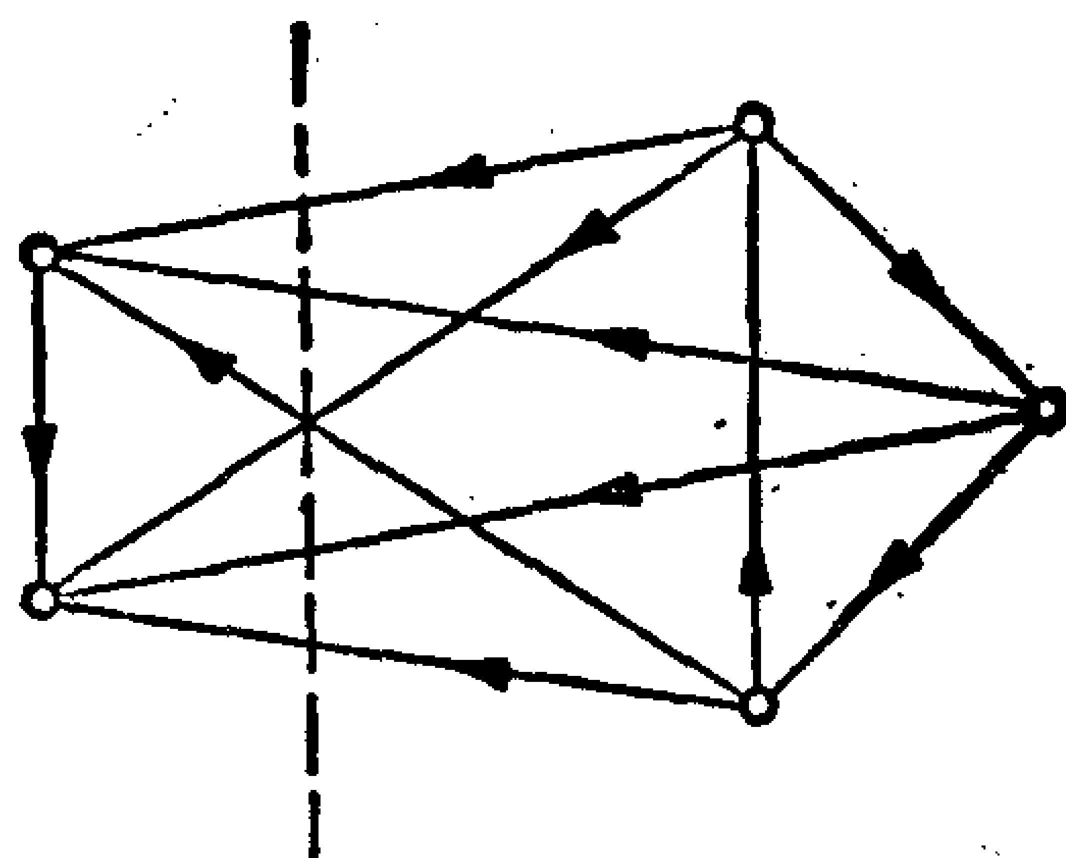


图 220

尔顿回路．注意到马从白格跳一步，必然到达黑格．反之也一样．这说明沿着G的一哈密尔顿回路，对应于白格的顶点总是紧随着对应黑格的顶点，反之也真．因此，G的任一哈密尔顿回路，因而G本身，必有偶数个顶点．若n是奇数，则n^2也是奇数．因此，G不能有哈密尔顿回路，即问题所指定的程序是不可能实行的．

28. 若删去对应于八面体的6个顶点，就得具有8个分支的图；每个分支是一个四面体的顶点对应的单个的顶点．因此，据问题3，问题得解．

29. 以四面体的边去替代十二面体的边，得到一个十二面体游戏的类似的游戏．我们用问题6的类似解法来考虑此游戏．固定第一个顶点p及第一条边e．此时，游戏的继续也可用l与r的序列来表示．问题6的解中的规则I对于本游戏的成功仍然是必要的：一个回路不能是另一回路的一部分(这里，用不着考虑规则II)．因此，在成功的序列中不能连续两次出现同一个字母的情形(图221所示是两个字母r连续出现的情形，另一情况容易想象得到)，这表明图222是类似于图102的图．只有两个不同的序列：从r或从l开始的序列．因为关联于p的三边中的任一边可以作为始边e，所以，在固定了p后，存在6种可能性，但其中只有三种给出不同的哈密尔顿回路，因为每个哈密尔顿回路可由两种

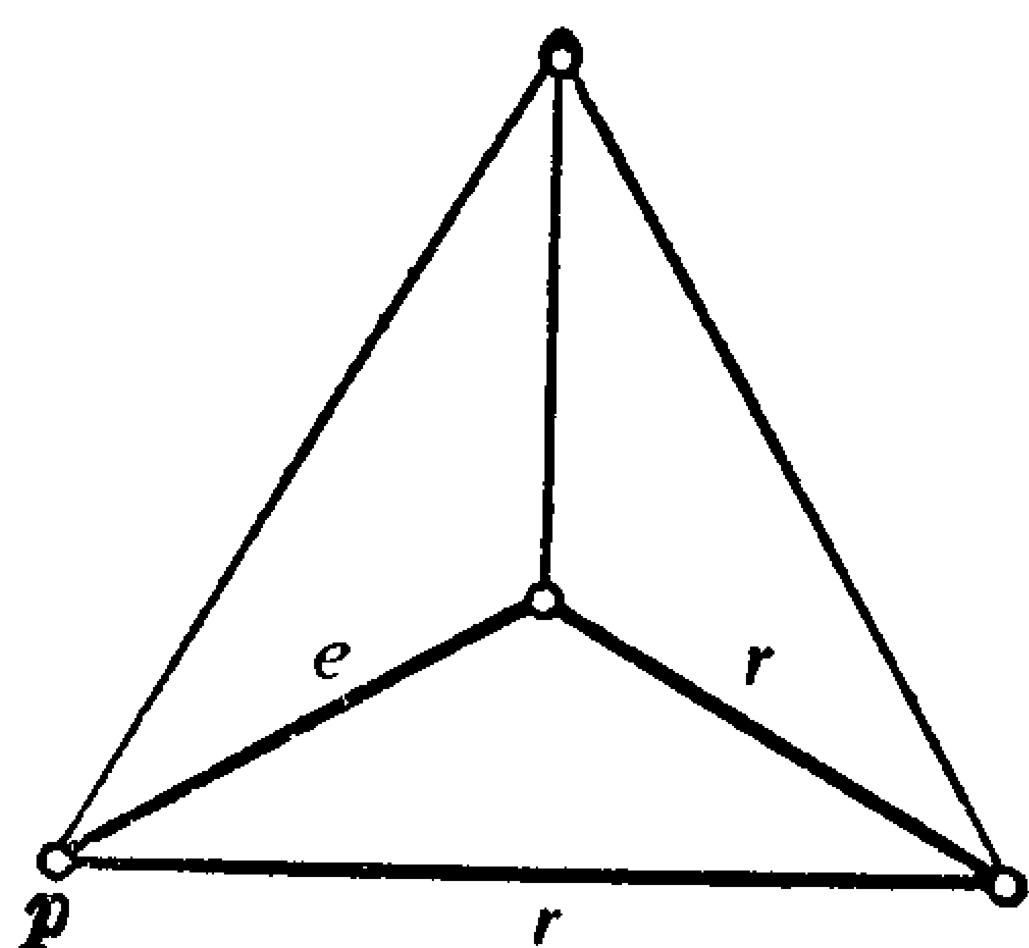


图 221

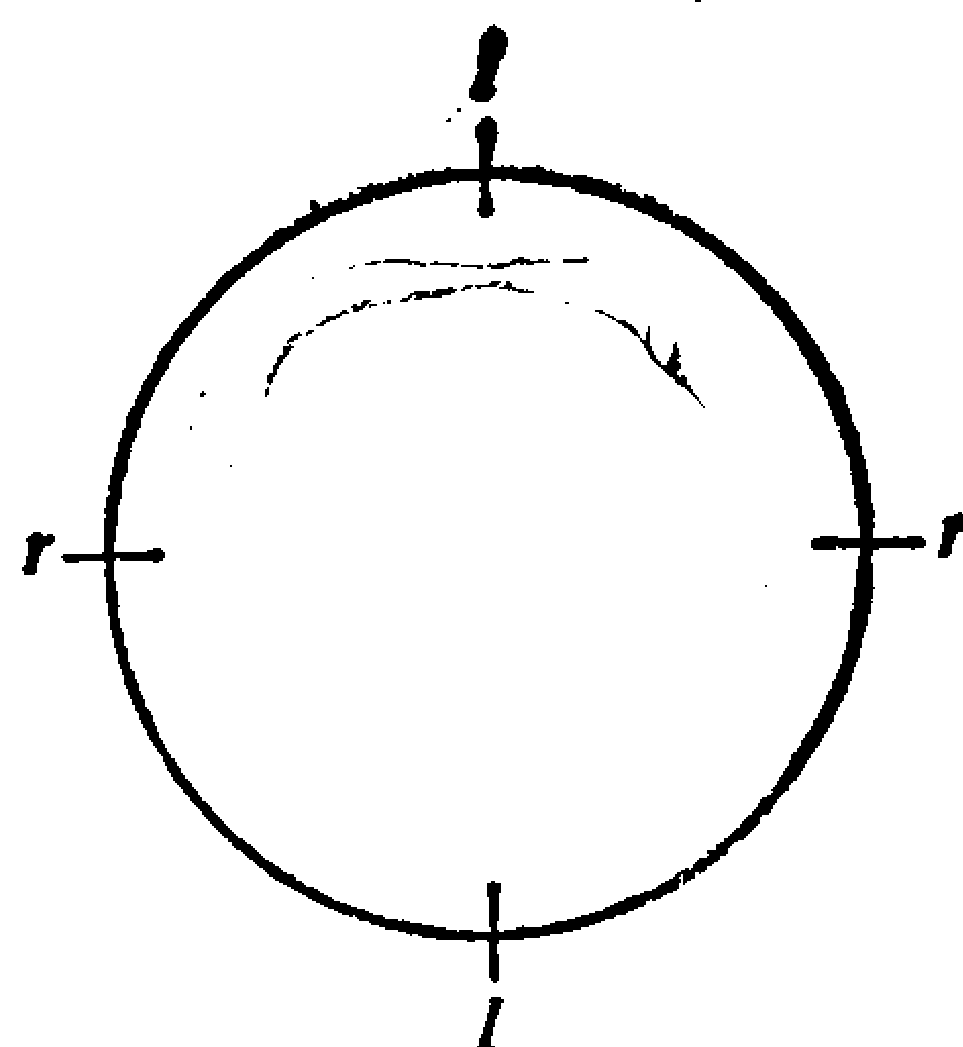


图 222

不同的方式得到(对应于沿一个回路的两种走法). 固定 p, 从哈密尔顿回路来看, 并未给出任何限制. 所以说, 由四面体的边形成的图有 3 个哈密尔顿回路.

事实上, 这四面体的三个哈密尔顿回路不用此法也能更容易地得到. 不过方法仍然在此给出, 因为问题的第二部分, 关于六面体, 将用此法来解.

要想得到游戏的成功的结果, 仍必须考虑规则 I 与 II: 若边的关联方式有如图 223 所示, 且一个可能的哈密尔顿回路包含粗线所标示的边, 则细线的边必不在其中出现, 而以虚线标出的边又必属于此回路. 下列字母的序列中没有一个能作为一个可能序列的片段: lrl, rlr, rrr, lll. (图 224 表示第一与第三种情况, 而另两情况, 可以由对换字母而得到.) 图 225 类似于图 102. 因此, 能得出 4 个不同的序列. 因为在固定了端点以后, 可以沿三边之一出发, 存在着 12 种成功地继续游戏的方法, 但每个哈密尔顿回路

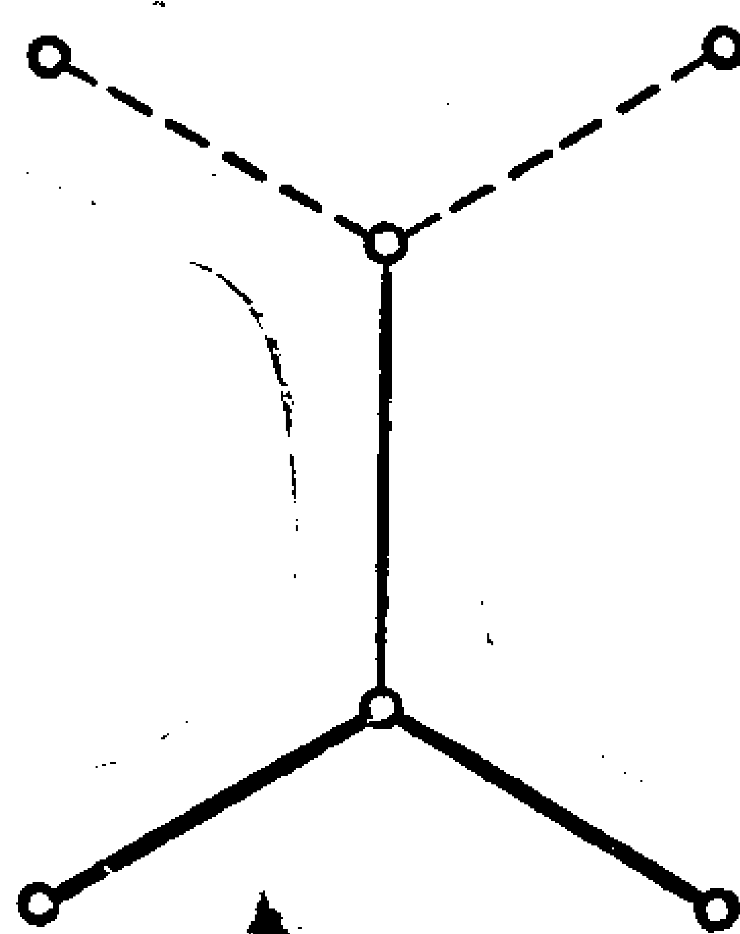


图 223

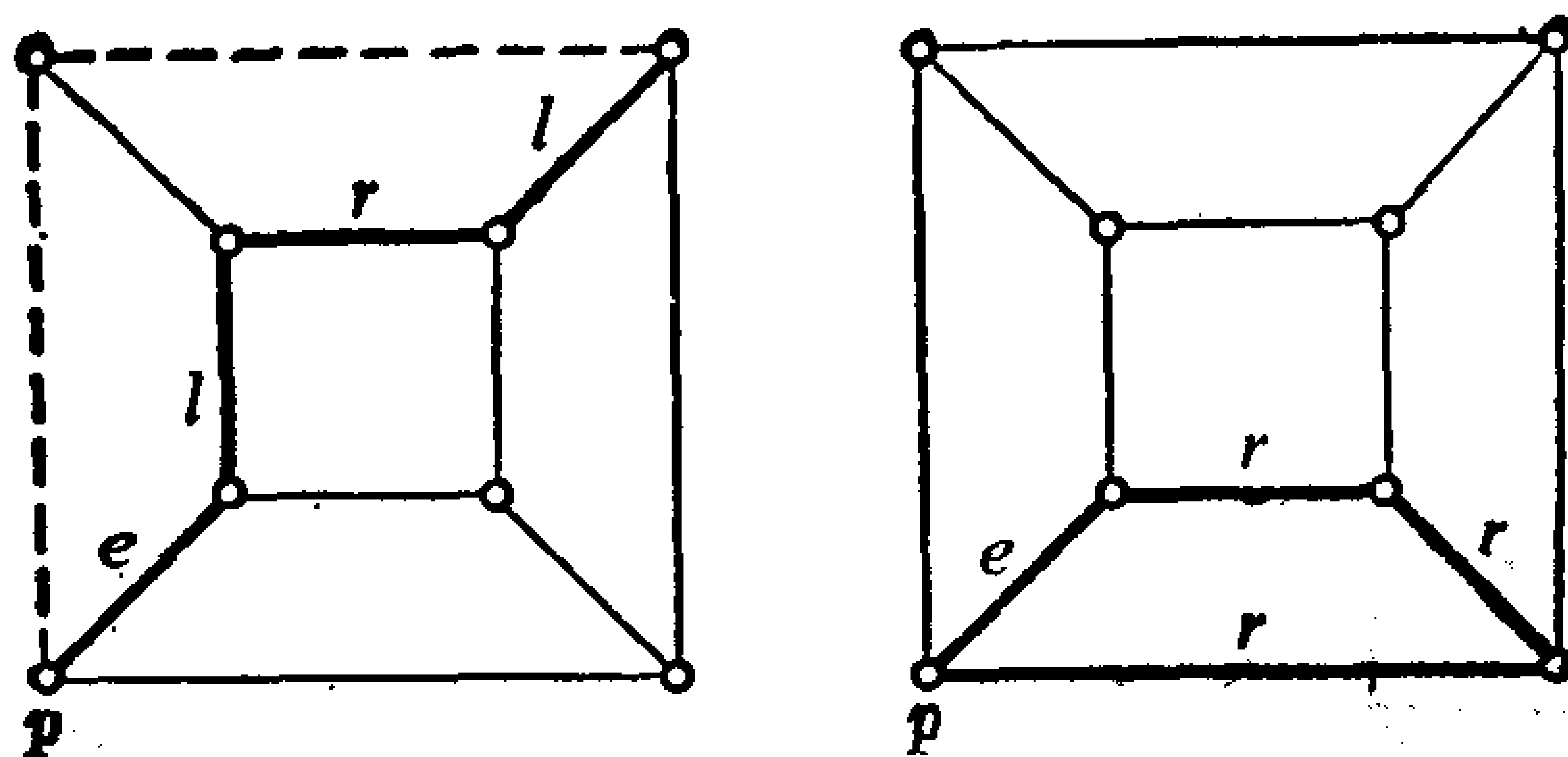


图 224

可以用两种不同的方法得到．因此，由六面体的边组成的图有 6 个哈密尔顿回路．

30. 在十二面体游戏的讨论中，我们证明了如果前两个塞子已插好，则可有 20 种不同的方法来继续这个游戏．如果以 l 继续序列，则可能有 10 种可能的方法，用 r 来继续时还有 10 种．因此，若已插好前三个塞子，则有10种可能的方法来成功地继续此游戏．如果前四个塞子固定，这意思是说出发点与第一条边已被选定，并且，当字母对之一：rr, ll, rl, lr 已被规定时，则还有两个塞子待插．考虑到图形的对称性，以及回路的两个可能的方向，图 102 表示前两种情况中每种有 4 个序列，后两种情况中每种有 6 个序列．因此，前四个塞子定位以后，有 4 或 6 种方法使游戏得以成功地继续下去．

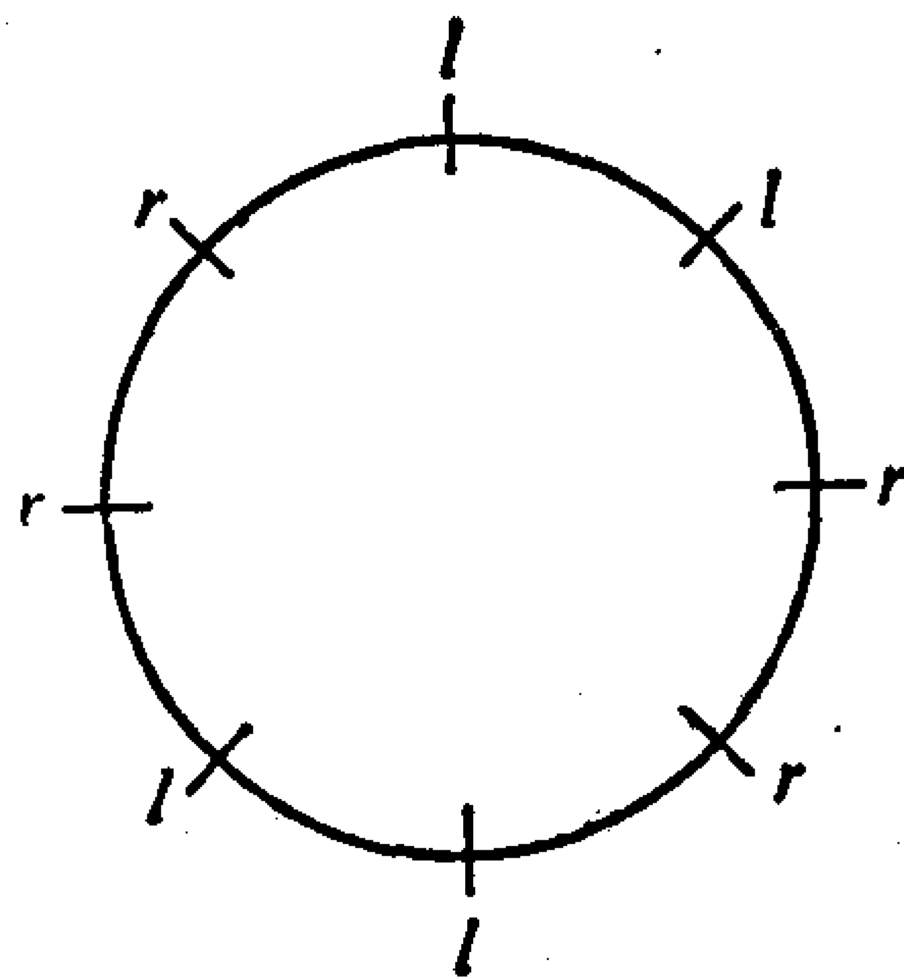


图 225

若前 5 个塞子已固定，则在序列中，前三个字母已给定，三个字母能以 8 种不同方法来固定；组 rrl 对应于图 127 的情形．可以发现，与在前几种情况中用到的类似的推理，有 2 或 4 种不同的方法来继续这一游戏；在情形 rrl 中有两种，对应于图 127．图

215 表示此两种情形.

31. 二十面体的表面由二十个三角形组成（见图 226）. 我们在每个三角形内取一个点，若两个三角形有一公共边，我们用一线

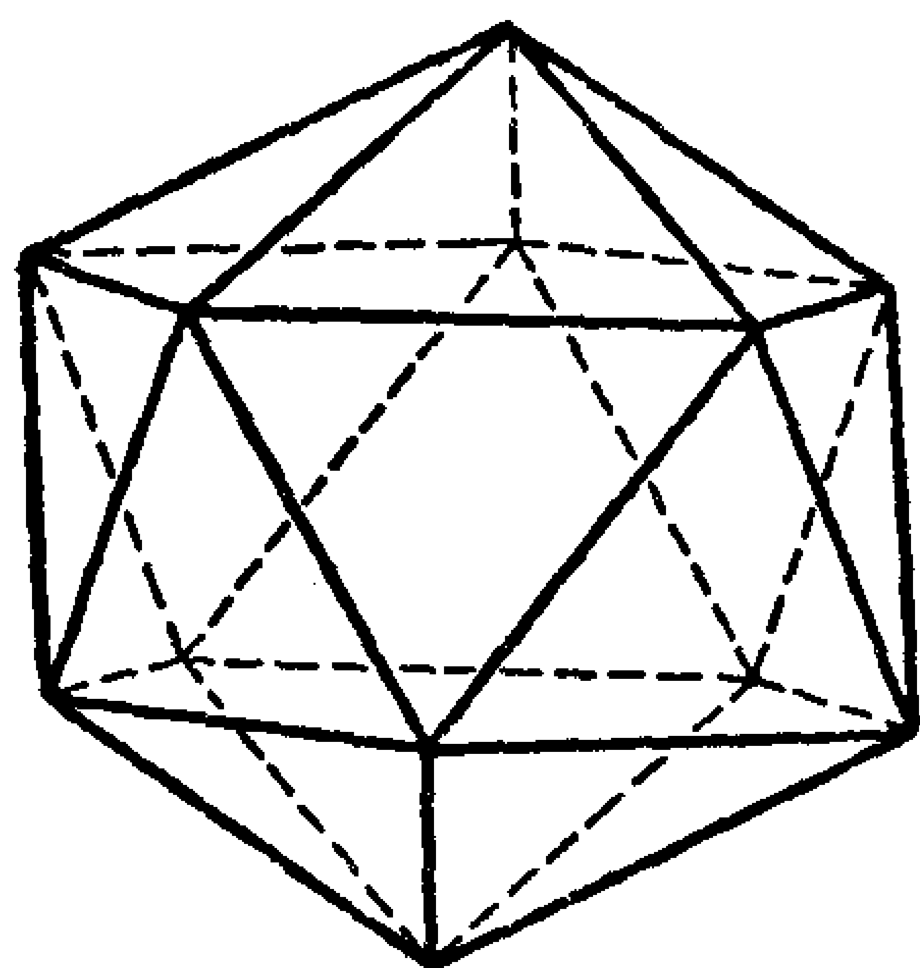


图 226

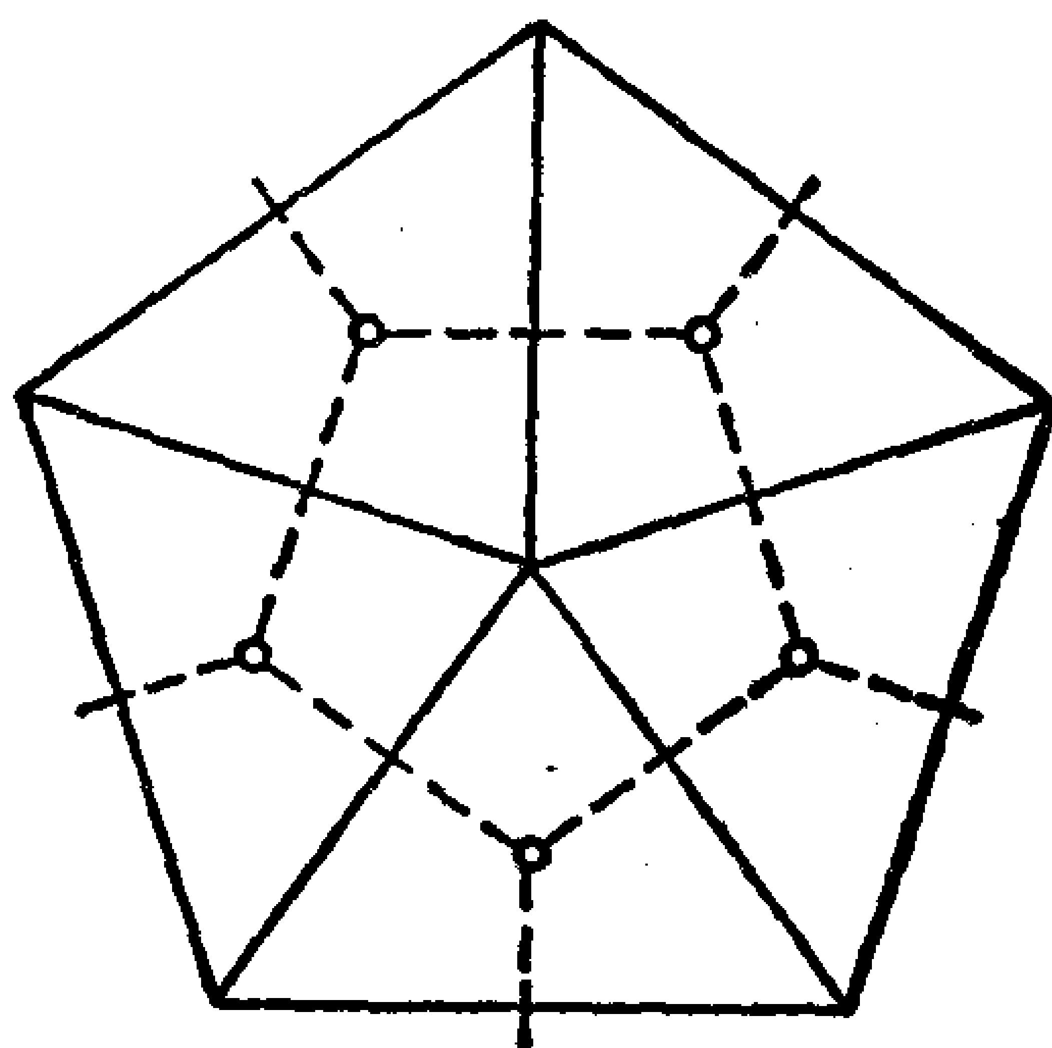


图 227

联结对应的点，此线与该边相交. 考虑画在二十面体表面上的图 G，其一部分为图 227 的虚线所表出. 注意到 G 同构于由十二面体的边所组成的图. 若沿 G 的一哈密尔顿回路去剪二十面体的表面，则显然表面被一分为二；每个三角形也被一分为二. 这是因为哈密尔顿回路包含 G 的所有顶点，且次数只是 2.

32. 假设不然，即，设 p 是所考虑的图 G 的一个割点. 我们删去顶点 p 及关联于它的边. 所得的图至少有两个分支，所以存在一个至多有 $k-1$ 个顶点的分支. 以 G_1 记这样的一个分支，设 p_1 是 G_1 的一个顶点. p_1 在 G 内的邻接顶点是 G_1 的某些顶点，也许还包括 p. 因为 p_1 不能与 G_1 的多于 $k-2$ 个顶点邻接. G 内 p_1 的次数不能大于 $k-1$，这是一个矛盾，所以 G 没有割点.

本问题的命题也可由命题 **14** 推出. 因为后者的条件为 G 所满足，而哈密尔顿回路在 G 内的存在就排除了割点的存在（参看问题 **3** 后的注意）.

33. 假设不然，即，设图 228 的 G（它同构于图 128 的图）具有

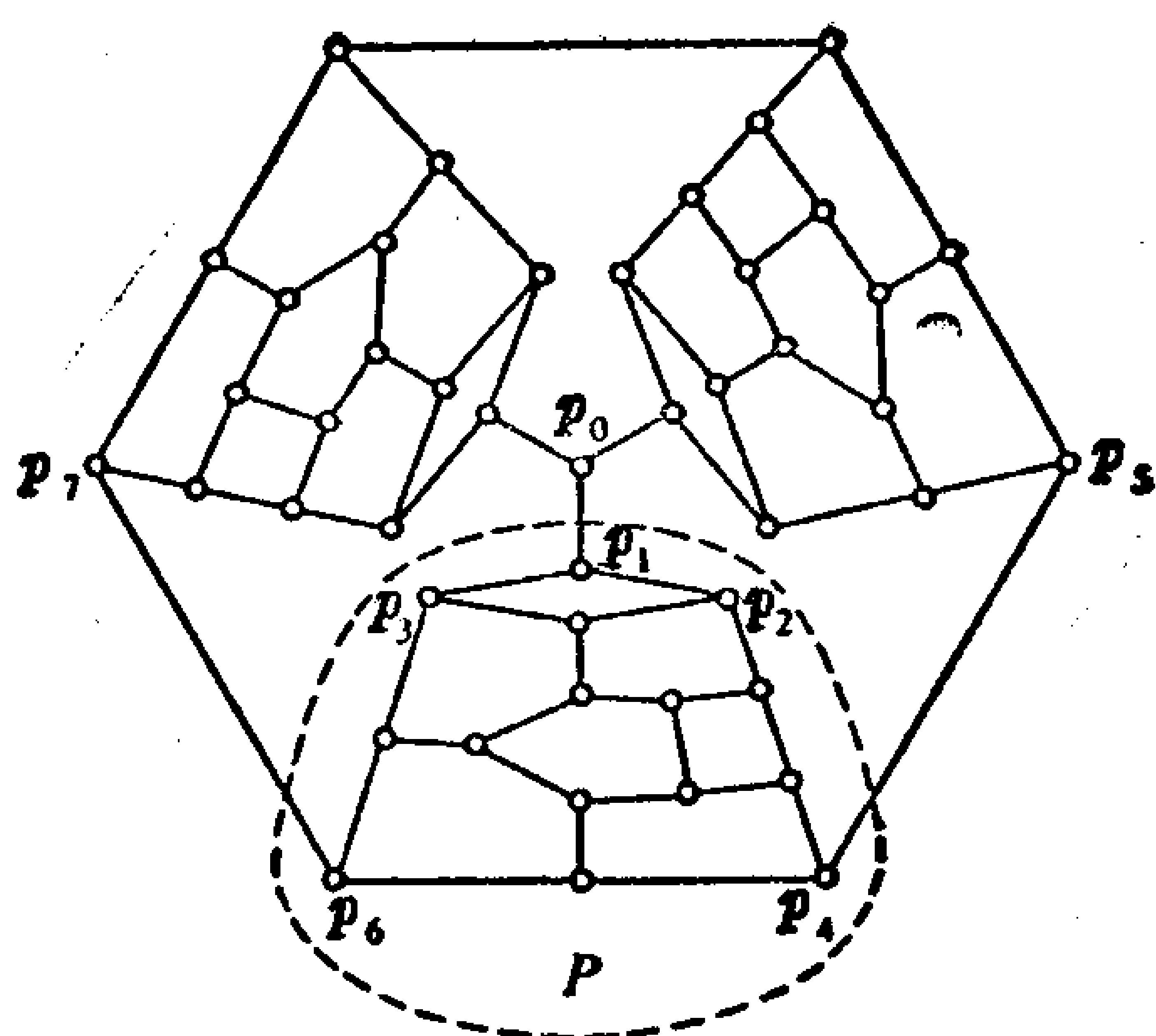


图 228

一哈密尔顿回路 H. 由于 G 中每个顶点的次数是 3, H 包含关联于任一顶点的三条边中的两条. 以 P 表示图 228 内用虚线围出的 G 的顶点的集合, 据 G 的对称性, 可以设关联于 p_0 的三边中仅一边不含于 H 中, 此边为 $\{p_0, p_1\}$. 则边 $\{p_1, p_2\}$ 及 $\{p_1, p_3\}$ 属于 H. 显然, 沿 H 走我们可以进入虚线所围成的区域, 这只能沿边 $\{p_4, p_5\}$ 与 $\{p_6, p_7\}$ 之一进入, 其中的另一边则用于离开此区域, 所以这两边属于 H.

以下述方式构成一个新图 G^*: 我们先考虑 G 的这样的子图, 它包含 P 的顶点, 和 G 中连接 P 的两个顶点的那些边. 再从这图删去边 $\{p_1, p_2\}$ 与 $\{p_1, p_3\}$, 添加上新边 $e=\{p_2, p_3\}$ 与 $f=\{p_4, p_6\}$. 这样得到的图 G^*, 其每个顶点的次数是 3(见图 229). 让我们考虑属 G^* 的 H 的边. 边 $\{p_1, p_2\}$ 与 $\{p_1, p_3\}$ 被删去了, 但我们添加了边 e 代替它们. 类似地, f 也代替了这样的两条边, 它们联结着 P 的顶点与不在 P 内的顶点, 依此得到了图 G^* 的一个哈密尔顿回路 H^*.

在十二面体游戏的解中提出的, 也在解问题29时用过的规则

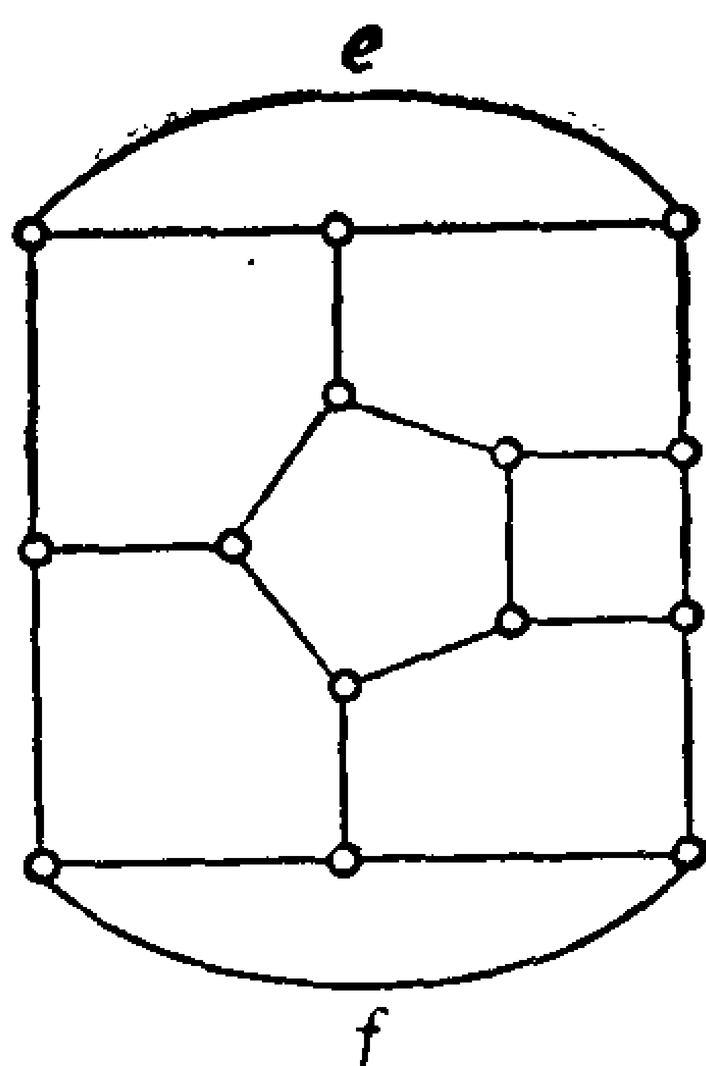


图 229

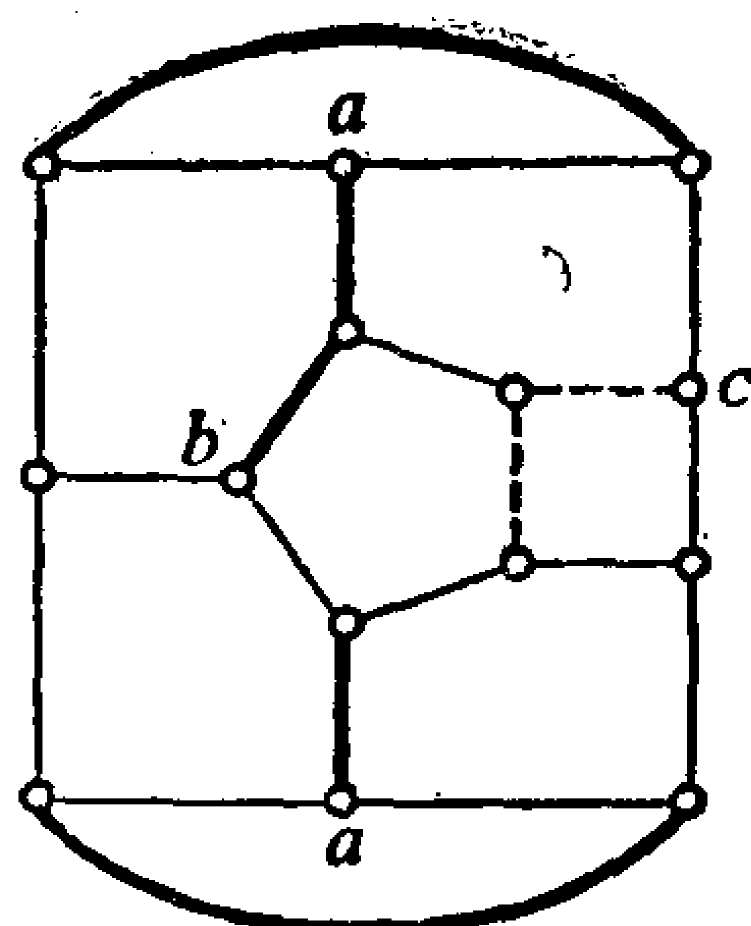


图 230

I与II, 对H^*也正确, 因为G^*的每个顶点的次数是 3. 图 230 表示图G^*及一些用粗线标出的边属于H^*. 关联于顶点 a 的"粗边"必属于 H^*, 因为, 否则关联于顶点a的以细线标出的边, 就必属于H^*, 这与规则I矛盾. 存在两条对称边关联于b, 其中之一必属于H^*, 我们假定"粗边"属于H^*. 因为, 据规则II, 以虚线表示的边也属于H^*. 在下一图中, 它们都改用粗线表示. 现在, 我们考虑顶点c, 另有两边关联于它, 其中必有一边属于H^*. 于是图 231 所列的

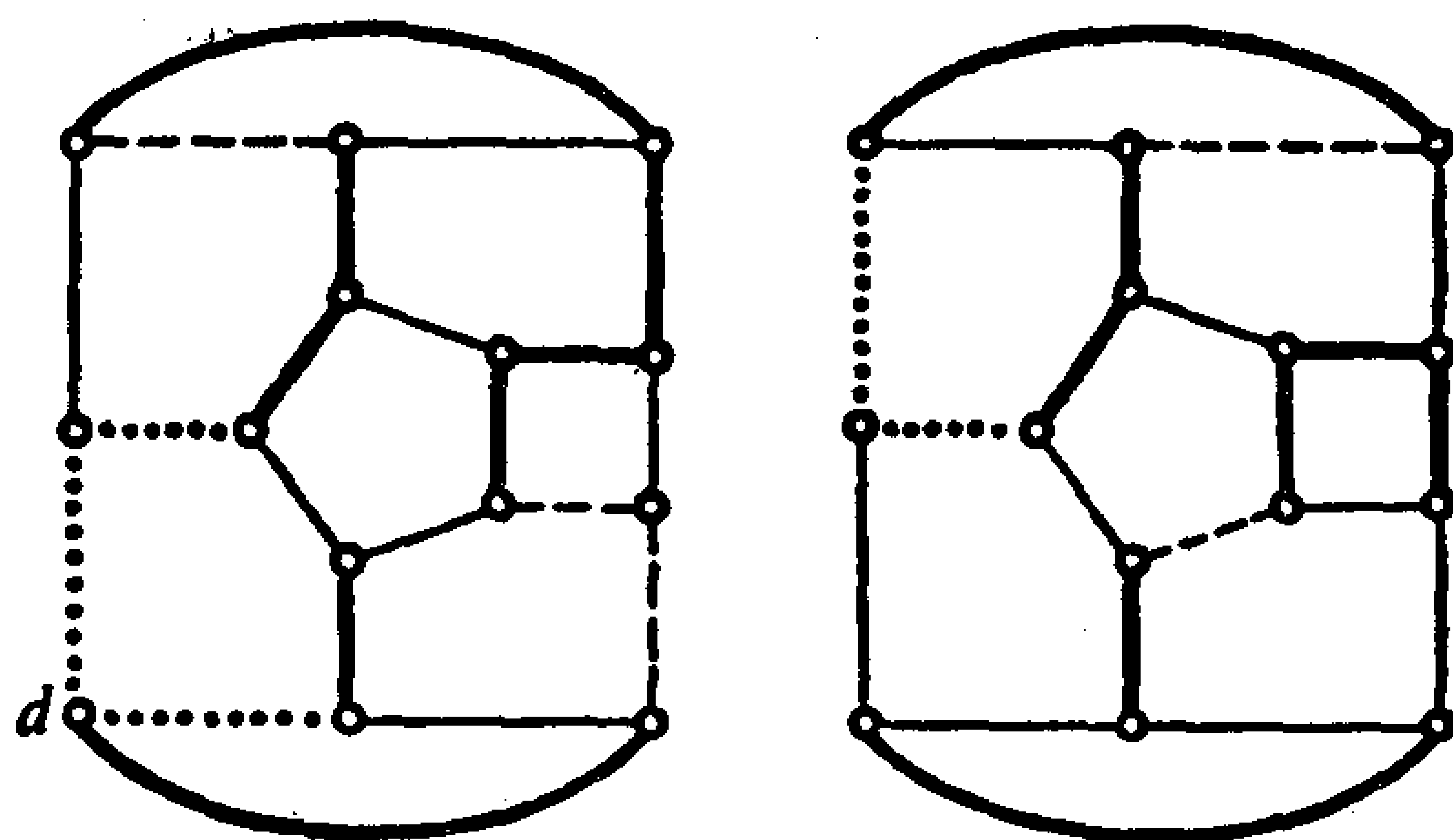


图 231

两个图中必恰有一个说明这种情形. 据规则I与II, 由"粗边"推知"虚边"一定属于H^*, 类似地, 又由"虚边"推知"点边"存在于H^*中. 在前一情况, d在H^*中的次数是3, 在后一情况, 会发现一个回

路(在图的上半部)它是H^*的一个真子集. 两种情况都属不可能,因为与我们的假设, 即图 228 或图 218 的图有哈密尔顿回路相矛盾.

注意, 图 228 有哈密尔顿路.

34. 假定具有n个顶点的简单图 G满足问题的条件,我们将证明G是连通的. 若G不连通,不同分支的两顶点不能是邻接的,而它们的次数和至多为 $n-2$, 矛盾于我们的假定. 以L表示G的最长路中的一条,若L的端点是邻接的, 据问题11, G有哈密尔顿回路. 否则它们的次数之和至少为n, 据问题12, 表明G中存在端点邻接的最长路. 此时,又由命题11可知,G有哈密尔顿回路.

命题14也可由问题34推出, 因为, 若每个顶点的次数至少为$n/2$,则任两非邻接顶点的次数一起至少为n.

35. 假设不然,即具有n个顶点的简单图 G至少有$(n-1)(n-2)/2+2$条边,但无哈密尔顿回路. 于是,据问题34,必存在G内不邻接的两顶点p与q,它们的次数和至多为$n-1$. 所以, 至多存在$n-1$条边关联于p或q. 由于具有n个顶点的完全图内,至少有$2n-3$边关联于两顶点,具有n个顶点的完全图内关联于这两点的边数与G内关联于这两点的边数之差至少为 $2n-3-(n-1)=n-2$. 因此,G的边数至多为

$$\frac{n(n-1)}{2}-(n-2)=\frac{n(n-1)}{2}-(n-1)+1$$

$$=\frac{n(n-1)-2(n-1)}{2}+1=\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1,$$

这是一个矛盾.

若两个完全图分别具有 2 与$n-1$个顶点, 并恰有一顶点是公共的,那么,这就是一个具有n个顶点与$(n-1)(n-2)/2+1$条边而无哈密尔顿回路的图. (参看图 219 中的图,此时,$n=6$.)

36. 一般地，若顶点p与q在简单图 G内是不邻接的，则可以证明G具有所求的定向．让我们给G的边以一定向，使p与q全是关联边的尾（或头）．得到一个有向图$\vec{G}$，其中，顶点p与q都不能是一有向哈密尔顿路的内点或终点（或始点）．但它们不能全是始点（或终点），所以，$\vec{G}$ 不能有有向哈密尔顿路．

37. 假设不然，即，设问题中的强连通图$\vec{G}$无有向哈密尔顿回路．应用第三章提出的从极大出发的方法，设$\vec{K}$是$\vec{G}$的最长有向回路，q是不属于$\vec{K}$的顶点．则q不能关联于如下的两条边，一边的头及另一边的尾在$\vec{K}$内．因为，否则，从后一边的尾出发，沿回路$\vec{K}$（顺着回路的方向）走，尽可能地包括这样的顶点，它们是一些关联于q的边的尾，最后就得到这样的一条边$(p_i,\ p_{i+1})$，使得边(p_i, q)及$(q,\ p_{i+1})$都含于$\vec{G}$．但以此两边去替换$\vec{K}$中的边(p_i, p_{i+1})就得一个有向回路，矛盾于$\vec{K}$的极大性．因此，若q不属于$\vec{K}$，则q是把q联结于$\vec{K}$的全部（关联）边的尾，或者是全部这样的边的头．我们假设q是全部这样的边的尾．（否则，也可应用类似的推理）从$\vec{K}$的任一顶点出发沿一有向路可到达q，因为$\vec{G}$是强连通的．以$\vec{L}$记这样的一条路的子路．它以q为终点，而以$\vec{K}$中一顶点p_j为始点，但它不含$\vec{K}$的其余的顶点（见图 232）．设p_{j+1}是$\vec{K}$中以p_j为尾的边之头，如上述，由于存在边(q, p_{j+1})，把它添加上去，就使$\vec{L}$联结到$\vec{K}$，换去(p_j, p_{j+1})，就得到一有向回路，又矛盾于$\vec{K}$的极大性．因此，$\vec{G}$的全部顶点在$\vec{K}$中，命题得证．

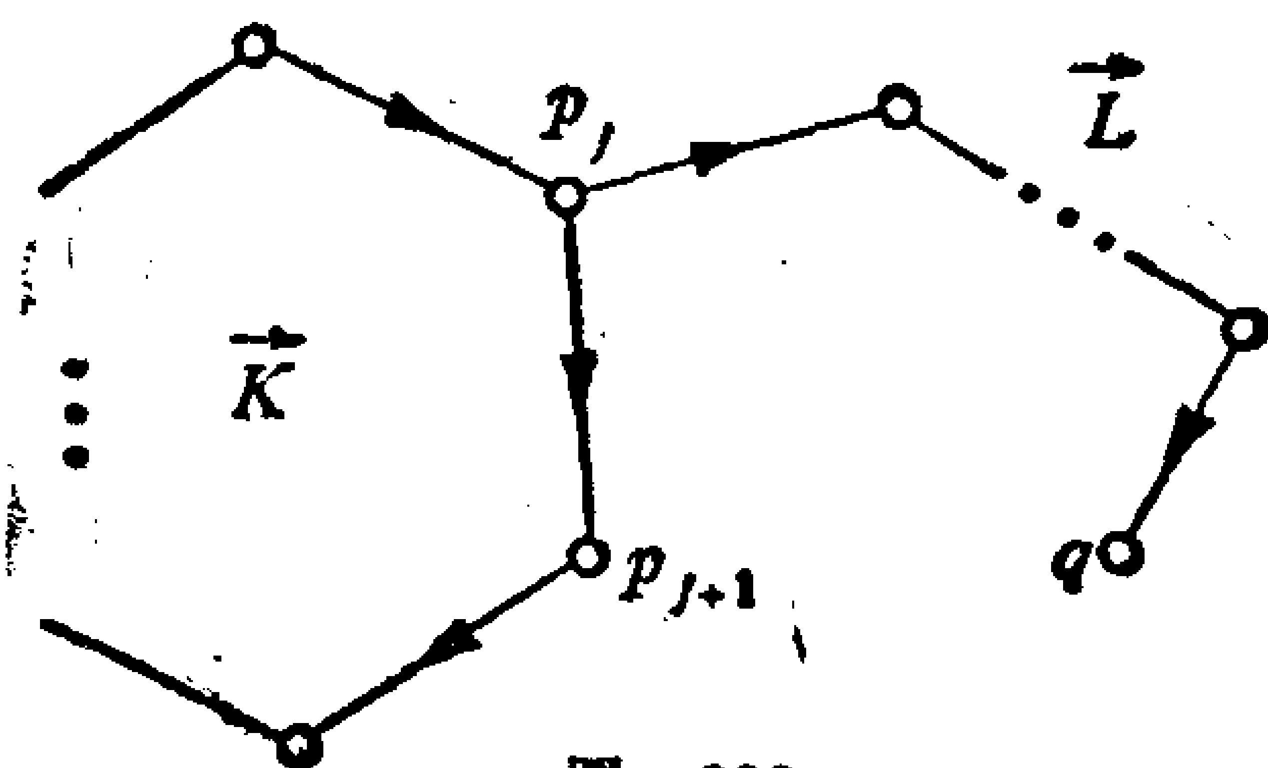


图 232

38. 从对$\vec{G}$的顶点集的划分，使之产生两个子集，都具有给定性质的两条边，可推出$\vec{G}$的强连通性．再据上一问题的结果，就知道$\vec{G}$确有有向哈密尔顿回路．

假设不然，即若把$\vec{G}$的顶点集划分为两个子集，总能找到具有给定性质的两边，但$\vec{G}$却不是强连通的．现在，设$\vec{G}_0$是G的一个强连通的子图并且具有极大的可能的顶点数．$\vec{G}_0$至少含有一顶点，但不包含$\vec{G}$的全部顶点．让我们把$\vec{G}$的顶点集划分为两个子集，使其中之一就是$\vec{G}_0$的顶点集．于是，存在一条有向边(p_0, p_1)，其中p_0属于$\vec{G}_0$，但p_1不属于它．再定义一个集合P，它由p_1及$\vec{G}$中这样的一些顶点组成，它们是能从p_1沿$\vec{G}$内的有向路而到达的顶点．P中不能有一顶点属于$\vec{G}_0$，因为，不然，便会有一有向回路$\vec{L}$，以p_1为始点，而其终点在$\vec{G}_0$内．但此时，把$\vec{L}$及边(p_0, p_1)联结于$\vec{G}_0$将产生一个强连通图，矛盾于$\vec{G}_0$的极大性．所以$\vec{G}$有不在P中的顶点（比如，属于$\vec{G}_0$的一些顶点）．由此，能考虑一个$\vec{G}$的顶点集的一个划分，使P单独作为其两子集之一．但集合P的确定的性质表明不能有这样的边存在，其尾在P中而其头不在P中，因此，矛盾于假设．因此，问题中的图$\vec{G}$是强连通的，从而$\vec{G}$有一有向哈密尔顿回路．

第 五 章

43. 所求的循环赛的安排，用本章开头所描述的方法很容易作出．

44. 图 123 中粗线所示的边是一哈密尔顿回路的边．此哈密尔顿回路是两个1-因子的积．（如图 233 中标有数字1与 2 的边所表示．）若考虑图的另一哈密尔顿回路它由图 123 中细线所示的边所构成，且也分解为两个1-因子，（图 233 中标有数字 3 与 4 的边），则余下的边（由数字 5 标出）构成图的1-因子．

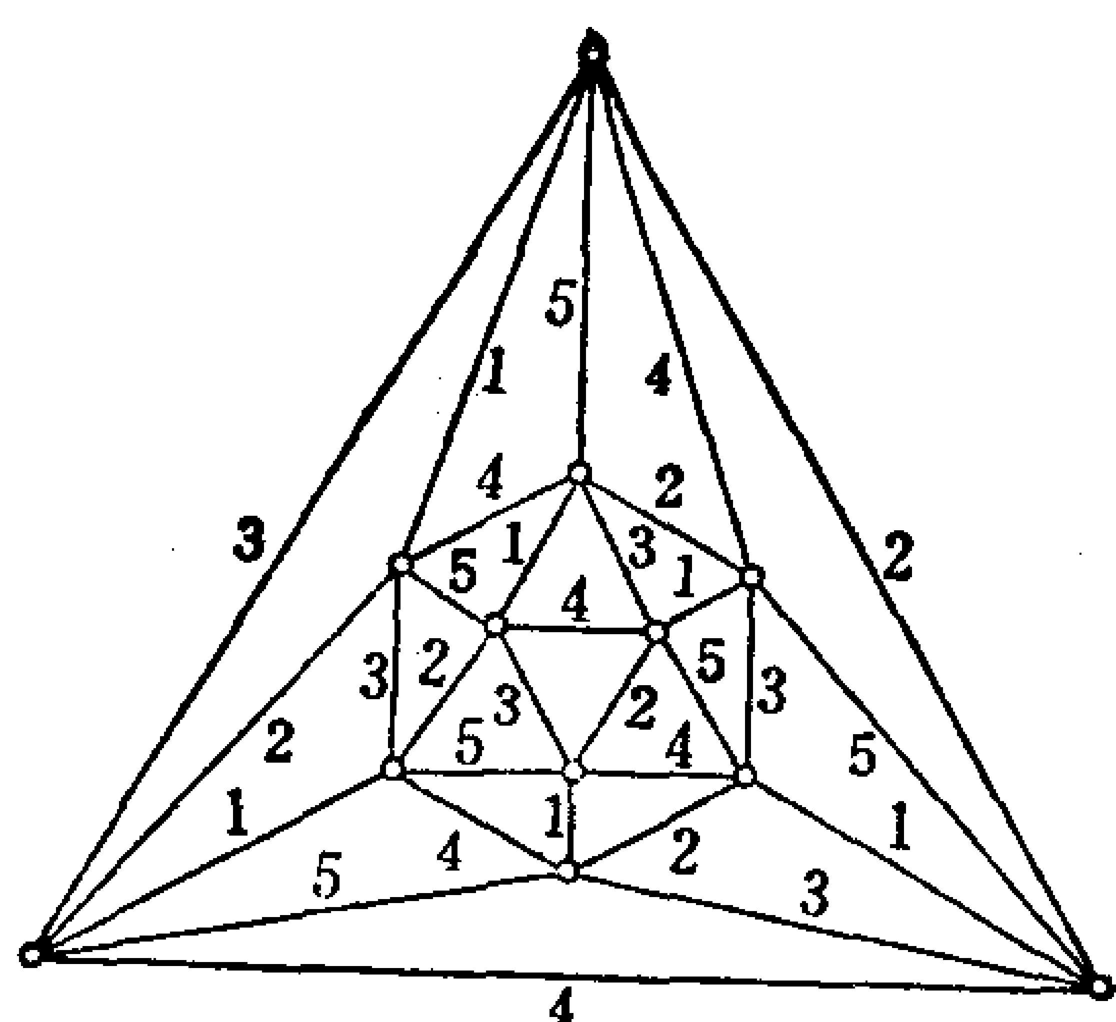


图 233

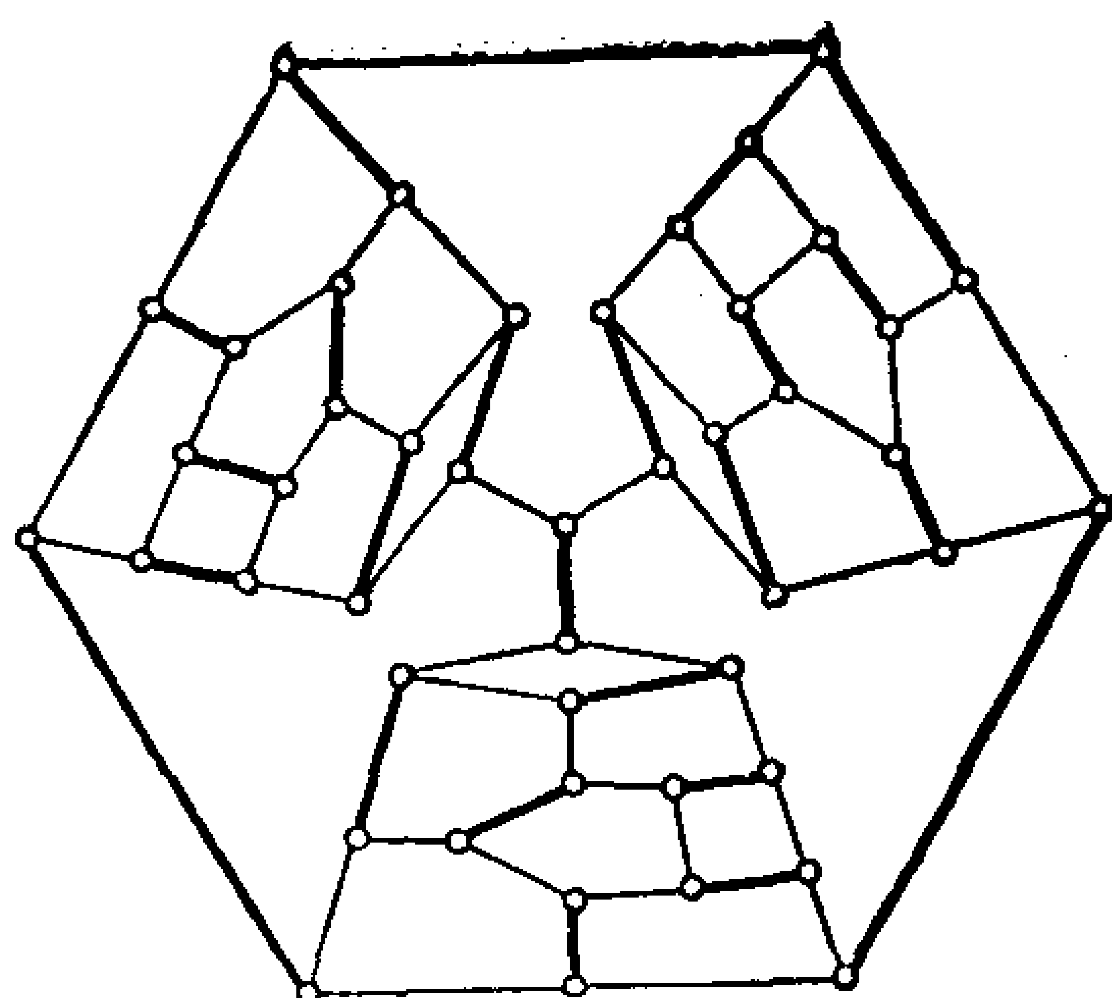


图 234

45. 若图 128 被分解为两个因子，则其中之一必是次数为1的(见图 234中的粗线)．细线所示的边构成图的一个2-因子．注意，图没有连通的 2-因子 (即哈密尔顿回路)(见第四章的问题**33**)．

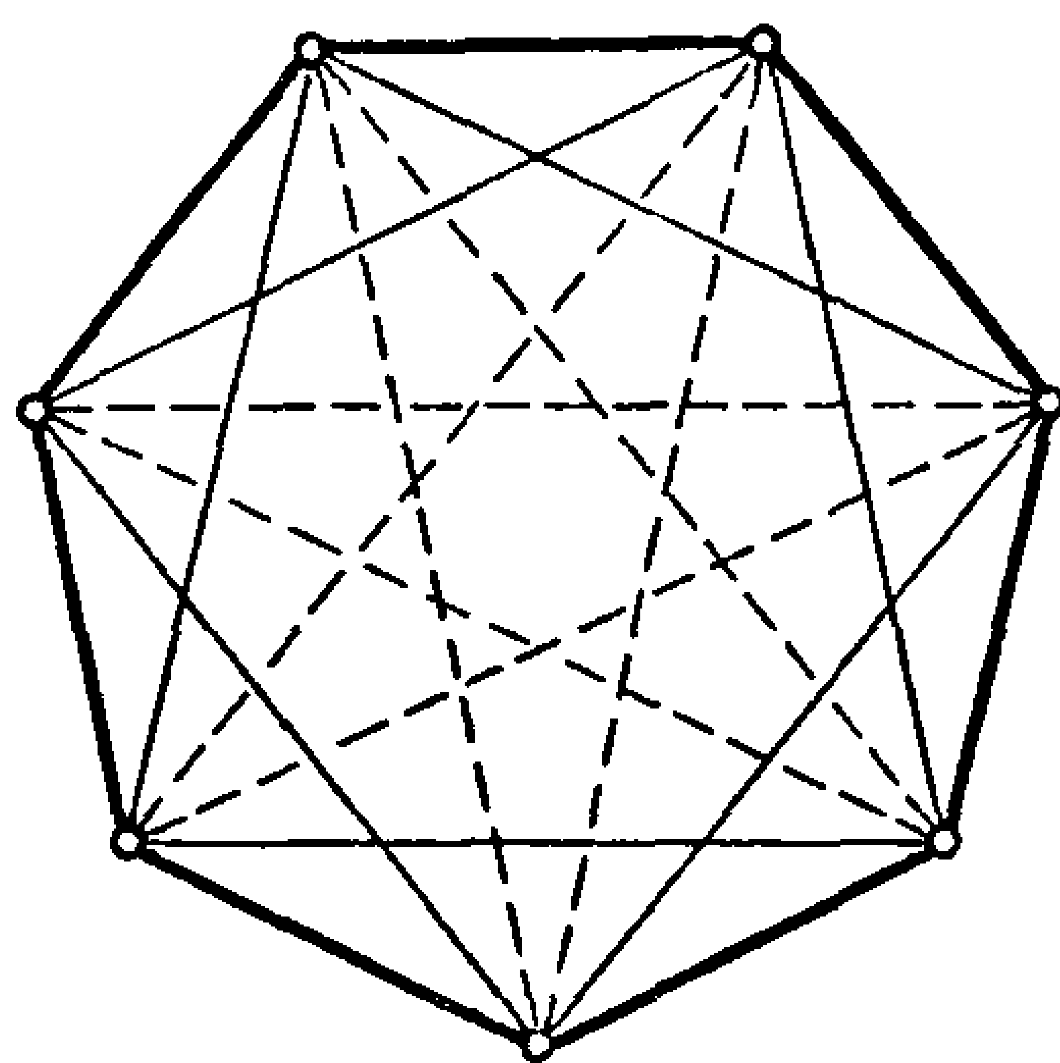


图 235

46. 图 235 中所示的粗、细及虚边表示所求的三个因子．它们是哈密尔顿回路——可按命题**13**后略述的方法得到．

47. 具有 5 个顶点的完全图的任一双图子图$G(A, B)$有性质：A或B至多有两个顶点．让我们假设删去双图$G(A, B)$的边，其中A不含多于两个的顶点．以C表示具有 5 个顶点的完全图的不在A内的顶点集，则C至少有3个顶点．具有 5 个顶点的完全图的由C导出的子图的边没有一条被删去．因此，在具有 5 个顶点的完全图中存在一个三角形，其中没有一条边是被删去的．所以，在删去后余下的图不能是双图．

48. 应用命题**35**本问题容易解答．没有一个图含1-因子，因

为，若命题35的集合Q各由图155中的顶点a，b与c和图156的中央的单个顶点构成，则分别有$k=5$及$k=3$. 注意到图155有性质：全部顶点含于图的回路中；又注意到图156无重边——不象以前指出的无1-因子的3-正则图.

49. 若G满足问题的命题的条件，G就具有一闭欧拉线. 沿着G的这条欧拉线走，我们交错地给边标上数字1与2，标有同一数字的边构成G的一个k-因子，因为每次我们沿1型的边到达一个顶点，我们又沿2型的边离开它，或者次序相反. 对于出发点也如此，因为G有偶数条边. 于是，问题得解.

注意，若所要求的分解是可能的，则所讨论的图，必有偶数条边，因为两个k-因子有相同数目的边，具有$4m-1$个顶点的完全图是$2k$-正则连通图，$k=2m-1$. 这种图的边数是

$$\frac{(4m-1)(4m-2)}{2}=2(4m^2-3m)+1,$$

即，对于m的每个正整数值，它是奇数. 因此，图有偶数条边这一条件不能省略.

若一个图恰有两个分支，它们都是具有$4m-1$个顶点的完全图，则它也是$2k$-正则图，其中$k=2m-1$. 这图有偶数条边，但它不能分解为两个k-因子，因为不然，我们可分别地分解每个分支. 但这是不可能的(见上述). 因此，图是连通的这个条件也不可省略.

50. 设G是一个欧拉图. 于是，据第三章的命题**6**，G的每个顶点的次数是偶数；据第三章的命题**5**，所以G的每条边含于G的一个回路中；又据第三章的命题**12**，G中无桥.

51. 设h是连通k-正则图G的一座桥. 第三章的问题**5**表明若k是偶数，则G中无桥. 因此，k是奇数. 设F_1是G的一个奇次因子. 于是，G中不属于F_1的边构成一个偶次因子F_2. 第三章

问题 5 的命题表明 F_2 的每条边含于 F_2 的一个回路中. 因而, 也含于 G 的一个回路中. 所以, 据第三章的问题 12, h 不属于 F_2 而在 F_1 内.

52. 此命题显然可由上一问题的命题推出.

53. 此命题也可由问题 51 的命题得来.

54. 假设连通 $2k+1$-正则图的一个顶点邻接于 $2k+1$ 座桥. 图的任一因子分解至少产生一个奇次因子. 问题 51 的命题表明其次数为 $2k+1$. 因此, 图中不含一个次数小于 $2k+1$ 的因子.

这个评注也表明在图 G_{2k+1} 中, 象在命题 42 中那样(见图154 中的 G_5), 没有一个因子是它的一个真子图, 因为桥只能关联于中央顶点.

55. 我们必须证明, 在把连通双图 G 的顶点任意地分成黑色与白色, 使同一部分的顶点有同一的颜色, 设 p 是 G 的任一顶点, 以 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 记其余的顶点. 因为 G 是连通的, a_i 可由 p 沿路 L_i($i=1, 2, 3, \cdots$)到达. 若顶点被分成白的与黑的, 每条边总关联于不同颜色的两个顶点. 因此, 若 L_i 的长是偶数, 则 a_i 总与 p 同色, 否则对于一切 i 值便是不同色的.

56. 设想把网放置在 $m\times n$ 格的棋盘上, 使每格上恰有一珠. 若每珠与对应的格同色, 则每线段联结的是不同色的两珠. 因此, 若珠与线分别对应于图的顶点与边, 则此图是双图. 应用图论的术语, 问题是: 什么样的 m 与 n 的值能使具有 $m\times n$ 个顶点的双图具有哈密尔顿回路? 每个回路——或哈密尔顿回路——的长, 在一个双图中应是偶数. 因此, 若 $m\times n$ 是奇数, 网不能按所要求的方式由单个的回路所构成. 若 m 或 n 是偶数, 则可以. 图 236 指明此过程如何应用于图 157 的网. 一般的情况与此类似.

57. 假定一个双图有 m 个白的与 n 个黑的顶点. 以 k_0 记一个(比如说)白顶点的次数, 假定图的所有其余的顶点的次数为 k, 其

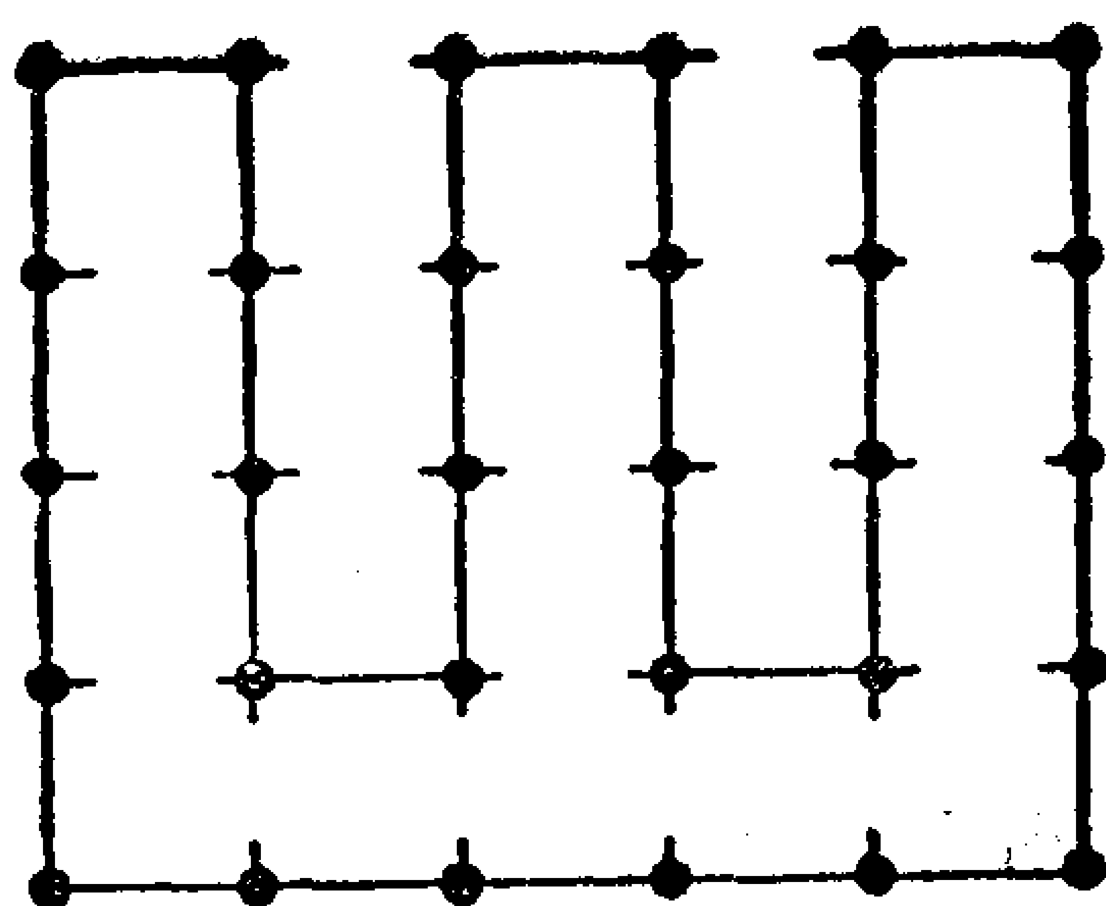


图 236

中$k_0>0$及$k>0$. 图的边数，可由计算关联于黑的与白的顶点的边数两种方式给出. 因而，我们得到

$$k_0+(m-1)k=nk.$$

因此，

$$k_0=(n-m+1)k.$$

由于$k_0>0$及$k>0$, $n-m+1\geqq 1$, 我们得到

$$k_0\geqq k.$$

所以，不存在没有孤立顶点并具有性质：除一个顶点外，其余的全部顶点，有相同的次数的双图，而这例外顶点的次数又小于其余顶点的次数.

58. 我们对n用归纳法进行证明. 命题对于$n=1$是显然的，因为具有两个顶点的完全图是双图. 设$n\geqq 1$, 假设命题对于n成立. 我们将证明命题对于$n+1$也成立. 设G是一个具有2^{n+1}个顶点的完全图，以A记G的任一2^n个顶点的集合. 以B记G中不在A内的顶点的集合；它也包含2^n个顶点，因为$2\times 2^n=2^{n+1}$. 以G_A与G_B记G的分别由A与B导出的子图. 设$G_0(A, B)$是G的包含尽可能多的边的双图子图. G_A与G_B都是具有2^n个顶点的完全图. 于是，由假设，在G_A和G_B中都可以找到n个子图，每个这样的子图是双图，它们一起包含G_A与G_B的全部的边. 由于A与B没

有公共顶点. G_A的任一双图子图与G_B的任一双图子图放在一起仍然是双图. 让我们把G_A与G_B的这些双图子图进行配对，并以$G_1, G_2, \cdots, G_n$记所得的双图. 最后, 双图的组

$$G_0, \quad G_1, \quad G_2, \quad \cdots, G_n$$

包含了G的全部的边; 于是命题对于$n+1$得证.

注意我们不能在具有2^n+1个顶点的完全图中找到n个双图子图, 使得完全图的所有的边都出现于这些子图之一. 当$n=2$时, 练习47的命题证实了这一点.

59. 所讨论的双图, 形如$G(A, B)$, 对于一切n的值, 使得A与B的每个有$2n$个顶点, 且A的任一顶点邻接于B的全部的顶点. 设

$$a_1, a_2, \cdots, a_{2n}$$

与

$$b_1, b_2, \cdots, b_{2n}$$

分别为A与B的顶点. 我们将清楚地给出所求的分解过程. 一般情况可借助于图237所示的$n=3$的情形导出. 在此图中, 考虑了有两个有共同中心的正$2n$边形, 顶点a_i与b_j都是此两$2n$边形的顶点. 图中所示的边构成我们的图的哈密尔顿回路H_1. 现在我

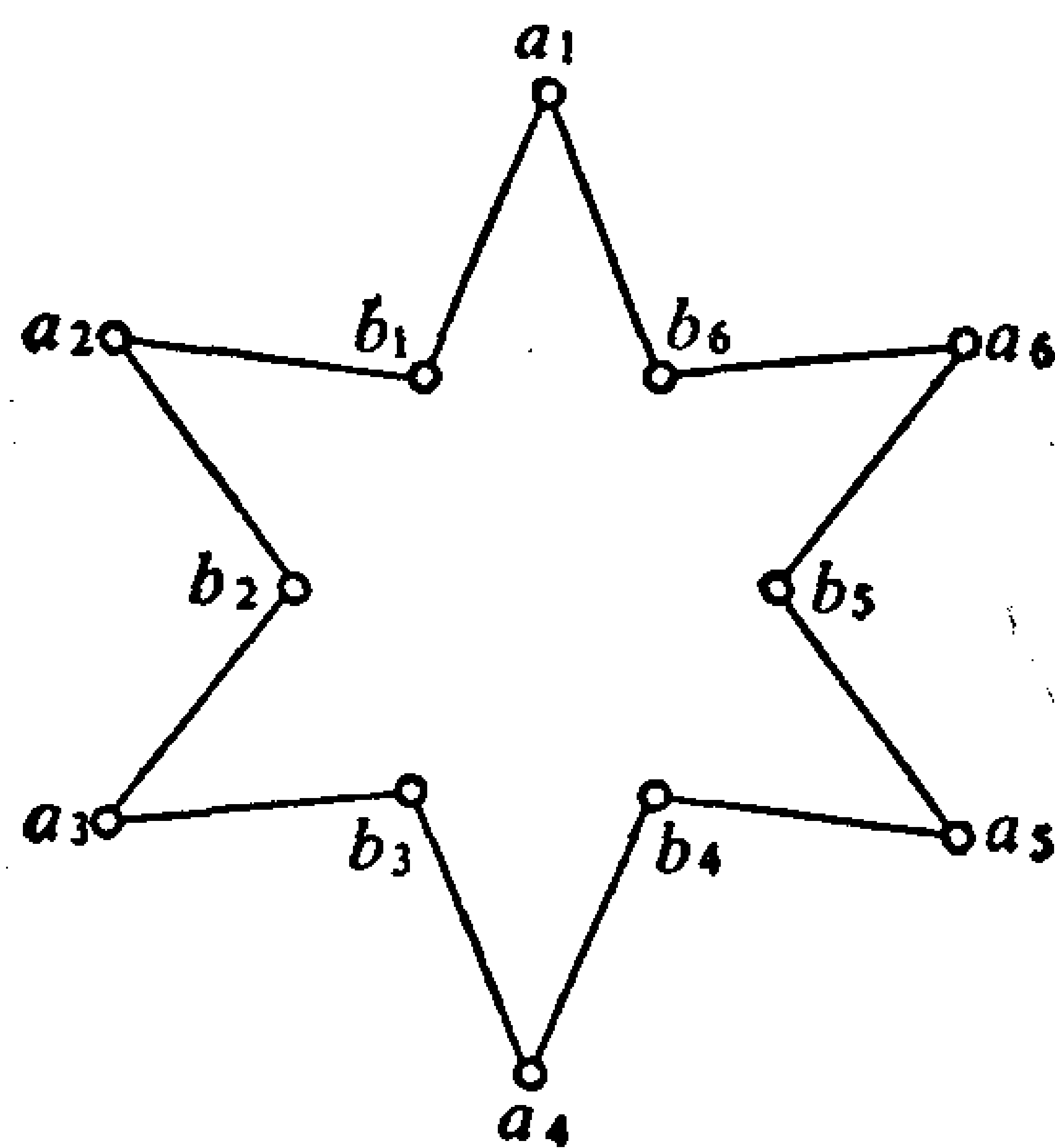


图 237

们把顶点 a_i 的下标增加2，并以a_1与a_2分别替换 a_{2n-1} 及 a_{2n}. 则图的边构成另一哈密尔顿回路 H_2. 每调整一次下标便产生一个新的哈密尔顿回路. 把这些回路记为$H_3, H_4, \cdots, H_n$. 易证这些哈密尔顿回路中没有一对具有任何公共边；因此，求得了我们图的所需的分解.

60. 对本问题给出两个解，仅第二解用到图论的知识.

对于第一解，我们从棋盘上所选的某一格出发，"水平地"，尽可能地走，一直到同一行的另一选定的方格为止. 然后，"垂直地"，尽可能地走，直到同列的另一标出的方格为止，如此下去；我们按水平与垂直的方向交替地走. 迟早，会来到我们先前到过的一个方格（见图 238). 此方格M必定是出发时的那一格，因为不然，可随之考虑下列过程：线 PM 引导到M，M是第一次到达. 而沿MQ，M又被略去. 最后，我们沿第三线RM到达M，这给了我们与M同行或同列的第三个方格(三个方格是P, Q及R). 但这是一个矛盾，因为与M相同的一行与一列中只能分别另选一个方格. 因此，路线是闭的并覆盖了偶数个方格，因为水平的与垂直的线段是互相交替的. 让我们沿着路线每隔一格放上白棋子，而在其余的方格上放置黑棋子. 容易知道每行与每列均恰有一个白的与一个黑的棋子.

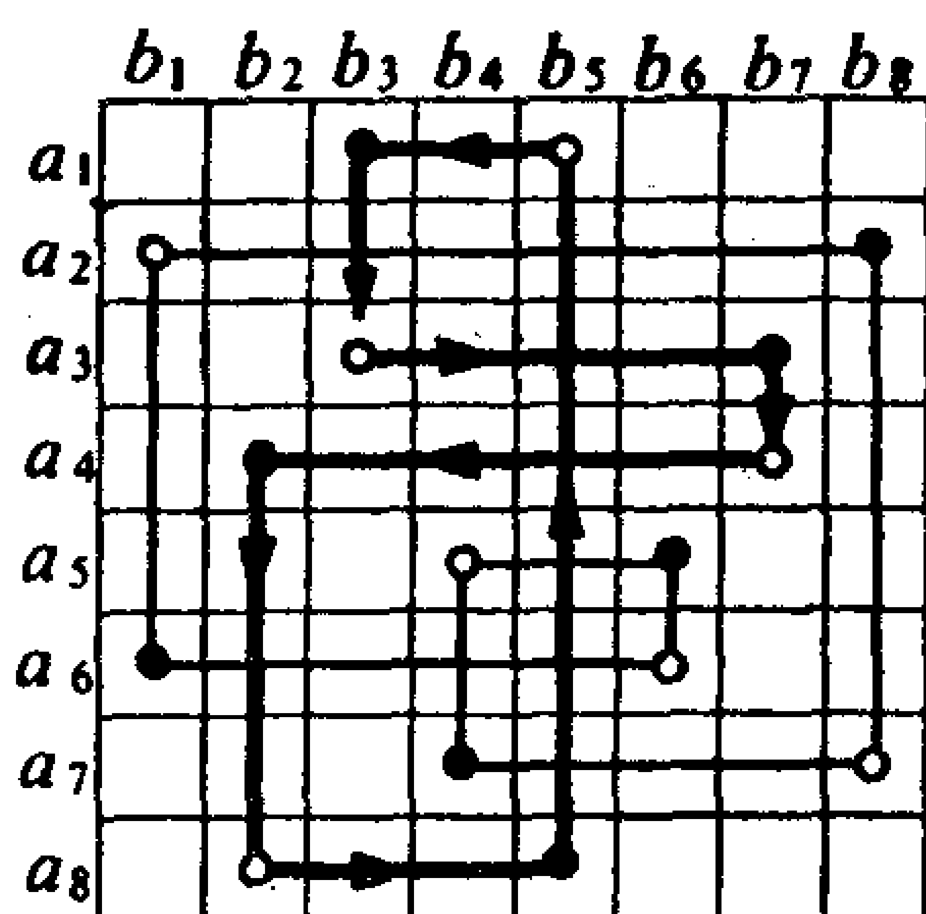


图 238

若某些行与列一直没有涉及，即我们的路线还没有覆盖全部所选的方格，则让我们从任一未被覆盖的方格出发，以同样的方式行进. 再一次地交替地放置白的与黑的棋子，添加的行与列将都含一白的与一黑的棋子，被第一路线所覆盖的方格不会被第二路线

所覆盖，因为第二路线的出发顶点不在第一路线上，这表明同行的另一所选的方格，还不曾被覆盖；且，此时与此后一方格同列的另一所选的方格也不曾被覆盖，等等.

如有必要，便可重复这一过程，直至每行每列恰含一白的与一黑的棋子.

在第二解法里，双图 $G(A, B)$ 可按下法构造而得：集 A 与 B 各包含 8 个顶点，分别对应于棋盘的 8 行与 8 列. 以 $a_1, a_2, \cdots, a_8$ 及 $b_1, b_2, \cdots, b_8$ 表示这些顶点. 当且仅当属于行 a_i 且属于列 b_j 的方格是被选出时边 $\{a_i, b_j\}$ 属于 G. 于是，我们的图的边对应于所选的方格；所以，G 有16条边.（图 239 表示 G，对应于图 238 的图.）由于棋盘的每行与每列有两个所选的方格，图 G 每个顶点的次数为2. G 是一个 2-正则双图，据命题 **18** 或问题 **8** 的命题，它可以分解为两个 1-因子，比如说，F_1 与 F_2 的积. 若把白的与黑的棋子分别放置在对应于 F_1 与 F_2 的边的方格上，即得所求的放置法.

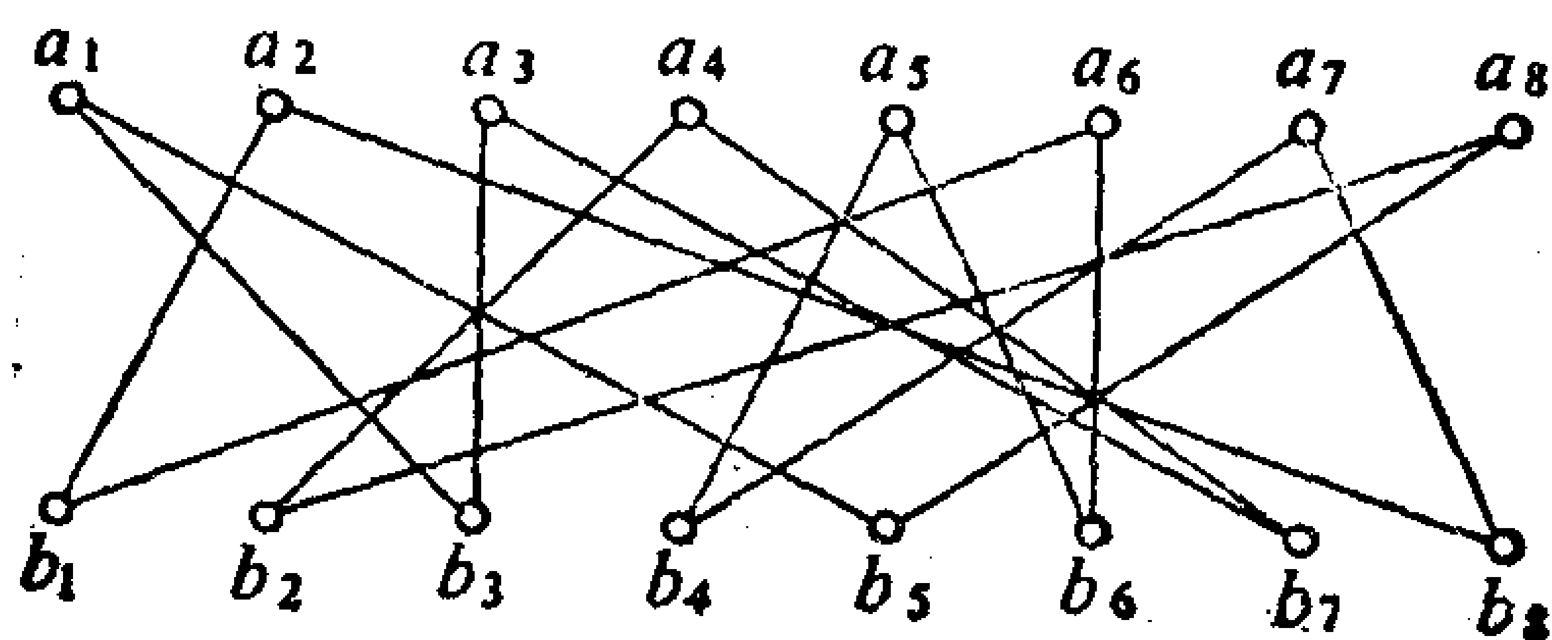


图 239

注意，从图论的观点看来本问题实质上与问题8是一回事.

61. 用两种方法来证本命题. 先设 h 是连通 k-正则双图（$k \geq 2$）的一座桥. 若删去 h，就得到两个双图，没有孤立顶点，使在每个图中，有一个顶点的次数是 $k-1$，而所有其余顶点都有次数为 k. 作为问题57的否定答案的一个结果，这是不可能的.

用命题18给出第二个证明；它说明我们的图至少是两个1-因子的积. 所有这些 1-因子必含有图的每座桥，根据问题51. 因此，

我们的图不能有任何的桥.

62. 让我们把学生排成 n 行与 n 列，使得每个学校的学生组成一行，同时通晓同一主题的学生在同一列. 让我们以下述方式定义双图 $G(A, B)$: A 与 B 都有 n 个顶点，分别对应于行与列. 每个学生对应于图的一边；若他位于第 i 行与第 j 列，则边分别关联于 A 与 B 中对应于第 i 行与第 j 列的顶点. 于是，此图是 n-正则双图. 必须证明此图存在一 k-因子，因为问题要求我们选拔的学生对应于一 k-因子的边. 据命题18，我们的图是 n 个1-因子的积. 这种分解的任一 k 个 1-因子的积就产生一个 k-因子.

下述选拔学生的方法易证是合适的. 让我们在开始时，选拔第一列的第一个学生，第二列的第二个学生，等等，从每列选出 k 个连着的学生，假定第 n 个学生之后是第一个学生（见图 240 中的黑点，其中 $n=5$ 及 $k=3$）.

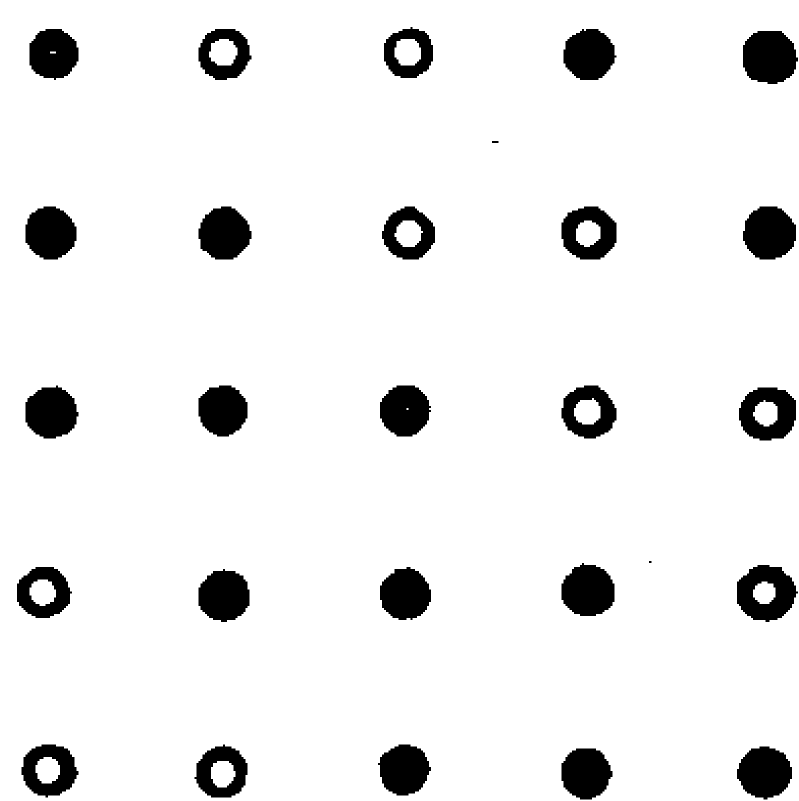


图 240

63. 考虑一个双图 $G(A, B)$，无重边，其中 A 与 B 都有 n 个顶点，每个顶点的次数至少是 $n/2$. 我们必须证明存在一个覆盖 B 的独立边集. 这只需证明满足命题19的条件即可. 让我们在 B 中选取 k 个顶点. 若 $k \leq n/2$，则这些顶点中的任一个至少有 k 个邻接顶点，因为每个顶点的次数至少为 $n/2$，且图没有重边. 若 $k > n/2$，则所考虑的顶点的邻接顶点构成整个集合 A，因为 B 的未被选上的顶点的个数小于 $n/2$，且由于 A 的每个顶点至少邻接于 B 的 $n/2$ 个顶点. 于是，A 的全部的顶点在这些选出的顶点中有邻接的顶点.

64. 所求证的等式可由命题 28, 22 及30的等式推出.

注意：在此命题中略去"双"字也能得证.

65. 假如不然，即双图 $G(A,\ B)$ 的集合 A 与 B 都恰有 m 个顶点

$(m\geqq 2)$, G无重边，至少有$m(m-1)+2$条边，但无哈密尔顿回路。于是，A的所有顶点不能邻接于B的所有顶点，因为否则，显然G中存在一哈密尔顿回路。因此，据命题32，G中分别有A与B的顶点a与b，它们不邻接，且有

$$\varphi(a)+\varphi(b)\leqq m.$$

若a与b分别邻接于B与A的全部的顶点，则将由这些事实推知$2m-1$条边的存在。由于，据上述不等式，这些边中至多有m条边属于G, G^*与G间的边数之差至少有$2m-1-m=m-1$。这里，G^*是一新图，从G由联结A的任一顶点与B的每个顶点得来。因此，G^*有m^2条边，G的边数不能大于$m^2-(m-1)=m(m-1)+1$，这是一个矛盾。所以，我们假设G没有哈密尔顿回路是不正确的（参看第四章的问题35）。

66. 问题的命题容易从命题33推出，因为没有男孩或女孩在舞会上分别地认识少于$m/2$名的女孩或男孩。所以，图有一哈密尔顿回路，它就表示出所求的安排法。

第　六　章

82. 如图 241 所示的一对互补的图符合要求。粗线是三角形的边。

83. 只需证明，所考虑的任一边，它的端点无公共的邻接点。

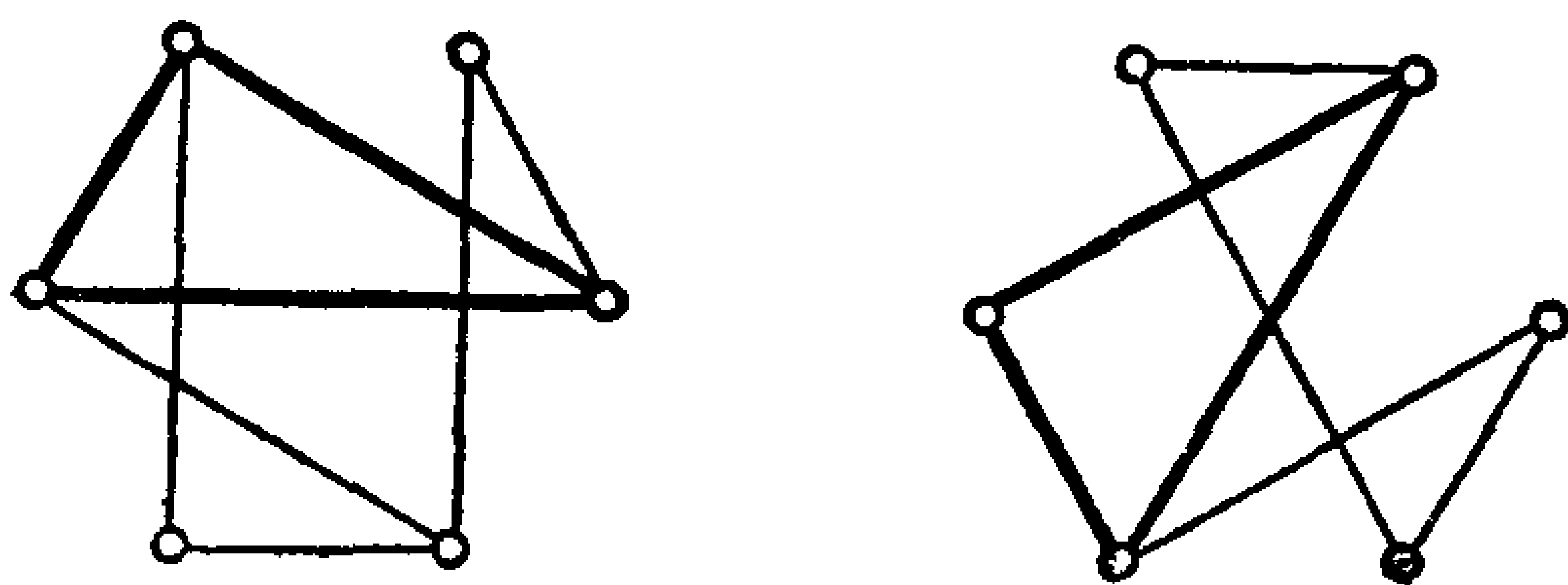


图　241

鉴于图形的对称性，只需考虑两边：作为图的骨架的多边形的一

边以及一对角线.

84. 把命题43应用于本问题(长为4的回路与它的对角线一起也是一个具有4个顶点的完全图); 命题40也可用来解答第一问题. 若$k=3$, 只需比命题40及命题43内给出的边数界限多1. 因此, 当$n=8$时, 两问题的正确答案分别是17及22, 而当$n=9$时, 则为21及28.

85. 据命题5.28与6.53,

$$n=iv_{\max}+cv_{\min}\leqq iv_{\max}+\frac{2en}{2e+n}.$$

因此,

$$iv_{\max}\geqq n-\frac{2en}{2e+n}=\frac{n^2}{2e+n}.$$

据命题6.53, 等式成立当且仅当所考虑的图是一n顶点的完全图, 或它的每个分支是顶点个数相同的完全图.

86. 由于, $d\leqq f/3$,

$$\frac{f+d}{4}\leqq\frac{f+f/3}{4}=\frac{f}{3}\text{ 及 }\frac{f}{6}+\frac{d}{2}\leqq\frac{f}{6}+\frac{f}{6}=\frac{f}{3},$$

所以, 对每个图成立$iv_{\max}=f$. 它们有相同的最低次数, 对第一图,

$$\frac{f+d}{4}+\frac{f+d}{4}=\frac{f+d}{2},$$

同时, 对第二图,

$$\frac{f}{3}+\frac{f}{6}+\frac{d}{2}=\frac{f+d}{2}.$$

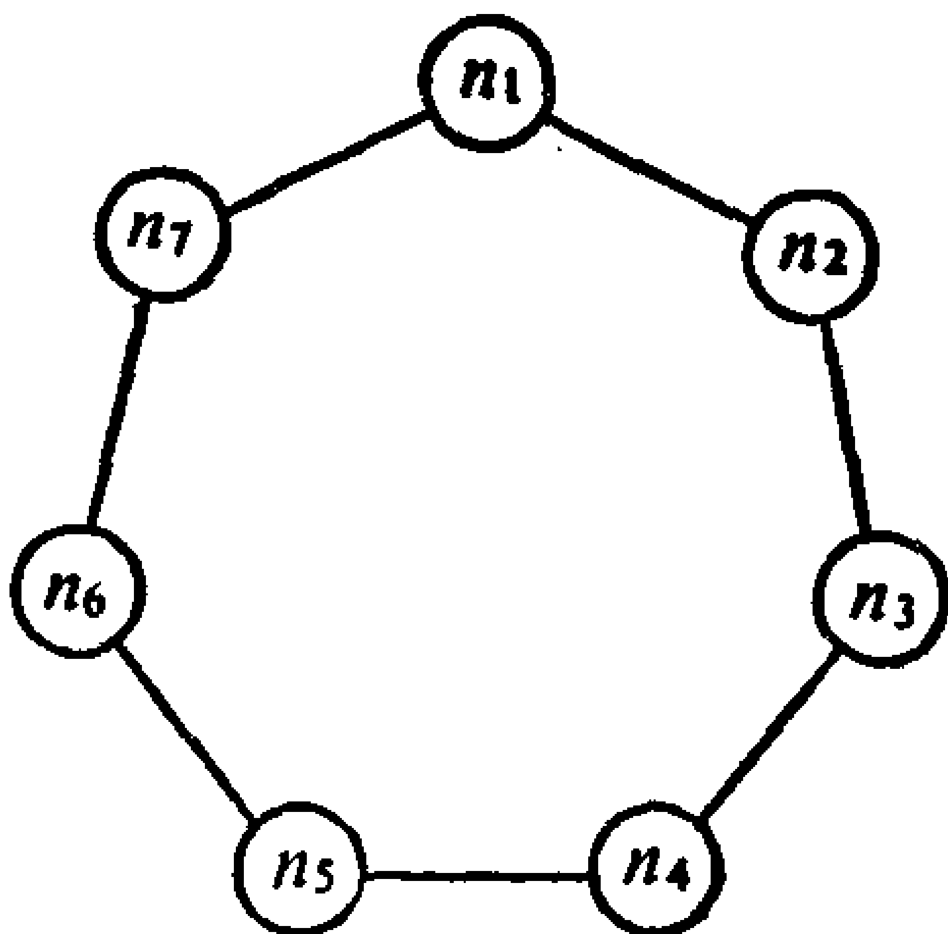


图 242

这些图都是$((n_1, n_2, \cdots, n_7))$型的(见图242), 我们以$G$表示这样的一个图. 若我们删去图中对应于联结图形的两圈的线的那些边, 易见, 即得到一个双图. 因此, G的每个奇回路包含7种类

型的每一种的边，它由图形的 7 条线所表示．因而，G的任一奇回路长至少为7.

87. 应用上一练习题所用的相同的方法，这些图显然不含三角形．因为只可能有$n\geqq5$，当

$$\frac{n-3}{2}\geqq\frac{n-1}{4}\geqq1$$

时，对于两图，有

$$iv_{\max}=\frac{n-1}{2}.$$

在第一图中的边数是

$$1+1+\frac{n-3}{2}\times2+\left(\frac{n-3}{2}\right)^2=\frac{n^2-6n+9+4n-12+4}{4}+1$$

$$=\frac{(n-1)^2}{4}+1.$$

第二图有相同的边数，因为

$$\frac{n-1}{4}\times2+\frac{n-3}{2}\times\frac{n-1}{4}\times2+1=\frac{n^2-4n+3+2n-2}{4}+1$$

$$=\frac{(n-1)^2}{4}+1.$$

88. 据**2.4**，所论图的边数至多为$n-1$. 若此数恰为$n-1$，则据**2.26**，图是连通的，即树．以F表示n顶点的树．若$n\geqq3$，则一长为 2 的路(见图243)含于F中．若无F的长度大于 2 的路，则全部它的边关联于b，往往把这些图叫做**星形图**．图243是星形图，1或2顶点的完全图也是星形图．因此，所求的图有$n-1$条边，且是星形图；无别的图具有这些性质.



图 243

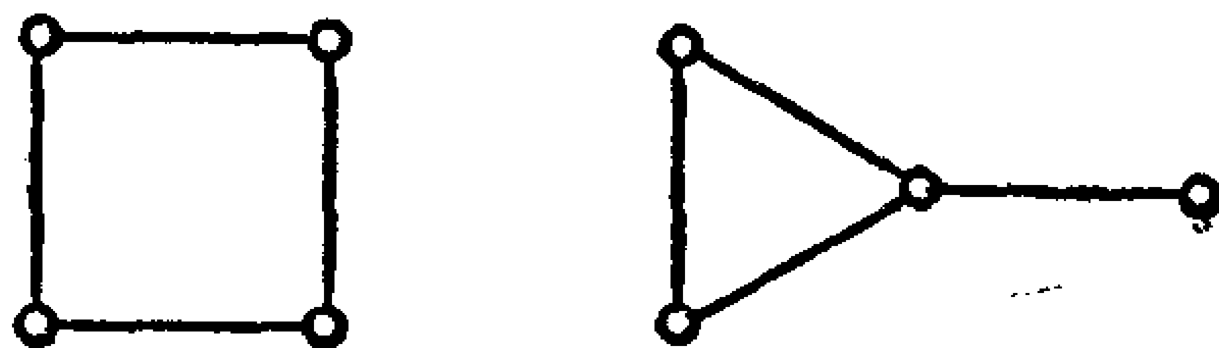


图 244

89. 图194表示 4 顶点的简单图，其中有两图适合本问题，它们同构于图244中的图.

90. 一长为 4 的回路连同一对角线所构成的图总含一三角形. $\langle m, m\rangle$型的图是双图；因此，不含三角形，它们不能含有长为4的回路连同一对角线.

91. $\langle 2, n-2\rangle$型的双图的全部回路的长都为4. 因此，我们的命题可用前一练习题所描述的方法推得.

92. 据5.23，图 192 与图 245 中的不同的极大独立顶点集的个数是相同的. 极小覆盖顶点集也如此. 如图 245 中粗线所示的长为 4 的路，不能由少于两个的顶点来覆盖，仅当这些顶点是 f 与 d 时，两顶点就够. 因为边 $\{a, b\}$ 尚未被它们所覆盖，每个覆盖顶点集含至少三个顶点. 若边 $\{a, b\}$ 被 b 所覆盖，则顶点 b, f 及 d 一起覆盖了全部的边，若不然，边不能被覆盖. 因此，在我们的图中仅存在一极小覆盖顶点集，所以顶点 a, c, e 与 g 是唯一的极大独立顶点集.

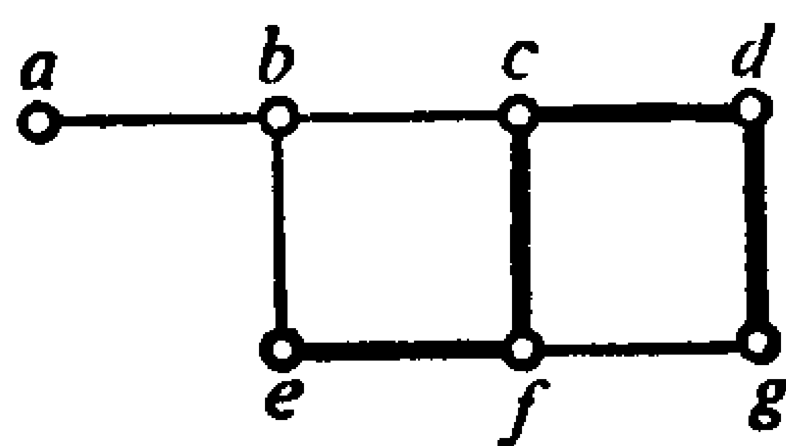


图 245

93. 据1.42，n顶点的不连通简单图 G 的补图 G^* 是连通的. 若 G 的边数是极大的，则 G^* 的边数是极小的. 据1.22，G^* 至少有 $n-1$ 条边. 因此，G 的边数至多为

$$\binom{n}{2}-(n-1)=\frac{n(n-1)-2(n-1)}{2}=\frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

若 n 顶点的简单图 G_1 有两个分支，它们分别是1及 $n-1$ 顶点的完全图，则 G_1 有 $(n-1)(n-2)/2$ 条边；因此，它是极图. 可以证明极图是唯一的. 如若不然，即还有一个极图是具有 n 个顶点的 G_2，G_2 的每个顶点的次数至多为 $n-2$，因为 G_2 是不连通的. 若 G_2 的每个顶点的次数至多为 $n-3$，则 G_2 至多有 $n(n-3)/2$ 条边，但这数小于

$(n-1)(n-2)/2$. 与 G_2 是极图的假设矛盾. 因此，G_2 有一次数为 $n-2$ 的顶点p, 所以 G_2 内恰有一个顶点q存在，它不同于p及其邻接点. q是G_2的一孤立顶点. 由于G_2是不连通的. 因此，G_2同构于G_1.

94. 设 G 是定义数$n(3, 3)$问题的极图，G^*是它的补图. G与G^*都有 5 个顶点，它们没有三角形，且都有 $iv_{max} \leqq 2$. 若 $iv_{max}=1$, 对于其中之一成立，则它将是 5 顶点的完全图，所以将含一三角形. 因此，对于 G 与 G^*均有$iv_{max}=2$. 据命题17，在 G 内与G^*内的每个顶点p的次数至多为2. 因为，p 在 G 内与G^*内的次数和是4, 所以每个顶点在两图中的次数均为 2, 据**1.42** G 与 G^*之一是连通的. 因此，据 **1.36**, 其中之一是长为 5的回路，它的补图也是一五边形.

95. 让我们假设命题不真. 或者在 6 顶点的简单图G内或在它的补图G^*内，所含的三角形的总个数假设至多为一个. 据**1.16**, 其中之一，比如是G^*, 含一三角形. 图G, 不含三角形，所以，有三个独立顶点. G 不含4个独立顶点，否则G^*将含有一 4 顶点的完全子图，因而也含有两个三角形. 所以，对于 G, $iv_{max}=3$. 以F表示G中的极大独立顶点集. 因为G 的任一极大独立顶点集导出 G^* 的一三角形，F 是 G 中唯一的极大独立顶点集. 有一边$\{p, q\}$存在于 G 内被不在F 内的那些顶点导出的子图中. 因为，F 是极大的，p与q在F 中均有邻接点. 若在G 内p仅有一个邻接点于F 的顶点中，则F 的不邻接于 p 的两顶点将与p构成异于F 的一极大独立顶点集，这是一个矛盾. 同理，对于q也成立. 所以，p与q在F 内至少有两个邻接点，因而它们有一公共的邻接点. 于是，得到 G 中的一个三角形，这是一个矛盾.

据练习82, 不能证明含于这些补图中的三角形个数总大于2.

96. 图 189 中，每个顶点的次数是4. 据练习**83**, 图没有三角

形．任一顶点的 4 个邻接顶点构成一独立顶点集．以K表示构成图形骨架的13边形．易见，由于图形是对称的，任一顶点p的邻接顶点是沿K在p后的第 1，第 5，第 8 与第12个位置．让我们假设图有 5 个独立顶点，每个顶点被一黑币覆盖，同时所有其它的 8 个顶点由白币覆盖．黑币覆盖的顶点不能是邻接的．相对于黑币，白币应在哪里呢？在任两黑币间存在一白币．（硬币的顺序与邻接性，自然假定是沿K的；两黑币是相邻的，若在它们间的两弧之一没有别的黑币．）对此需有 5 个白币．让我们来找出另外三个白币的位置．若此三个也在相邻两黑币之间，则存在一黑币，使其以后的第五个硬币也是黑的（见图 246）；这是一个矛盾，因为被黑币所覆盖的顶点必定是独立的．因此，对于两个黑币，a与b，必恰有两白

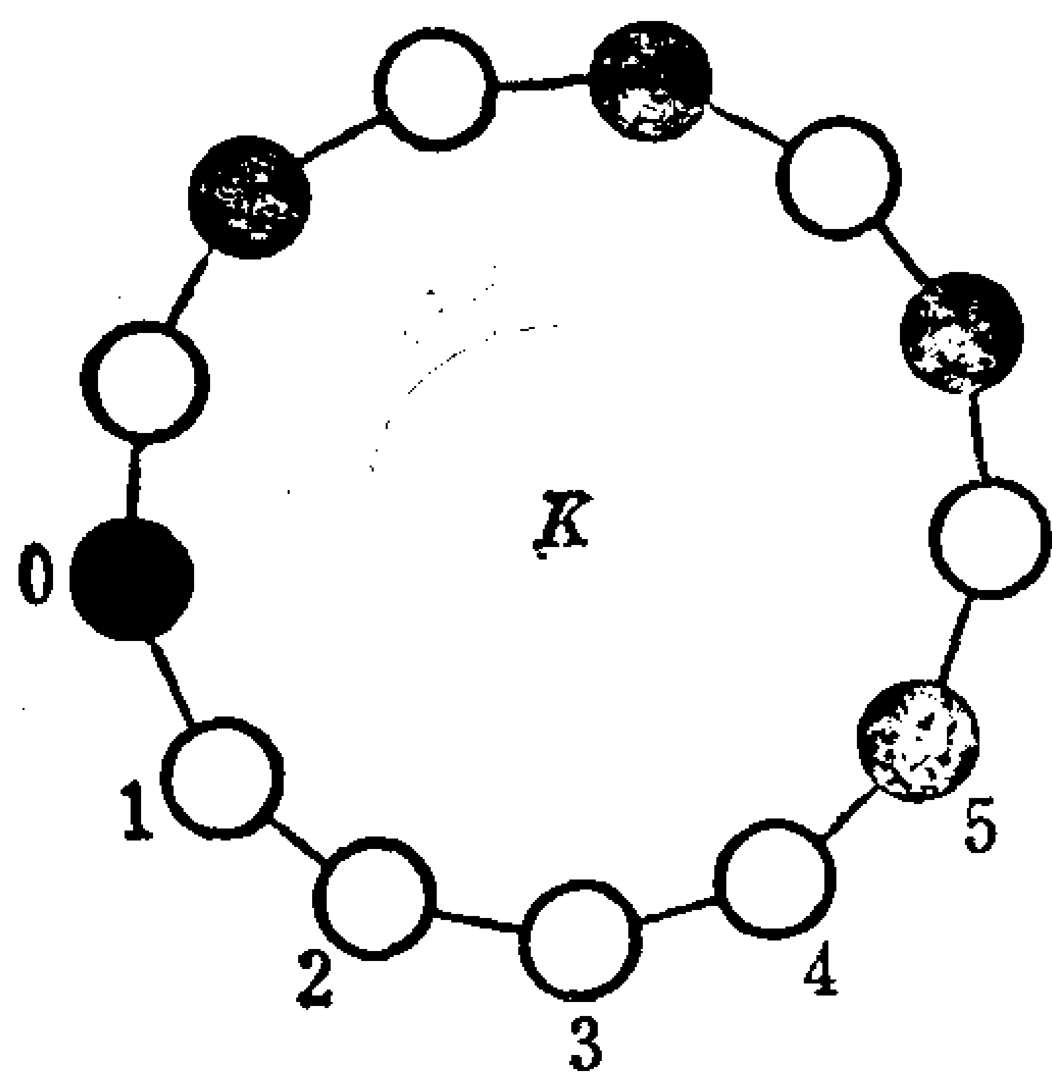


图 246

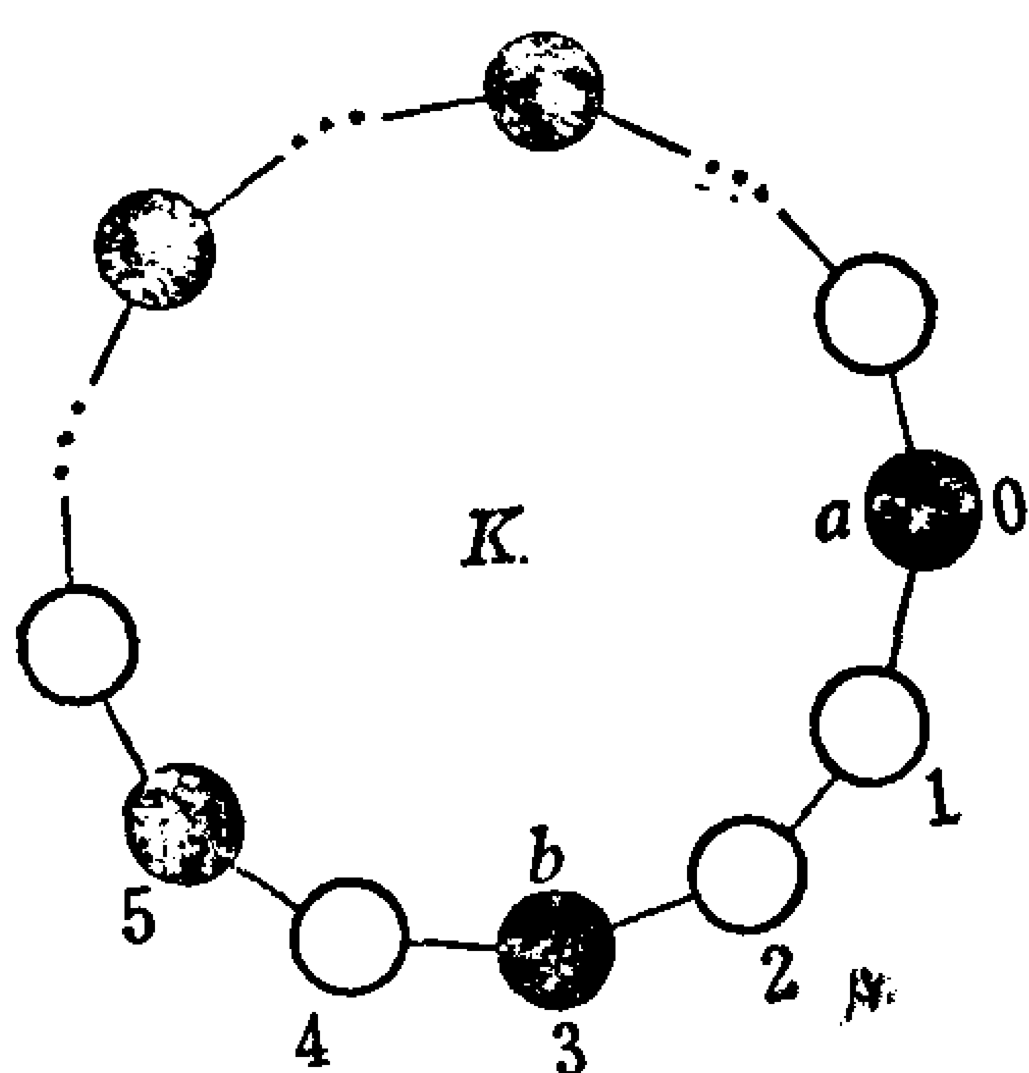


图 247

币在它们之间．但是为了避免此矛盾（见图 247）至少得多一个白币在b及别的与b相邻的黑币（异于a的）之间．交换a与b的作用，仍然如此．由此，确定了全部13个硬币的位置，但这又引出了另一个矛盾（见图 248）．所以，对于图 189 的图，$iv_{\max}=4$.

97. 据练习**83**及问题**96**，$n(3,5)>13$，即$n(3,5)\geqq 14$．但由命题24，

$$n(3,5)\leqq\binom{6}{2}-\left[\frac{5}{2}\right]+1=15-2+1=14.$$

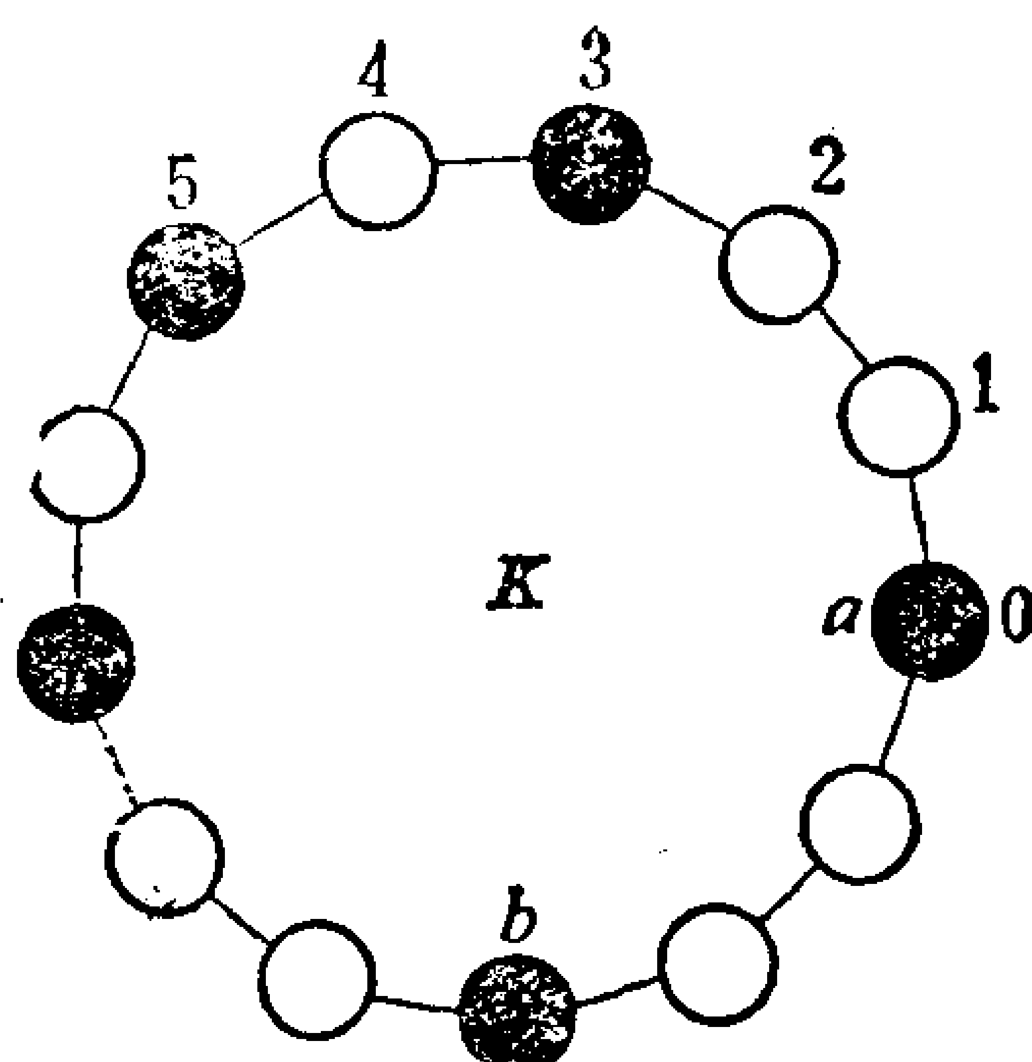


图 248

所以，$n(3,5)=14$.

图 189 的图是极图，可以证明它是本问题唯一的极图.

98. 从具有 n 个顶点的完全图中，删去一顶点 p 连同它的关联边. 所得的有 $n-1$ 个顶点的完全图，据 **5.1**，它是 $n-2$ 个 1-因子的积. 让我们给边染上色，使同一 1-因子的边有同一色，而不同的 1-因子有不同的色. 最后，设关联于 p 的所有的边具有不同的颜色. 此染色的 n 顶点的完全图的任何单色子图的任一分支至多有三个顶点. 因此，若 n 是奇数，

$$f_{n-1}(n)\leqq 3,$$

显然，$f_{n-1}(n)\geqq 2$. 现在假定对某奇数 $n\geqq 3$，$f_{n-1}(n)=2$ 成立. 这意思是 n 顶点的完全图的边，能被染上 $n-1$ 种色，使之没有同色的边对有一公共端点. 则同色的边构成 n 顶点的完全图的 1-因子. 这表明 n 不能是奇数. 所以，若 n 是奇数，则

$$f_{n-1}(n)\geqq 3$$

也真；这与上述不等式一起，表明 $f_{n-1}(n)=3$.

99. 我们必须证明对任一 $m+k$ 顶点的简单图 G，或者 G 有一长为 m 的路，或者它的补图 G^* 有一长为 k 的路. 以 T 记一 $m+k$ 顶点的完全图. 让我们给 T 的边染上两色，红与蓝，使 G 与 G^* 分别地

仅由红与蓝边表出，我们须证T或是含一长为m的红路，或是含一长为k的蓝路．若T的全部的边有同一色，则存在一长为$m+k-1$的单色路，由此证明了命题．若T中同时存在红与蓝边，能找到T中的一子图T'，由一红与一蓝的路组成，两条路恰有一公共顶点．让我们考虑这类型的全部子图T'及T的全部单色路；以T^*记具有这些图中有极大边数的图之一．若T^*不是单色的，以L_1及L_2表示T^*的分别由红与蓝边组成的路．此时，令p是L_1及L_2的公共顶点，同时q_1及q_2分别表示L_1与L_2的异于p的端点．

现在，我们来证明T的全部顶点含于T^*中．假设不然，即T中有一顶点r不在T^*内．若T^*是一单色路，q为其顶点之一，则把它联结到T的边$\{r, q\}$上，无论该边有什么色，均矛盾于T^*的极大性．不然，若T^*不是单色的，则它的极大性表明T的边$\{r, q_1\}$及$\{r, q_2\}$分别是蓝与红色的．如图 249 所示的情形；实线与虚线分别对应于红与蓝边．T的边$\{q_1, q_2\}$或是红的或是蓝的．在前一情况，让我们删去T^*的关联于q_2的蓝边，添加以边$\{q_1, q_2\}$及$\{q_2, r\}$．T^*的这一改变矛盾于T^*的极大性．在后一情况，类似．因此，若以m_1及k_1分别记L_1与L_2的长，则

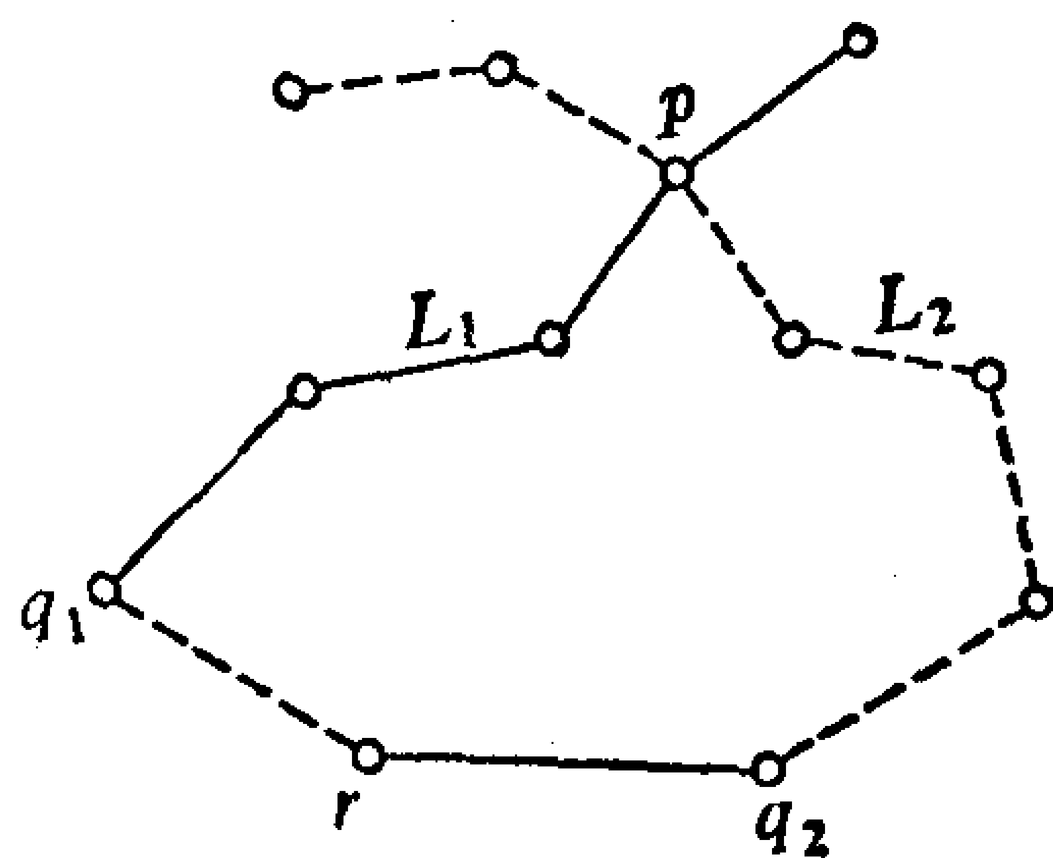


图 249

$$m+k=m_1+1+k_1.$$

若T不含一长为m的红路，则T^*也不包含；因此，$m_1 \leqq m-1$，因而

$$m+k \leqq m+k_1,$$

即

$$k \leqslant k_1,$$

它表明T^*中存在一长为k的蓝路，因而，在T中也如此．

100. 设G是一个满足问题条件的图之一. F是G中一极大独立顶点集, L是G的而不在F内的顶点的集合, F与L分别有k与$n-k$个顶点. 因为F是极大的, L的任一顶点至少邻接于F的一个顶点. 因此, 存在F的一顶点至少有次数为$(n-k)/k$, 否则, F的顶点将一起关联于少于$((n-k)/k)k=n-k$条边, 它表明存在L的一顶点, 它不邻接于F的任何顶点. 因此, 据命题**17**,

$$\frac{n-k}{k}\leqq k,$$

由此, 即推得所需的不等式.

101. 设F是所论图G的一极大独立顶点集, 以L记G中而不在F中的顶点的集合. 则F与L分别有f及$f+d$个顶点. 由于$f+d>f$, G的由L导出的子图含某些边, 设$\{a_1, a_2\}$是其中的一边. 因F极大, a_1与a_2均有F内的邻接顶点, 设于其中各取一点分别记为b_1与b_2, 此两顶点不同, 因G无三角形. G也不含五边形. 所以, 不能有同时邻接于b_1与b_2的顶点. 因为b_1与b_2的邻接顶点都在L内,

$$2\varphi_0\leqq\varphi(b_1)+\varphi(b_2)\leqq f+d,$$

由此, 有

$$\varphi_0\leqq\frac{f+d}{2}.$$

练习**86**完全证明了那里给出的图是这问题的极图.

102. 先令$iv_{max}=f<n/2$与$n=2f+d(d\geqq 1)$. 也就是, $f=(n-d)/2$, 对于所论的n顶点的图成立. 据命题**39**

$$e\leqq\frac{nf}{2}.$$

可假定关系$f\geqq 2$, 否则命题是显然的. 若$d=1$, 则据命题**66**,

$$e\leqq f^2+1=\left(\frac{n-1}{2}\right)^2+1.$$

若 $d>1$, 则

$$e\leq\frac{nf}{2}=\frac{n(n-d)}{4}\leq\frac{n(n-2)}{4}=\frac{(n-1+1)(n-1-1)}{4}$$
$$=\frac{(n-1)^2-1}{4}<\frac{(n-1)^2}{4}+1.$$

现在,再设 $f\geqq n/2$. 设 F 是 G 的一极大独立顶点集, G_0 是 G 的子集,由 G 中不在 F 内的那些顶点组成. 对 G_0, 设 $ie_{\max}=k$. 由于 $n/2\leqq f$, 所以, G_0 的顶点数 $n-f$ 至多为 $n/2$, 我们有 $k\leqq n/4\leqq f/2$. 由于 G 不是双图, G_0 中至少存在一边, 即 $k\geqq1$. 让我们选取 G_0 的一极大独立边集, G_1 是 G_0 的子图,由这些边的端点导出. 若 P 是 G_0 的而不在 G_1 内的顶点的集合,则 P 显然是 G_0 的一独立顶点集(见图 250). P 内存在 $n-f-2k$ 个顶点, 同时,据命题 **40** G_1 至多有 k^2 条边. F 的任一顶点,至多能邻接于 G_1 的 k 个顶点, 因为 G 没有三角形. 若联结这些邻接顶点的边, 这些边是关联于 P 的顶点的,以及还有 G_1 的边全都考虑在内, 则 G 的所有的边都已被提到. 但据命题 **17**, G 的每个顶点的次数至多为 f, 因此,

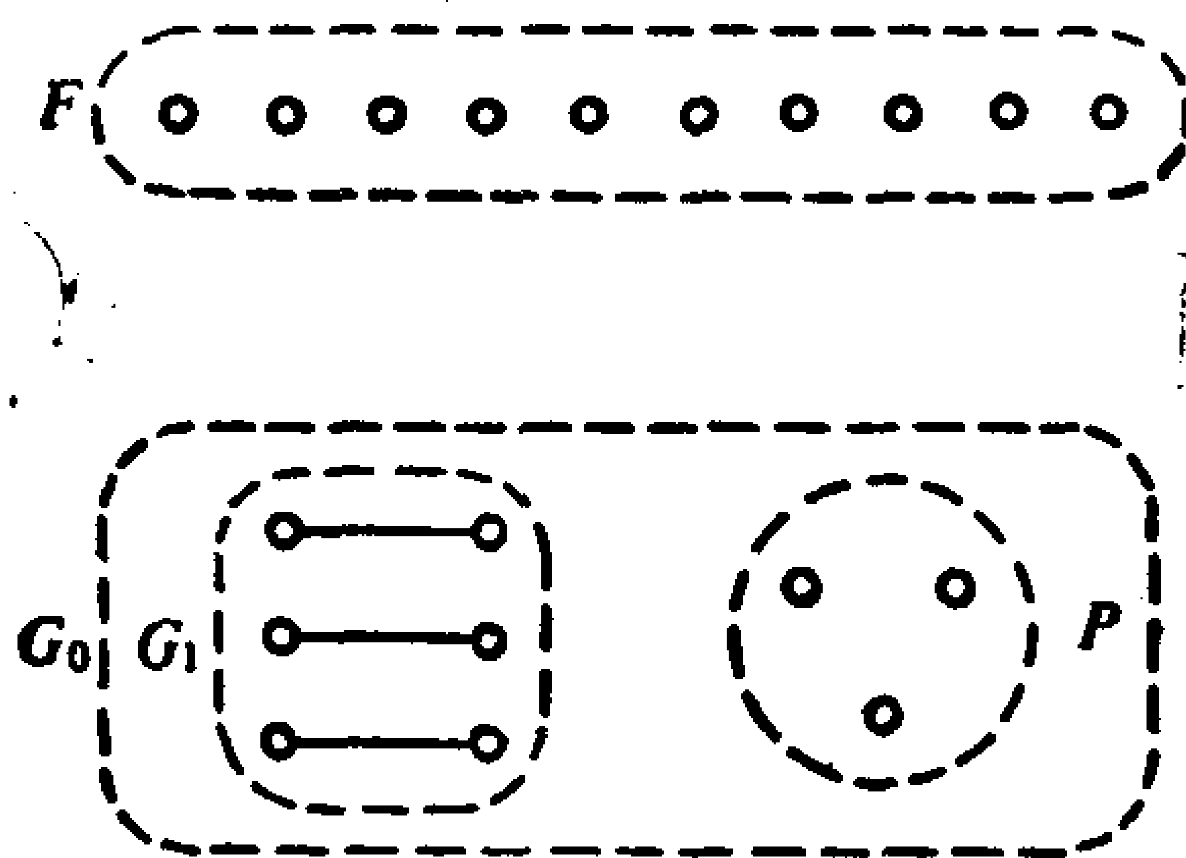


图 250

$$e\leqq fk+(n-f-2k)f+k^2=(n-f)f-k(f-k).$$

因为 $2k\leqq f$, 积 $k(f-k)$ 将随 k 的减少而减少, 因此

$$(k-1)(f-(k-1))=k(f-k)-(f-2k)-1<k(f-k).$$

此减少过程还能继续, 因为也有 $2(k-1)\leqq f$. 因此, 当 $k=1$ 时, 得到最小可能值. 于是

$$e \leqq (n-f)f-f+1=f(n-f-1)+1.$$

积 $f(n-f-1)$ 可以看作是一有 $n-1$ 个顶点的 $\langle f, n-f-1\rangle$ 型的图的边数．据关于问题 33 的解的注记，此数至多为 $((n-1)/2)^2$．所以，

$$e \leqq \frac{(n-1)^2}{4}+1.$$

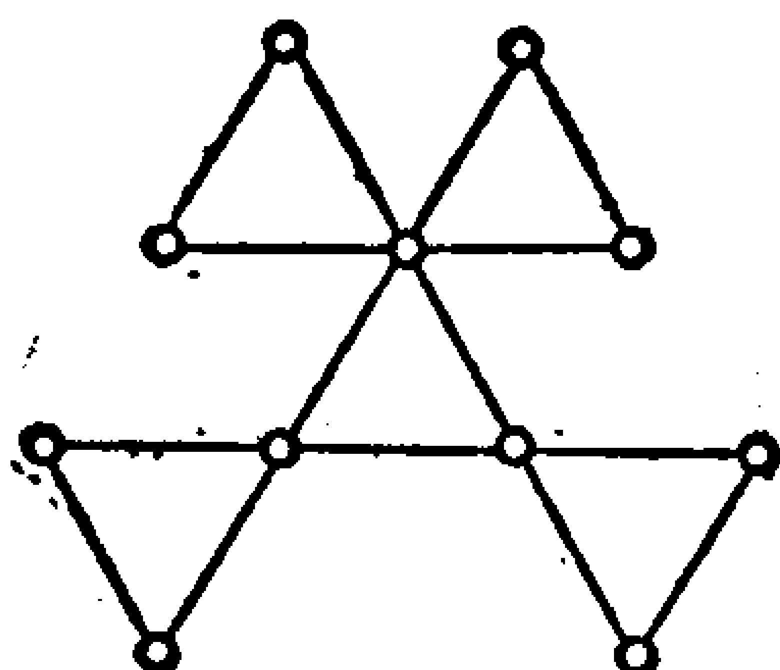
练习 87 完全证明了在那里给出的图是本问题的极图．

103. 设顶点 p 与 q 均属于图 G 的块 T_1 与 T_2．因为，块是连通图，从 q 沿 T_1 内的一路 L_1 及 T_2 的路 L_2 可到达 p．L_1 与 L_2 不能有一公共边，因为 G 的每边恰在一块内．若我们离开 p，沿 L_1 走，并继续在 L_2 上走，则我们到达了一个以前到达过的顶点（p 是这样的一个顶点）．产生了一个回路，它有一边在 T_1 内，也有一边在 T_2 内，它们均关联于 q，这是一个矛盾．

104. 若一个图有多重边，则于其中存在长为 2 的回路．所以，我们不妨假定所考虑的图 G 有 $2m+1$ 个顶点及 $3m+s$ 条边 $(s \geqq 1)$，且是简单图．以 L 记 G 的一生成林．据 2.18，L 至多有 $2m$ 条边，至少有 $m+s$ 条弦；G 至少有 $m+s$ 个回路．G 内存在两个有公共边的回路 K_1 和 K_2，否则 G 将至少含 $3(m+s)=3m+3s$ 条边；但只存在 $3m+s$ 条边．设 e 是在 K_2 内但不在 K_1 内的一边．存在一 K_2 的弧，以 p 与 q 为端点，使 e 含于此弧中，且 p 与 q 是此弧中属于 K_1 的仅有的顶点．（若我们沿 K_2 走，从 e 出发，按两个方向，p 与 q 是第一次接触 K_1 的顶点）．若考虑 K_2 的此弧及 p 与 q 间的 K_1 的两弧，此三弧中的任两弧构成一回路．若三弧的长分别为 k_1, k_2 与 k_3，则三回路长分别是 k_1+k_2，k_1+k_3 与 k_2+k_3．它们的和是 $2(k_1+k_2+k_3)$，为一偶数，所以，其中之一必为偶数．

由于图的任一回路是图的单个块的一子图，问题 67 的图 G_m

是 $k=3$ 时的极图(比如,对 $m=5$, 见图 251). 若考虑任一这样的图,它的每个块是一三角形; 于是图无偶回路, 有 $3m$ 条边与 $3+(m-1)2=2m+1$ 个顶点.


图 251

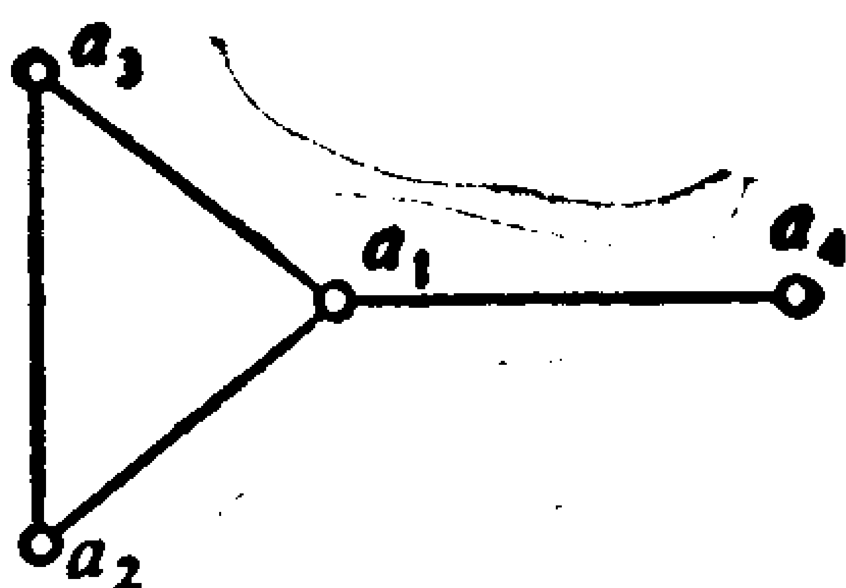


图 252

105. 假设 G 满足命题的条件. 则据 1.23, G 含一长至少为 3 的回路. 因此,只需考虑 G 含一三角形的情形;以 a_1, a_2, a_3 记它的顶点. 因为 G 是连通的,至少有 4 个顶点,不妨假设图 252 含于其中,由于 a_1 不是割点, 删去它连同它的关联边, 不会使图不连通. 于是, 所得到的图有一连通 a_4 与 a_2 或 a_3 的路, 此路不含边 $\{a_2, a_3\}$; 假设 a_4 与 a_2是 L 的端点(另一情况,同理). 路L, 连同边 $\{a_2, a_3\}$, $\{a_3, a_1\}$及$\{a_1, a_4\}$, 构成 G 中长至少为 4 的回路.

106. 命题 71 给出了 $k=1$ 而 n 为偶数时的解. 若 n 是奇数, 则合适的图 G 只能有次数至多为 1 的顶点. 所以, 仅当它的全部分支,除弧立顶点外,都是两顶点的完全图时,G 才有极大边数.所以,对于 $k=1$ 及一切 n,

$$e \leqq \left[\frac{n}{2}\right].$$

若 $k=2$ 而 n 能被 3 整除时, 则仍由命题 71 给出解. 现在假设 n 不能被 3 整除,此时,命题 71 表明 $e \leqq n-1$, 设 G 是此时的极图. 若 G 不含回路,则据练习 88 的解,它是"星形"图. 若 G 含一回路,则此回路的长必为 3. 但 G 中一三角形的任一顶点,必仅邻接于此三角形的顶点, 我们已能看出, G 的回路都是三角形, 它

们构成G的分支，G可能有唯一的另外的分支只能是一星形图(据练习88)，当n不能为3所整除时，这样的分支确实是存在的。因此，若n不能被3整除，则

$$e\leq n-1.$$

极图有一星形图的分支而所有其它的分支都是三角形，没有别的极图.

107. 以a_1, a_2, a_3, a_4记G中次数至少为$n-2$的4个顶点，而其余的顶点就记为$b_1, b_2, \cdots$. 至多有两个顶点b_i，它们至少与a_1与a_2中的一个不邻接. 所以，有两个(甚至4个)b_i，比如说，是b_1与b_2，同时邻接于a_1与a_2. 顶点a_1, a_2, b_1, b_2是G中长为4的回路的顶点. 在b_3，b_4，$\cdots$中只有两个顶点至少与a_3及a_4中的一个不邻接；因此，有其中之二，同时邻接于a_3与a_4，这就得到一长为4的新回路，显然，它与前述的回路无公共顶点.

108. 设K是所考虑的有n个顶点的图G中的一极小长的回路；m是K的长度，而G_0是由G中不在K内的顶点导出的G的子图. 在解问题76时，我们有下列结果：K没有对角线，G_0至多有$n-m-1$条边，且若$m\geq 5$，则K的每条弦的长度至少为3；所以，G_0的任一顶点至多邻接于K的一顶点. 因此，若$m\geq 5$，

$$e\leq m+(n-m-1)+n-m=2n-m-1\leq 2n-6,$$

若$n>3$，它小于$3n-9$. 因而，G不能是一极图.

以下，我们不妨假定$m=4$. 问题76的解还表明

$$e\leq 4+(n-4-1)+2(n-4)=3n-9,$$

等式$e=3n-9$成立，仅当G_0有$n-5$条边且G_0的每个顶点恰邻接于K的两个顶点. 这就直接地推出，当$n=5$时，G是图253的〈3, 2〉图. 现在设$n\geq 6$，由**2.26**可知G_0是连通的. 以a_1, b_1, a_2, b_2依次记K的顶点，又设a_3是G_0中有极大次数的顶点，设b_1与b_2是它在K中的两邻接顶点，而它在G_0中的邻接顶点是b_3，b_4，

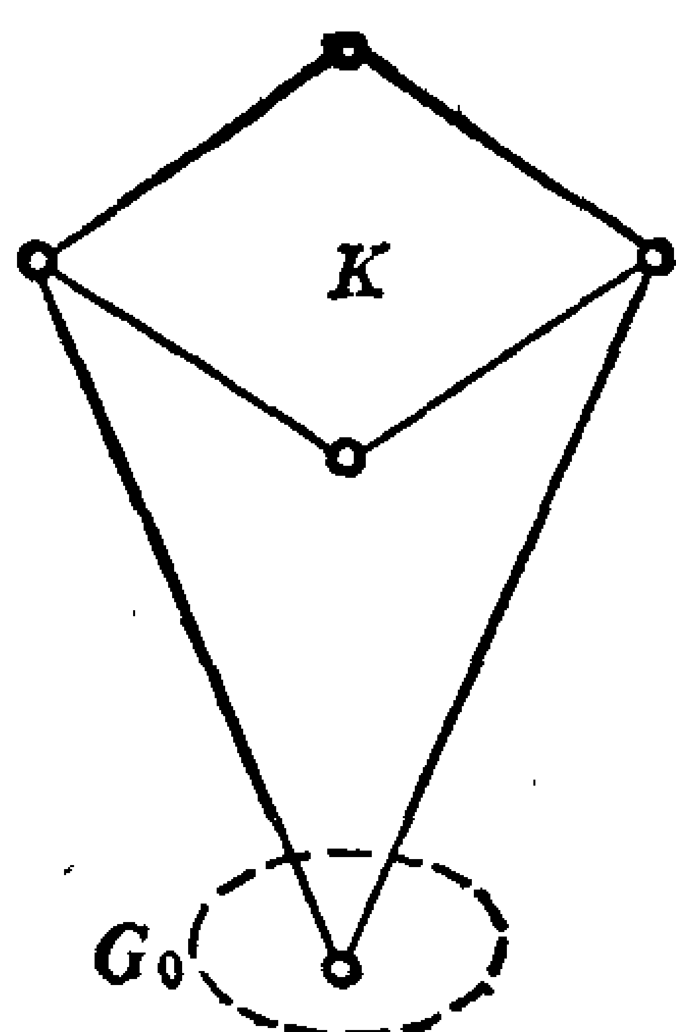


图 253

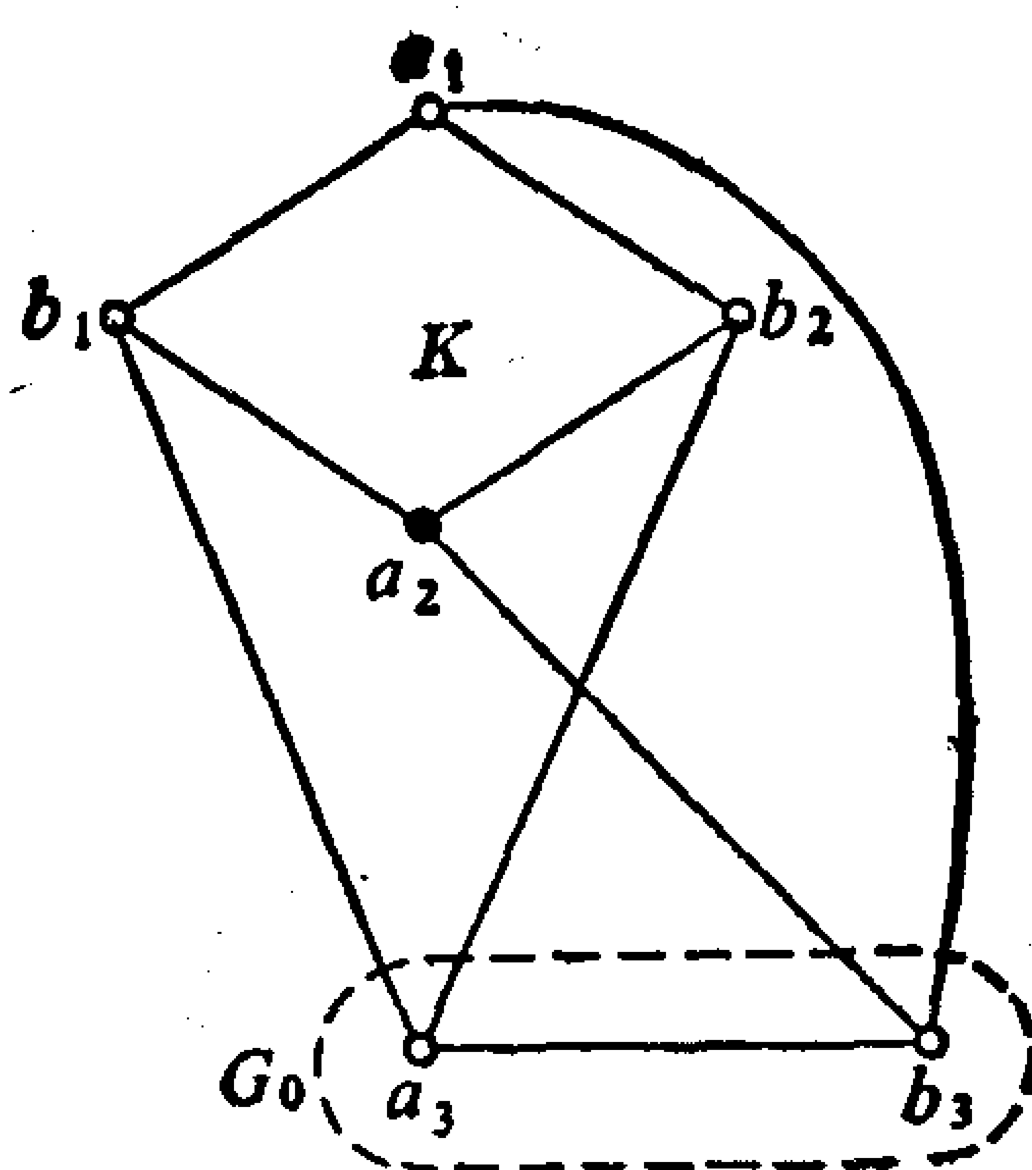


图 254

…. 若 $n=6$, 则 G_0 中异于 a_3 的唯一的顶点 b_3, 只能邻接于 K 的顶点 a_1 与 a_2(见图 254). 因此, G 是一〈3, 3〉型的图; 用记法 $G=G(A, B)$, 则顶点 a_i 及 b_i 分别组成集合 A 及 B.

若 $n>6$, 则 $\varphi(a_3)\geqq 2$. 下述事实依然成立. 对任一 $i\geqq 3$, 在 $\bar{K}_i$ 内顶点 b_i 的邻接顶点只能是 a_1 与 a_2, 但若 $i\geqq 3$, b_i 在 G_0 内有 a_3 以外的邻接顶点, 因为, 若有那么一个顶点 c 邻接于 b_3, 则, 例如, 一方面据 $\varphi(a_3)\geqq\varphi(b_3)$, a_3 在 G_0 内有两个邻接顶点, 另一方面, c 在 K 内的两邻接顶点, 只能是 b_1 与 b_2. 但此时就产生顶点不交的两回路: 图 255 中用粗线与虚线所表示的回路. 因此, a_3 是 G_0 的一切边的端点, 或 G_0 是一星形图; b_1 与 b_2 是 a_3 在 K 内的两邻接顶点, 若 $i\geqq 3$, 则 a_1 与 a_2 都是 b_i 的邻接顶点, 所以, G 是一〈3, $n-3$〉型的图; 用记号 $G=G(A, B)$, 集 A 与 B 分别由 a_i 与 b_i

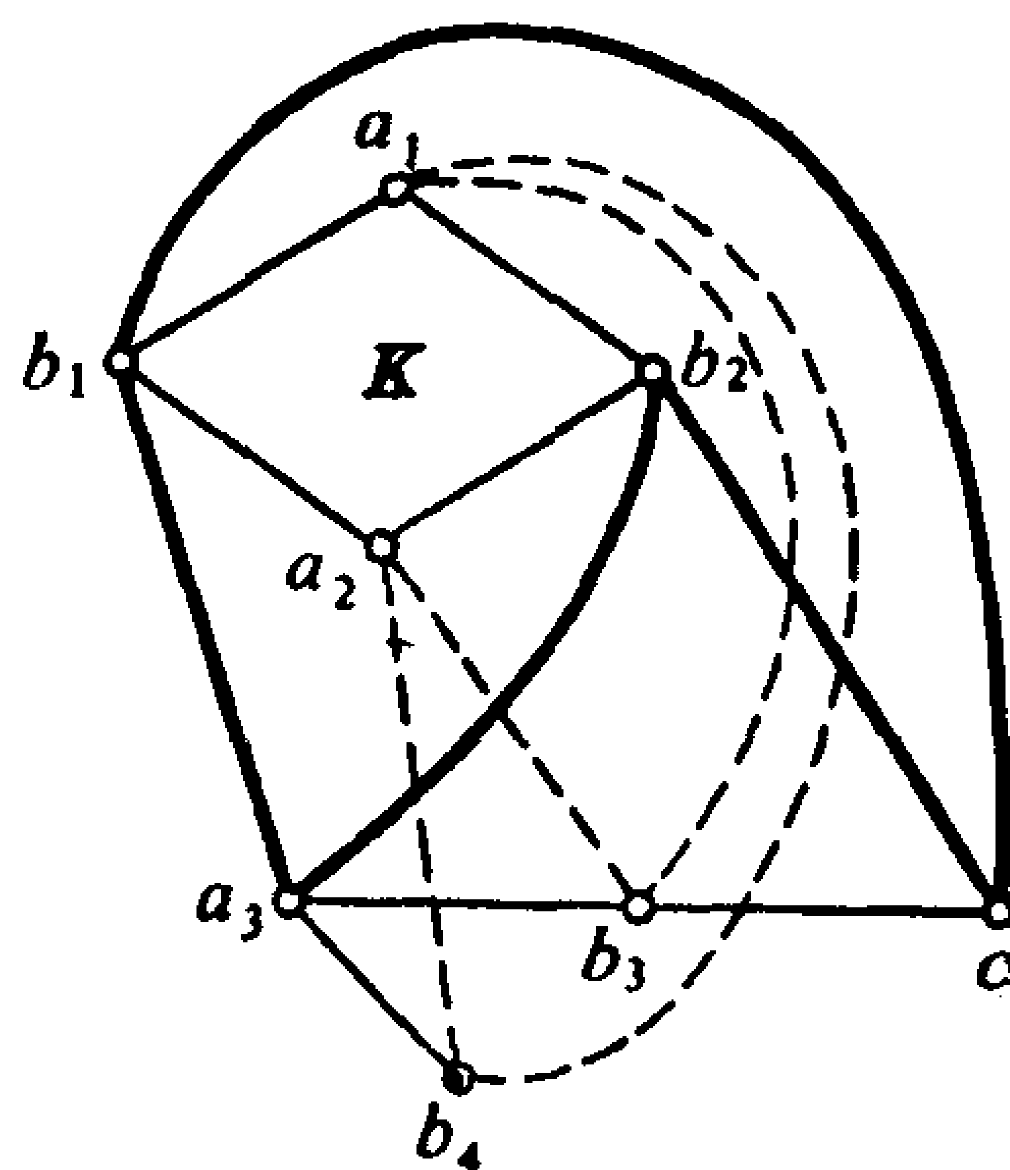


图 255

组成. 这些图既不含三角形又不含顶点不交的两回路. 因为, 这图的任一回路必含 A 中三顶点之二, 于是, 所求的图是 $\langle 3, n-3\rangle$ 型的那些图; 没有其它极图.

109. 命题可对 n 归纳地证明如下: 当 $n=4$ 时, 命题成立(见练习 89 的解). 让我们固定值 $n\geqq 4$, 并假设对于 n 命题成立; 我们来证 $n+1$ 时它也成立. 以 G 表示一 $n+1$ 顶点的极图, 具有问题所给定的性质. 据练习 91, G 至少有 $2(n+1)-4=2n-4+2$ 条边.

若存在一顶点 p, 它的次数至多为 1, 则删去 p, 也许还有关联于 p 的边, 将产生一 n 顶点的图 G_0, 它不包含任何带一对角线的回路. G_0 内的边数, 据假设, 至多是 $2n-4$, 可知 G 至多有 $2n-4+1$ 条边, 这是一个矛盾.

若 G 的每个顶点的次数至少为 3, 则考虑 G 的一极大路 L. 由于 L 的一端点 p 只能于邻接于 L 的顶点, 即可推出存在带一对角线的回路(见图 256, 其中回路与对角线分别由粗线与虚线表出).



图 256

所以, 我们不妨假设在 G 内有一次数为 2 的顶点 q. 删去 q 以及关联于它的两条边导出一 n 顶点的图 G_1. 显然 G_1 没有带一对角线的回路. 因为, G_1 至少应有 $2n-4$ 条边, 据假设, 它是恰有 $2n-4$ 条边的一极图.

先假定 G_1 不含三角形. 则 G_1 是一 $\langle 2, n-2\rangle$ 型的图. 若 $n=4$, 则 G_1 是一长为 4 的回路, 所以, q 在 G_1 内的邻接顶点必为此回路两不邻接的顶点. 此时, G 是一 $\langle 2, 3\rangle$ 型的图, 如图 253 中所见的. 若 $n>4$, 则仅两个次数至少为 3 的顶点能在 G 内邻接于 q, 否

则或有 G 内的一三角形，或者存在带一对角线的回路（见图 257，由粗线与虚线表示的回路及其对角线）．所以，G 是 $\langle 2, n-1\rangle$ 型，即 $\langle 2, n+1-2\rangle$ 型的图．

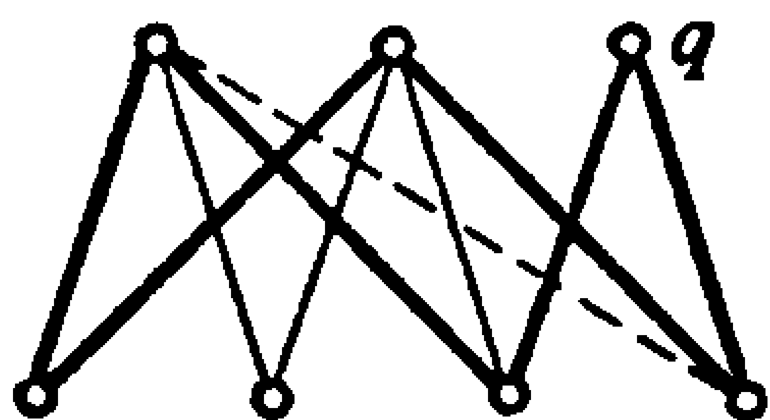


图 257

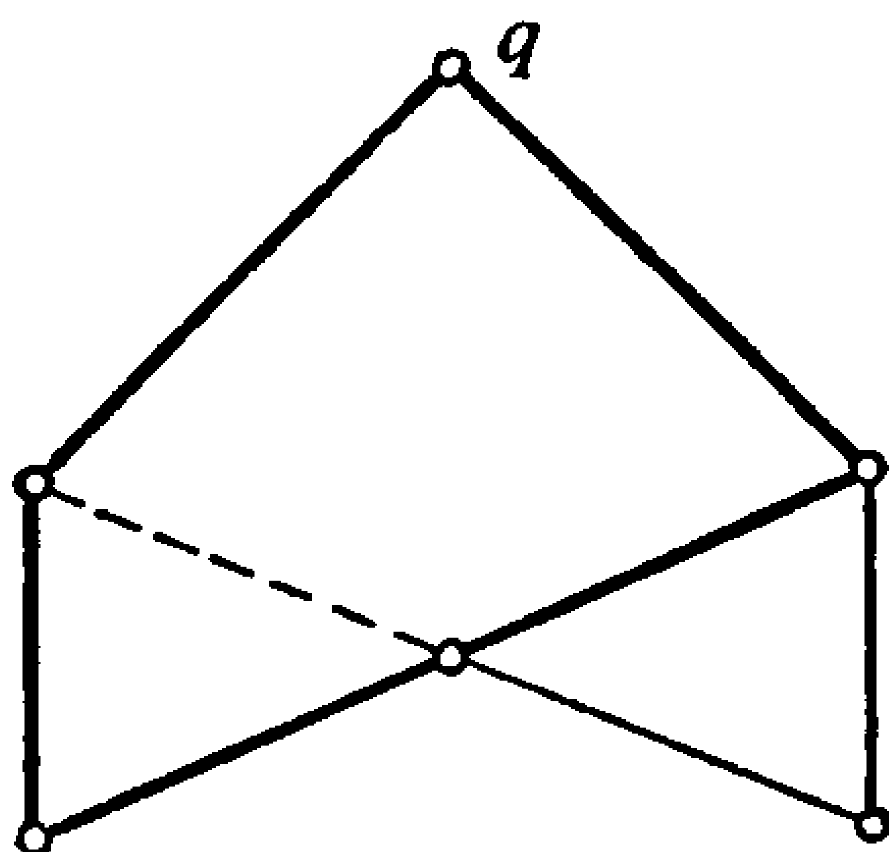


图 258

让我们假设于 G_1 内存在一三角形．q 在 G 内只能邻接于 G_1 的一任意的三角形的一个顶点．因此，若 G_1 同构于图 191 中的 4 顶点的图，则 G 必同构于同一图形中 5 个顶点的图．这后者不能同构于 G_1，因为，由此就能推出 G 内存在带一对角线的回路（见图 258）．

于是，问题得解．

110. 命题可对 m 归纳地证明如下：当 $m=2$ 时，命题成立（见练习 **89** 的解）．让我们固定值 $m\geqq 2$，假设命题对 m 成立，我们来证明它对 $m+1$ 也成立．设 G 是一 $2(m+1)$ 顶点的极图，它具有问题所给定的性质．根据练习 **90**，G 至少有 $(m+1)^2=m^2+2m+1$ 条边．若 G 没有三角形，则据命题 **40**，G 必为 $\langle m+1, m+1\rangle$ 型的图．

让我们假设 G 的每一边含于 G 的某三角形中．若 G 的每个顶点的次数至多为 2，则 G 至多有 $2m+2<m^2+2m+1$ 条边．以 r 记 G 的一个顶点，它的次数大于 2．设 p 与 q 是含有顶点 r 的那个三角形之另两顶点．若删去 p 与 q 以及关联于它的边，则所得的一新图 G_0 有 $2m$ 个顶点．因为 $\varphi(r)>2$，G_0 内存在一边 $\{r, s\}$．G 中不能有带公共边的两三角形，否则就有了带一对角线的长为4

的回路．所以，含有边$\{r,\ s\}$的三角形在G_0内．设t是它的异于r与s的顶点．顶点s与t不能在G内邻接于p或q(见图259)．顶点p与q在G内除了r外无公共的邻接顶点．因此，属于G但不属于G_0的边数至多为$2m$．G_0不能含有带一对角线的长为4的回路；于是，据假设，G_0至多有m^2条边．所以，G内的边数至多为m^2+2m这是一个矛盾．

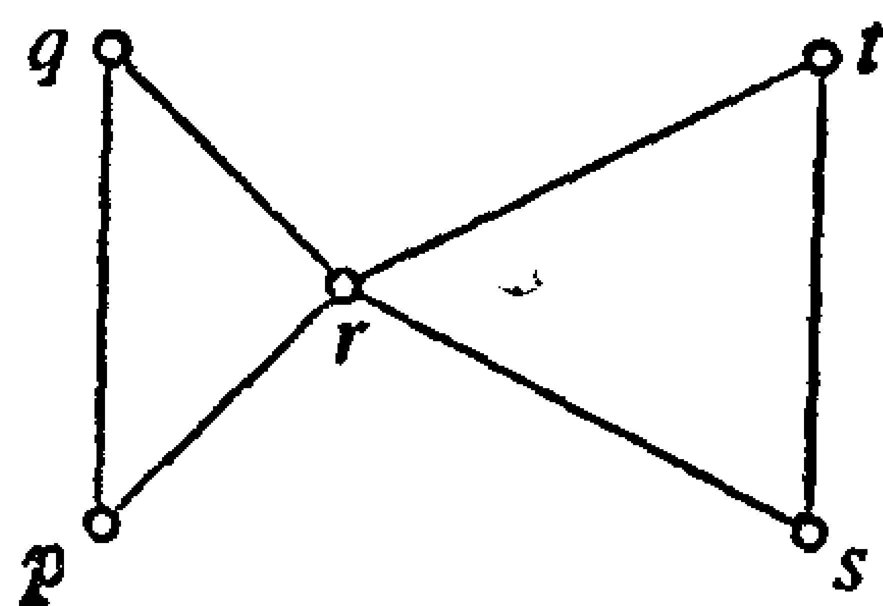


图 259

现在，我们假设，G有一边(a_0, b_0)，它不含于属于G的任一三角形中．此时，a_0与b_0不能有同一个邻接顶点．删除G的此两顶点导出一$2m$顶点的图G_1．G内但不在G_1内的边数至多为$2m+1$；事实上，仅当G_1的每个顶点或邻接于a_0或邻接于b_0时，此边数为$2m+1$．G_1内不能有一长为4的连同一对角线的回路，据假设，G_1至多有m^2条边．

若G_1中有一三角形H，则H内存在一顶点，它既不邻接于a_0也不邻接于b_0．否则，H内将有一边，其两端点均邻接于a_0与b_0之一，此时，可推出存在一长为4的连同其一对角线的回路．于是，G内但不在G_1内的边数至多为$2m$；因而，G至多有m^2+2m条边，这是一个矛盾．

因此，我们假设在G_1内无三角形．则据命题40，若G有m^2条边，它必为一$\langle m, m\rangle$型的双图，此时，若G有m^2+2m+1条边，则图$G_1=G_1(A,\ B)$的每个顶点，由集A与B确定．A与B各具有m个顶点，每个顶点恰邻接于顶点a_0与b_0之一．若a_0同时邻接于分别在A与B内的a_1与b_1，则不能另有G_1的顶点c，它邻接于a_0，否则，G中就会存在一长为4的连同其一对角线的回路(见图260)．因为，c邻接于a_1或b_1．于是，b_0邻接于G_1中除a_1与b_1

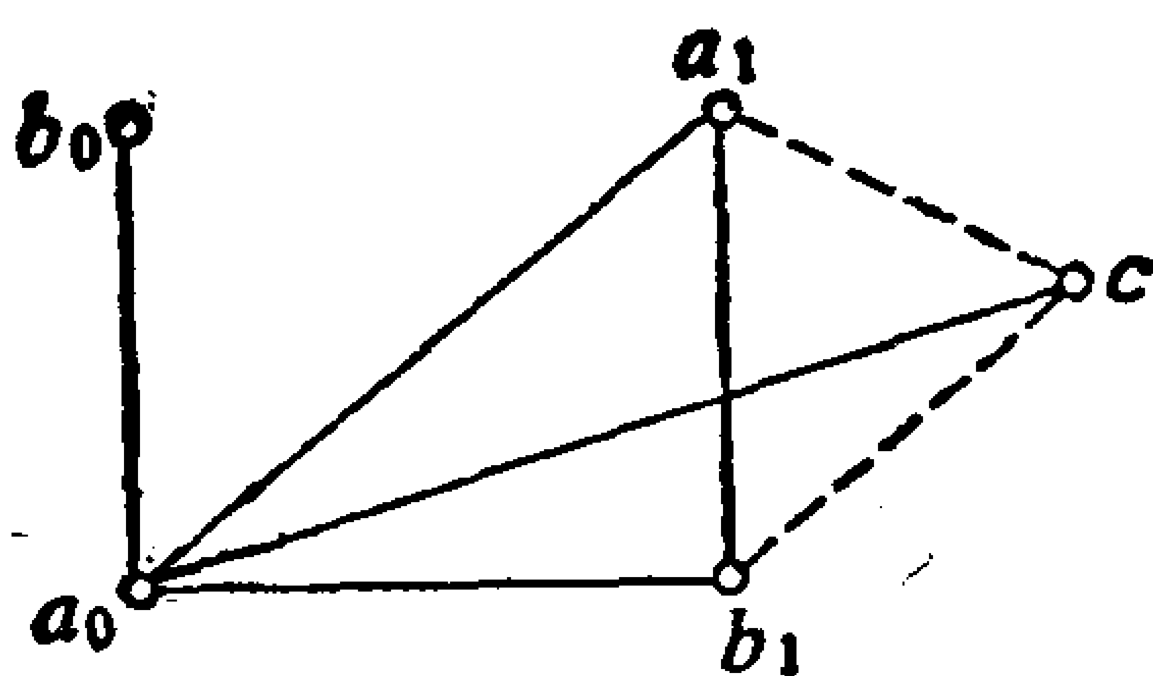


图 260

外的全部的顶点．而由于 $m\geqq2$，它邻接于A的一顶点 a_2 与B的一顶点 b_2．但在此情况下，与上述同理，b_0 也有不能邻接于 G_1 的任一别的顶点的性质．于是，若G有 m^2+2m+1 条边，则 $m=2$．于是构成图 190 中有 6 个顶点的图(参看图 261)．若 $m>2$，且G有 m^2+2m+1 条边，则 a_0 就不能有一邻接顶点，比如说，在A内，b_0 不能有在B内的任何的邻接顶点．于是，G是一个$\langle m+1, m+1\rangle$型的图．

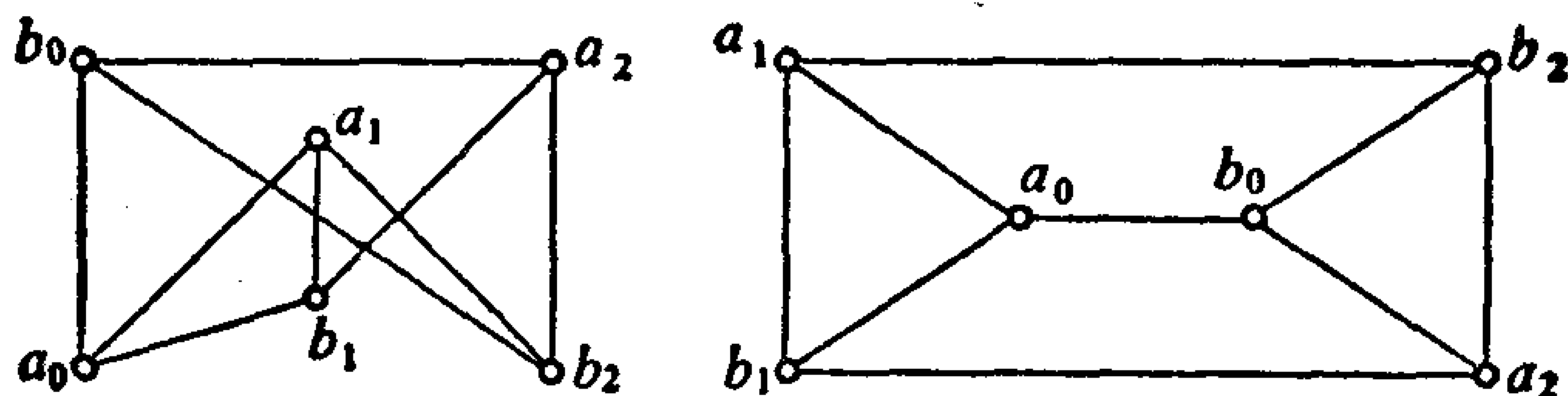


图 261

111. 只许移动两根火柴．因此，需构成 4 个方格，仅两个方格可以利用，即，在"角"上的那两个，也即，全部 4 个方格需落在图 262 的 7 个方格中．因为，有 16 根火柴，它们必须是 4 个方格的边．此 4 方格中，每两个都没有公共边．可用下述方式构造出一对应于图 262 的 7 顶点的简单图 G．G的顶点对应于方格，当且仅当对应的两方格有一公共边时两顶点是邻接的 (见图 192)．所以，对应于所求方格的顶点，必然构成G的一独立顶点集．现在，据练习 92，对于 G，$iv_{\max}=4$．在此练习中只给出一极大独立顶点

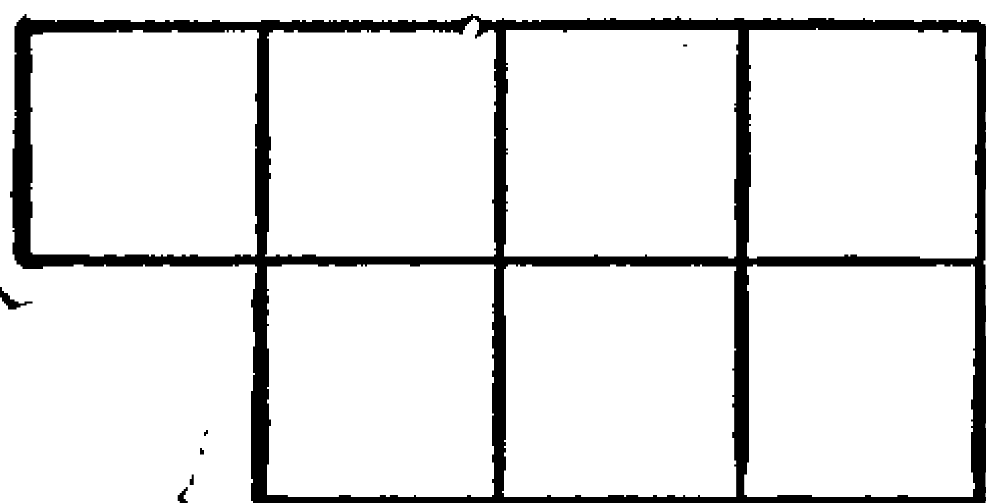


图 262

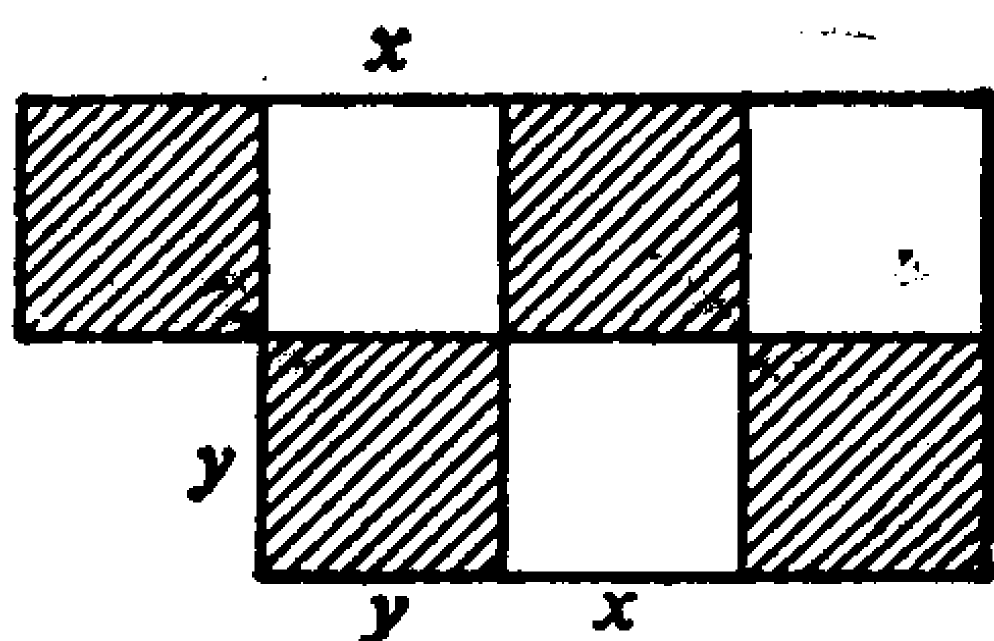


图 263

集. 对此，只能构成 4 个带阴影线的方格，且只有一种可能的办法. 即，把图 263 中标有 x 的火柴挪到标有 y 处的位置上. 因此，所求的火柴布置法是可能的. 交换两根被挪动的火柴的作用不产生一个新解. 实质上，它只有一个解(见图 264).

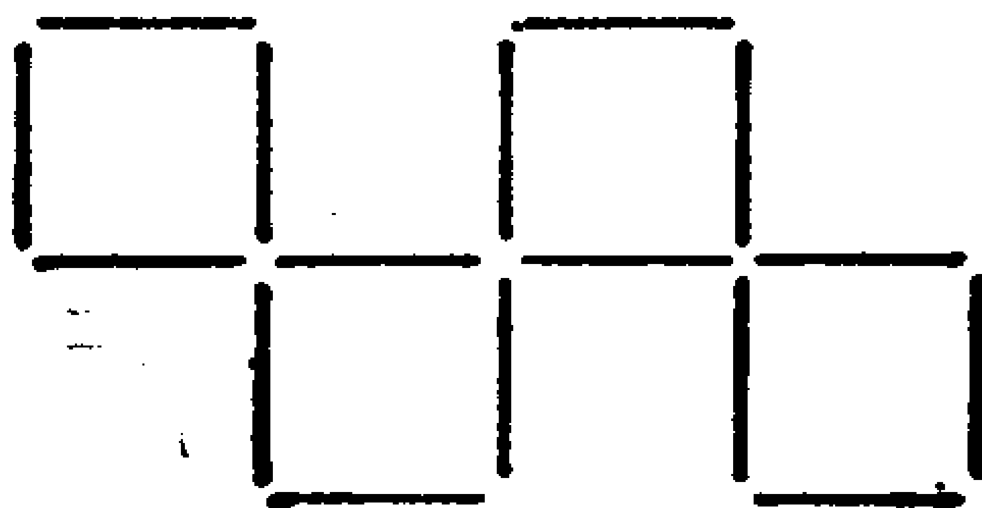


图 264

引 文 索 引

以下列出本书中所介绍结果的作者. 图论型的某些问题也摘自匈牙利每年为中学生举办的库尔斯恰克(J. Kürschák)数学竞赛的试题.

另有七本书已见于文献目录, 就不在此列出了. 那些书, 有的是介绍性的, 有的则水平较高, 均可供进一步的参阅.

图论, 不存在统一的术语. 同一语种的一些书, 也常常以不同的字、词来表达相同的概念.

第 一 章

14. 与 **16.** : [5], 问题 1947/2; **15.** : [5], 问题 1960/1.

第 二 章

树与生成树: [7], 第 IV 章, 及[14]; 建立最小无回路(无圈)网络的方法: Kruskal, [34]与[9], p. 61; 计算电网络: [14].

第 三 章

5. Veblen, [7], 第 II 章, 定理 6; **4.**, **6.**, **7. 19.** 与 **20.**: Euler, [7], 第 II章; **16.** 与 **37.**: [5], 问题 1954/3; **18.** Robbins, [41], 关于迷宫的图 73 与 74: [9], p. 48; 迷宫规则 I 与 II: Wiener 与 Tarry, 分别于[7], 第 III章, §§1与3; **21. 22. 23.** 与 **39.** (随意欧拉图): Ore, [9], pp. 74～77; **38.**: Kotzig, [33].

第 四 章

十二面体游戏: [1], Vol. II. 第 XVII 章; 在棋盘上跳马: [1], Vol. I, 第 XI 章; 关于 **14.** 与 **15.**: [5], 问题 1957/2; **13.** 与 **14.**: Dirac, [21], 定理 2 与 3; **15.**: Pósa, [38]; **16.**: Erdős[23], 定理 2; 存在哈密尔顿回路与路的充分条件(关于图 119～123): Whitney, [46]; **18.**: Rédei, [7], 第 II 章, 定理 10; **20.**: Nash-Williams, [36]; **21.** 与 **22.**: Ghouila-Houri, [36]; **33.**: Tutte, [44]; **35.** Ore, [37].

第 五 章

组织一场循环赛: Walecki, [8], Vol. II, p. 176; **9.** 与 **60.**: [5], 问题 1933/2; **16.**: Petersen, [7], 第 XI 章, 定理 7; **17.** 与 **18.**: König, [7], 第 XI—XIII 章及[11], §§4 与 5; 分解为哈密尔顿回路(图 135): Kirkman, [3]; **19.**: Ore, [9], 定理 7.3.3; 匈牙利方法: [3]; **22.**: König, [7], 第 XIV 章, 定理 13; **32.**, **33.** 与 **66.**: Moon 与 Moser, [35]; **34.**: Rado, [39]; **35.** 及其推广: Tutte, [45]; **41.**: Petersen, [7], 第 XII 章.

第 六 章

9. 与 **10.**: [29]; **19.** 与 **20.**: Greenwood 与 Gleason, [29], 定理 2 与 3; **22.**: Ramsey, [40]; **23.**: Erdős 与 Szekeres, [27]与[29], 推论 1; $n(3,6)=18$: Kéry, [32]; **24.**: [32]; $n(3,5)=14$, $n(4,4)=18$ 与 $n(3,3,3)=17$: [29]; **28.** 与其后的注记 2: Erdős, [22], 定理 IIa 与 II; **29.** 与 **30.** Andrásfai 与 Gerencsér-Gyárfás, [20]与[28]; **38.** 与 **44.**: zarankiewicz, [47]与[19], 定理 2.4; **40.** 与 **43.**: Turán, [42]与[43], 其它证明见[9]的 13.4, [17], [31], [48]; **17.** 与 **42.**: [19], 3.5; **49.** 中的几何应用: Erdős, [5], 问题 1961/1; **53.** 与 **54.**: Erdős 与 Gallai, [25], 定理(1.7)与(1.8); **58.**: [19], (2.1), (2.2) 与(2.3); **62.**, **63.**, **64.** 与 **66.**: Andrásfai, [19], 定理(2.5), (2.6), (2.8)与(3.1), (分别地); **65.**: Andrásfai, [18], 定理(3.4); **70.** **71.** 与 **72.**: Erdős 与 Gallai, [24], 定理(1.14), (2.6)与(2.7), (分别地); **76.**, **80.**, **81.**, **107.** 与 **108.**: Erdős 与 Pósa, [26], 定理 2, p. 4, 定理 3, 引理 1 与定理 2, (分别地); **99.**: Gerencsér 与 Gyárfás, [28], 脚注 1; **101.**: Andrasfái, [19], p. 423; **102.**: Erdős 与 Gallai, [18], 定理(3.7); **104.**: [30], 问题 10; **105.**: Dirac, [21], 定理 4; **106.**: Turrán 与 Andrásfai, [16], 8; **109.**: pósa.

文献目录

[1] Ahrens, W.: Mathematische Unterhattungen und Spiele, Vol., I., Leipzig, (1910), Vol. II., Leipzig, (1918).

[2] Behzad, M. — Chartrand, G.: Introduction to the theory of graphs, Allyn and Bacon Inc., Boston, (1971).

[3] Berge, C.: Graphs and hypergraphs, North-Holland, American Elsevier, Amsterdam-London-New York, (1973).

[4] Busacker, R. G. — Saaty, T. L.: Finite graphs and networks: An introduction with applications, McGraw-Hill Book Company, New York, (1965).

[5] Hajós, G. — Neukomm, G. —Surányi, J.: Matematikai Uersenytételek, II. (in Hungrian), Tankönyvkiadó, Budapest, (1965).

[6] Harary, F.: Graph theory, Addison-Wesley, Reading, Mass., (1969).

[7] Kőnig, D.: Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, (1936).

[8] Lucas, E.: Récréations mathématiques I—IV., Paris, (1882—1894).

[9] Ore, O.: Theory of Graphs, American Mathematical Society, Providence, R. I., (1962).

[10) Ore, O.: Graphs and their uses, Random House, New York, (1963).

[11] Ringel, G.: Färbungsprobleme auf Flächen und Graphen, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1959).

[12] Sachs, H.: Einführung in die Theorie der endlichen Graphen, I—II, Teubner, Leipzig, (1970—1972).

[13] Sedláček, J.: Einführung in die Graphentheorie, Teubner, Leipzig, (1968).

[14] Seshu, S. — Reed, M. B.: Linear graphs and electrical net-

work, Addison — Wesley, Reading, Mass., (1961).

[15] Wagner, K.: Graphentheorie, Bibliographisches Institut AG. Mannheim, (1970).

*   *   *

[16] Andrásfai, B.: Grafok útjairól, köreiről és hurokjairól, Mat. Lapok., 13, 95—107, (1962).

[17] Andrásfai, B.: Neuer Beweis eines graphentheoretischen satzes Von P. Turán, MTA. Math. Kut. Int. Közl. 7, A. 193—196, (1962).

[18] Andrásfai, B.: Über ein Extremalproblem der Graphentheorie, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 13, 443—455, (1962).

[19] Andrásfai, B.: Graphentheoretische Extremalprobleme, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 15, 413—438, (1964).

[20] Andrásfai, B.: Remarks on a paper of Gerencsér and Gyárfás, Annales Univ. Sci. Bp., Sectio Math., 13, 103—107, (1970).

[21] Dirac, G. A.: Some theorems on abstract graphs, Proc. London Math. Soc., (3), 2, 69—81, (1952).

[22] Erdös, P.: Some remarks on the theory of graphs, Bull. Amer. Math. Soc., 53, 292—294, (1947).

[23] Erdős, P.: Remarks on a paper of Pósa, MTA. Mat. Kut. Int. Közl., 7, A, 227—229, (1962).

[24] Erdős, P. — Gallai, T.: On maximal paths and circuits of graphs, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 10, 337—356, (1959).

[25] Erdős, P. — Gallai, T.: On the minimal number of Vertices representing the edges of a graph, MTA. Mat. Kut. Int. Közl, 6, A, 181—203, (1961).

[26] Erdős, P. — Pósa, L.: On the maximal number of disjoint circuits of a graph, Publ. Math., 9, 3—12, (1962).

[27] Erdős, P. — Szekeres, G.: A combinatorial problem in geometry, Comp. Math., 2, 463—470, (1935).

[28] Gerecsér, L. — Gyárfás, A.: On Ramsey-type Problems, Annales Univ. Sci. Bp. Sectio Math., 10, 167—170, (1967).

[29] Greenwood, R. E. — Gleason, A. M.: Combinatorial relations and chromatic graphs, Canad. J. Math., 7, 1—7, (1955).

[30] Jelentés az 1959. evi Schweitzer Miklós matematikai emlékversenyről, Mat. Lapok, 11, 155—178, (1960).

[31] Katona, Gy. — Nemetz, T. — Simonovits, M: Újabb bizonyitás a Turán-fele graftételre és megjegyzések bizonyos általánosításaira. Mat. Lapok, 15, 228—238, (1964).

[32] Kéry, G.: Ramsey egy gráfeméleti tételéről. Mat. Lapok, 15, 204—224, (1964).

[33] Kotzig, A.: Beitrag zur Theorie der endlichen gerichteten Graphen (im vollen Wortlaut), Wiss., Z. Univ. Halle, Math. Nat. 10/1, 118—126, (1961).

[34] Kruskal, J. B.: On the shortest Spanning Subtree of a graph and the travelling Salesman problem, Proc. Amer. Math. Soc. 7, 48—50, (1956).

[35] Moon, J. — Moser, L.: On Hamiltonian bipartite graphs, Isr. J. Math., 1, 163—165, (1963).

[36] Nash, Williams, C. St. J. A.: Hamiltonian circuits in graphs and digraphs, (lecture given at the University of western Michigan, 1968) 1—13.

[37] Ore, O.: Arc coverings of graphs, Annali Math. Pure Appl. IV. 55, 315—321, (1961).

[38] Pósa, L.: A theorem concering Hamilton lines, MTA. Mat. Kut. Int. Kőzl., 7, A, 225—226, (1962).

[39] Rado, R.: Factorization of even graphs, Quart. J. Math., 20, 95—104, (1949).

[40] Ramsey, F. P.: On a prablem of formal logic, Proc. London Math. Soc., 2, 30, 264—286, (1930).

[41] Robbins, H. E.: A theorem on graphs with an application to a problem of traffic control, Amer. Math. Monthly, 46, 281—283, (1939).

[42] Turán, P.: Egy gráfelméleti szélőérték-feladatról, Mat. Fiz.

Lapok, **48**, 436—452, (1941).

[43] Turán, P.: On the theory of graphs, Coll. Math., **3**, 19—30, (1954).

[44] Tutte, W. T.: On Hamiltonian circuits, J. London Math. Soc. **21**, 98—101, (1946).

[45] Tutte, W. T.: The factorization of linear graphs, J. London, Math. Soc. **22**, 107—111, (1947).

[46] Whitney, H.: A theorem of graphs, Annals Math. (2), **32**, 378—390, (1931).

[47] Zarankiewicz, K.: Sur les relations Symetriques dans l'ensemble fini, Coll. Math., **1**, 10—14, (1947).

[48] Zykov, A. A.: On Some properties of linear complexes, (Amer. Math. Soc. Transl. No. 79) Mat. Sb., **24**, (66), 163—188, (1949).

内 容 索 引

四　划

五　划

六　划

七　划

八　划

九　划

十 划

十一划

十二划

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝图论导引
作者＝（匈）Ｂ．Ａｎｄｒａｓｆａｉ　郭照人译
页数＝２７８
ＳＳ号＝１０８３３３３１
出版日期＝１９８５年０８月第１版

前言
目录